计及热效应和湿分扩散的耦合黏弹性本构方程[1)]

王 珺 杨 帆 陈大鹏
(西南交通大学工程科学研究院计算工程科学研究所, 成都 610031)

摘要 高聚物在电子和航空等领域得到广泛运用, 由于高聚物的亲水性, 常常发生由于湿热引起的结构失效甚至材料的断裂. 近年来, 有实验显示, 高聚物中的湿热效应及其力学反响是相互影响的, 同时, 考虑到高聚物的黏弹性, 发展新的包含湿热效应的黏弹性本构方程来描述该问题是必要的. 本文基于不可逆热力学的基本原理, 运用连续介质力学的方法, 通过引入内变量表示高聚物的黏性效应, 基于 Helmholtz 自由能导出一种热、湿分和黏弹性力学性质三场耦合的本构关系和系统控制方程, 对实际的分析应用有较强的指导意义.

关键词 耦合效应, 本构方程, 湿分扩散, 热传导, 黏弹性

引 言

近年来, 在电子、航空等工业中, 由于吸湿所引起的材料或结构失效、破坏频繁发生. 与之相关的传热问题、扩散问题以及力学问题, 引起了众多研究者的关注. 事实上, 在 60 年代, 吸湿及湿分的扩散对高分子材料性能和行为的影响就曾受到人们的关注 [1]. 由于人们对这一现象认识的局限性以及当时的试验、分析和计算手段的限制, 这一领域的研究工作没能得到迅速发展.

吸湿导致高分子材料性能下降, 引起膨胀变形, 降低使用寿命, 甚至产生脱层断裂, 使结构完全失效. 破坏问题在以下两方面的实际应用中最为突出: 一是以高分子材料作封装的电子元件在封装及其应用过程中由于吸湿和湿分扩散引发的破坏 [2~4] ; 另一类是在使用高分子粘结剂的结构粘结接头中, 材料吸湿导致粘结强度下降而引发的破坏 [5~7]. 尤其在有热场作用的情况下, 这类问题就显得更为严重. 由此可见, 湿分与温度一样, 也是影响材料性能及整个结构可靠性的主要环境因素之一.

大量的试验研究发现温度对湿分扩散的影响很大 [6~9]. 另一方面, 应力对湿分扩散的影响也有报道 [10,11]. 可见, 在该问题中, 温度、湿分、应力是相互耦合的. 研究湿分、热、力的耦合作用对材料和结构行为的影响是十分必要的. 1987 年, 采用 Biot[12] 提出的内变量理论, Weitsman 从不可逆热力学的基本原理出发, 基于以应力为变量的 Gibbs 自由能建立了弹性和黏弹性材料的耦合湿分扩散模型和力学模型 [13]. 其黏性影响则是由一组内部状态变量反映. 由于 Weitsman 仅对 Gibbs 自由能采用了应力和黏性内变量的二次完备近似, 其各向同性线形黏弹性本构关系仅包括体积变形的黏性效应, 而偏斜变形的黏性效应被忽略. 1990 年, Weitsman 进一步发展了这个模型, 引入 “自由体积” 作为内部状态变量, 用以反映湿分引起的材料老化现象 [14]. 该研究工作对 Gibbs 自由能采用了应力和黏性内变量的更高阶近似, 建立了水、力作

2001–06–21 收到第一稿, 2001–11–20 收到修改稿.
1) 西南交通大学校基金资助项目.

用的湿分扩散模型和应力列式的黏弹性本构关系. 但是, 热的影响没有被考虑. Weitsman 的工作为建立湿、热、力全耦合本构关系确立了基本框架. 另一方面, Pecht 等 [15] 基于一组不同湿度和加载速率的实验数据, 提出了一种包含了湿度影响的黏弹性本构方程. 但该模型没有考虑湿热扩散过程的影响.

本文从不可逆热力学出发, 基于以应变为变量的 Helmholtz 自由能导出了一个普遍的具有湿热影响的黏弹性耦合本构关系并建立了相应的湿分扩散和热传导方程. 其中, 黏性耗散行为同样是用一组标量值内变量表示. 但是, 为了克服传统各向同性本构框架不包含偏斜变形的黏性效应的缺陷, 其自由能采用了黏性内变量和应变的更高阶的近似形式.

1 包含湿、热影响的系统方程

由含水介质组成的系统包含两相物质, 即介质 (固体物质, 通常为高分子材料) 和湿分. 连续介质力学分别给出了系统中介质和湿分的质量守恒方程

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\dot{m} = -\boldsymbol{f}\cdot\nabla \tag{2}$$

和应力平衡方程

$$\boldsymbol{t}\cdot\nabla + \rho\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{v}(\mathrm{ms}^{-1})$ 表示系统典型点的速度; $\boldsymbol{f}(\mathrm{kgm}^{-2}\mathrm{s}^{-1})$ 是水分流矢量; $m(\%)$ 为湿分, 即单位质量介质中所含水分的质量百分比; ρ 为介质的密度; ∇ 为 Hamilton 微分算子; $\boldsymbol{t}$ 为典型点处 Cauchy 应力张量; $\rho\bar{\boldsymbol{f}}$ 为体积力. 考虑了湿分化学能的系统能量守恒方程则有如下表示

$$\rho\dot{e} - \boldsymbol{t}:\boldsymbol{d} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla + (\bar{h}\nabla)\cdot\boldsymbol{f} - \rho\bar{h}\dot{m} = 0 \tag{4}$$

其中, e 是单位介质质量的系统的内能; $\boldsymbol{d}$ 为典型点处的变形率张量; $\boldsymbol{q}(\mathrm{Jm}^{-2}\mathrm{s}^{-1})$ 为系统的热流矢量; $\bar{h}(\mathrm{J})$ 为湿分具有的焓. 湿分所具有的焓定义如下

$$\bar{h} = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \bar{u} \tag{5}$$

其中 $\bar{p},\bar{\rho},\bar{u}$ 分别表示湿分的压力、密度和内能. 考虑到湿分的熵的贡献, 系统的耗散不等式可写成如下形式

$$\rho\theta\dot{\eta} - \frac{1}{\theta}(\boldsymbol{q}+\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot(\theta\nabla) + \boldsymbol{q}\cdot\nabla + [(\theta\bar{s})\nabla]\cdot\boldsymbol{f} - \rho\theta\bar{s}\dot{m} \geq 0 \tag{6}$$

其中, $\bar{s}(\mathrm{J})$ 为湿分所含的熵; $\theta(\mathrm{K})$ 和 $\eta(\mathrm{JK}^{-1})$ 分别为系统的温度和熵; 联立式 (4), 式 (6) 消去 $\boldsymbol{q}\cdot\nabla$ 可得

$$-\rho(\dot{e}-\theta\dot{\eta}) + \boldsymbol{t}:\boldsymbol{d} - \frac{1}{\theta}(\boldsymbol{q}+\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{\Theta} + \rho\bar{\mu}\dot{m} - \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f} \geq 0 \tag{7}$$

其中, 湿分的化学热 $\bar{\mu}(\mathrm{J})$, 化学势的梯度 $\boldsymbol{z}$ 以及系统温度的梯度 $\boldsymbol{\Theta}$, 分别定义为

$$\bar{\mu} = \bar{\boldsymbol{h}} - \theta\bar{s}\,, \qquad \boldsymbol{z} = \bar{\mu}\nabla\,, \qquad \boldsymbol{\Theta} = \theta\nabla \tag{8}$$

引入 Helmholtz 自由能

$$\psi = e - \theta\eta \tag{9}$$

耗散不等式 (7) 成为

$$-\rho(\dot{\psi}+\dot{\theta}\eta)+\boldsymbol{t}:\boldsymbol{d}-\frac{1}{\theta}(\boldsymbol{q}+\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{\Theta}+\rho\bar{\mu}\dot{m}-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}\geq 0 \tag{10}$$

在小变形情形下， Cauchy 应力 $\boldsymbol{t}$ 和变形率 $\boldsymbol{d}$ 可退化为工程应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变率 $\dot{\varepsilon}$, 则上式成为

$$-\rho(\dot{\psi}+\dot{\theta}\eta)+\boldsymbol{\sigma}:\dot{\varepsilon}-\frac{1}{\theta}(\boldsymbol{q}+\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{\Theta}+\rho\bar{\mu}\dot{m}-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}\geq 0 \tag{11}$$

上式即是整个物理过程必须满足的热力学限制条件.

2 黏弹性本构关系的一般形式

在连续介质不可逆热力学框架下，系统的本构方程一般可假设为以下泛函形式 [16]

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}&=\sigma^*(\varepsilon(t),\theta(t),m(t),\gamma_\alpha)\\
\eta&=\eta^*(\varepsilon(t),\theta(t),m(t),\gamma_\alpha)\\
\psi&=\psi^*(\varepsilon(t),\theta(t),m(t),\gamma_\alpha)\\
\boldsymbol{q}&=q^*(\varepsilon(t),\theta(t),m(t),\gamma_\alpha,\boldsymbol{\Theta}(t),\boldsymbol{z}(t))\\
\boldsymbol{f}&=f^*(\varepsilon(t),\theta(t),m(t),\gamma_\alpha,\boldsymbol{\Theta}(t),\boldsymbol{z}(t))
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中 $\gamma_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 为内部状态变量，高聚物的黏性与其长分子链的各自由度相关，内变量的物理含义是，用 n 个标量值 $\gamma_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 表示长分子链的运动模式 [14]; 所有带上标 $*$ 的斜体字母表示本构泛函．将式 (12) 第 3 式代入式 (11), 经整理后有如下不等式

$$\Big(\boldsymbol{\sigma}-\rho\frac{\partial\psi^*}{\partial\varepsilon}\Big):\dot{\varepsilon}-\rho\Big(\eta+\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\Big)\dot{\theta}+\rho\Big(\bar{\mu}-\frac{\partial\psi^*}{\partial m}\Big)\dot{m}-R_\alpha\dot{\gamma}_\alpha-\frac{1}{\theta}(\boldsymbol{q}+\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\dot{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}\geq 0 \tag{13}$$

其中

$$R_\alpha=\rho\frac{\partial\psi^*}{\partial\gamma_\alpha} \tag{14}$$

称为内变量 $\gamma_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 的对偶应力．由于不等式 (13) 关于应变、温度和湿分的时间导数是线性的，可以导出以下本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\psi^*}{\partial\varepsilon},\quad \eta=-\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta},\quad \bar{\mu}=\frac{\partial\psi^*}{\partial m} \tag{15}$$

耗散不等式 (13) 的剩余项可以写为

$$-R_\alpha\dot{\gamma}_\alpha-\frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\Theta}-\bar{s}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f}>0 \tag{16}$$

其中，与耗散过程相对应的右手项必须大于零．上式要求 $R_\alpha,\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 必须是 $\dot{\gamma}_\alpha,\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 奇函数．将 $\boldsymbol{R}_\alpha,\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别取为 $\dot{\gamma}_\alpha,\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 的线性展开式，可以得到完全耦合的关系式．为使本构方程得到合理的简化，假设系统的黏性耗散独立于水、热耗散．由于有水、热耗散间交互影响现象 Soret 和 Defour 效应的存在 [17], 取水、热的梯度相互耦合，由此，可以得到如下简化的本构关系

$$R_\alpha=-\sum_{\beta=1}^{n}b_{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta,\qquad \boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{z}-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\Theta},\qquad \boldsymbol{q}=-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{z} \tag{17}$$

其中 $\alpha,\beta=1,2,\cdots,n$; $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是湿分扩散系数张量和热传导系数张量； $\boldsymbol{L}$ 是温度梯度对湿分扩散流的影响系数；而 $\boldsymbol{M}$ 是化学势梯度对热流的影响系数. 将式 (17) 代入式 (16) 中，写成矩阵形式有

$$-[\dot{\gamma}_\alpha, z_i, \Theta_i]\boldsymbol{A}\left\{\begin{array}{c}\dot{\gamma}_\alpha\\ z_i\\ \Theta_i\end{array}\right\}>0 \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中各元素都是 ε,m,θ 的函数. 由于要求耗散不等式 (18) 总是成立，则可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必为正定对称矩阵. 由对称正定矩阵的性质，可以推知， $b_{\alpha\beta},\boldsymbol{F},\boldsymbol{k}$ 元素组成的矩阵分别都是对称正定的，并且存在如下关系

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{M}}{\theta}+\bar{s}\boldsymbol{F} \tag{19}$$

式 (17) 中第 1 式对应黏性，后两式在单独的湿分扩散或热传导中分别退化为 Fick 扩散模型和 Fourier 传热模型. 其中 $b_{\alpha\beta},\boldsymbol{F},\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 都是应变 ε, 绝对温度 θ 和湿分 m 的函数. 将式 (17) 第 2 式代入湿分的质量守恒方程式 (2), 可以得到湿分扩散方程

$$\rho\dot{m}=\nabla\cdot[\boldsymbol{F}\cdot(\bar{\mu}\nabla)+\boldsymbol{L}\cdot(\theta\nabla)] \tag{20}$$

在各向同性的情况下， $\boldsymbol{F},\boldsymbol{L}$ 成为 $F\boldsymbol{I},L\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量. 而式 (20) 则简化为

$$\rho\dot{m}=\nabla\cdot[F(\bar{\mu}\nabla)+L(\theta\nabla)] \tag{21}$$

同样，在各向同性的情况下， $\boldsymbol{k}$ 亦成为 $k\boldsymbol{I}$, 耗散不等式要求湿分扩散系数 F 和热传导系数 k 必须是正数. 而式 (17) 第 3 式则表明热量是由高温处流向低温处的.

如果我们确定了系统的 Helmholtz 自由能，由式 (17) 第 1 式可解出 γ_α. 表达式 (15) 和 (17) 则给出了系统的本构方程. 式 (20) 或 (21) 给出了湿分扩散的控制方程，而能量守恒方程 (4) 则给出了系统的热传导方程.

3 线性黏弹性本构关系

将 Helmholtz 自由能首先展开至内变量 γ 的二次项，有

$$\rho\psi^*=\psi^0+\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha^1\gamma_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\psi_{\alpha\beta}^2\gamma_\alpha\gamma_\beta \tag{22}$$

上式中的所有系数都是湿分，温度和应变的函数. 其中 $\psi_{\alpha\beta}^2$ 关于下标 α 和 β 对称. 将式 (22) 代入式 (14) 有

$$R_\alpha=\rho\frac{\partial\psi^*}{\partial\gamma_\alpha}=\psi_\alpha^1+\sum_{\beta=1}^{n}\psi_{\alpha\beta}^2\gamma_\beta \tag{23}$$

联立式 (17) 第 1 式，可得

$$\sum_{\beta=1}^{n}b_{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta+\sum_{\beta=1}^{n}\psi_{\alpha\beta}^2\gamma_\beta=-\psi_\alpha^1 \tag{24}$$

采用 Schapery[17,18] 的假设，我们假设

$$b_{\alpha\beta}=a(\theta,m)\tilde{b}_{\alpha\beta}\,,\qquad \psi_\alpha^1=\boldsymbol{A}(\theta,m,\varepsilon)\widetilde{\psi}_\alpha^1\,,\qquad \psi_{\alpha\beta}^2=\boldsymbol{A}(\theta,m,\varepsilon)\widetilde{\psi}_{\alpha\beta}^2 \tag{25}$$

其中，所有顶标为 “∼” 的变量均与时间无关．微分方程 (24) 成为常系数微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_\alpha}{\mathrm{d}\xi}+\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\tilde{b}_{\alpha\beta}^{-1}\widetilde{\psi}_{\beta\gamma}^{2}\gamma_\gamma=-\sum_{\gamma=1}^{n}\tilde{b}_{\alpha\gamma}^{-1}\widetilde{\psi}_{\gamma}^{1} \tag{26}$$

其中

$$\xi=\int_0^t\frac{a(\theta,m)}{\boldsymbol{A}(\theta,m,\boldsymbol{\varepsilon})}\mathrm{d}\tau \tag{27}$$

求解微分方程 (26)[19], 初值条件取为 $\gamma_\alpha(0)=0$, 可得

$$\gamma_\alpha=-\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\zeta=1}^{n}\varPhi_{\alpha\beta}\frac{1-e^{-\lambda_\beta\xi}}{\lambda_\beta}\varPhi_{\beta\gamma}^{-1}\tilde{b}_{\gamma\zeta}^{-1}\widetilde{\psi}_{\zeta}^{1} \tag{28}$$

其中，$[\varPhi_{\alpha\beta}]$ 是由 $[\tilde{b}_{\alpha\beta}^{-1}\widetilde{\psi}_{\beta\gamma}^{2}]$ 的特征向量组成的正交矩阵的元素．

线性黏弹性力学本构关系可由式 (22) 联立式 (15) 第 1 式得到

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\psi^0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}+\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial\psi_\gamma^1}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\gamma_\gamma \tag{29}$$

其中，式 (22) 中的 γ_α 的二次项已被忽略．将 ψ^0 和 ψ_γ^1 分别展开至应变得二次

$$\psi^0=P_0+\boldsymbol{P}_1:\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon:\boldsymbol{P}_2:\varepsilon \tag{30}$$

$$\psi_\gamma^1=A(\theta,m,\varepsilon)\widetilde{\psi}_\gamma^1=(A_0+\boldsymbol{A}_1:\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon:\boldsymbol{A}_2:\varepsilon)\widetilde{\psi}_\gamma^1 \tag{31}$$

其中，P_0 和 A_0 为标量，下标为 1 和 2 的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别为二阶和四阶张量．它们均是温度 θ 和湿分 m 的函数．将式 (30) 和 (31) 代入 (29), 并注意到式 (28) 的解，可得

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2:\varepsilon-(\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2:\varepsilon) \tag{32}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{A}_1\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\zeta=1}^{n}\widetilde{\psi}_\alpha^1\varPhi_{\alpha\beta}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_\beta\xi}}{\lambda_\beta}\varPhi_{\beta\gamma}^{-1}\tilde{b}_{\gamma\zeta}^{-1}\widetilde{\psi}_\zeta^1 \tag{33}$$

$$\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{A}_2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\zeta=1}^{n}\widetilde{\psi}_\alpha^1\varPhi_{\alpha\beta}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_\beta\xi}}{\lambda_\beta}\varPhi_{\beta\gamma}^{-1}\tilde{b}_{\gamma\zeta}^{-1}\widetilde{\psi}_\zeta^1 \tag{34}$$

是黏性系数张量．将所有 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_1$ 展开至 θ 和 m 的线性并注意到初始状态为零应力状态，则有

$$\boldsymbol{\sigma}=(\theta-\theta_0)(\boldsymbol{P}_1^1-\boldsymbol{J}_1^1)+(m-m_0)(\boldsymbol{P}_1^2-\boldsymbol{J}_1^2)+(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{J}_2):\varepsilon \tag{35}$$

对于各向同性材料，二阶张量 $\boldsymbol{P}_1^1,\boldsymbol{J}_1^1$ 和 $\boldsymbol{P}_1^2,\boldsymbol{J}_1^2$ 分别对应热膨胀和水膨胀，四阶张量 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 则对应 Lame 系数.

4 湿分扩散和热传导方程

将式 (30) 和 (31) 中的 P_0 和 A_0 展开为

$$P_0 = P_0^0 + P_0^1\theta + P_0^2 m + \frac{1}{2}P_0^{11}\theta^2 + P_0^{12}\theta m + \frac{1}{2}P_0^{22}m^2 \tag{36}$$

$$A_0 = A_0^0 + A_0^1\theta + A_0^2 m \tag{37}$$

由式 (15) 可以得到系统的熵和水的化学势

$$\rho\eta = -(P_0^1 + P_0^{11}\theta + P_0^{12}m + \boldsymbol{P}_1^1 : \boldsymbol{\varepsilon} - J_0^1) \tag{38}$$

$$\rho\mu = P_0^2 + P_0^{12}\theta + P_0^{22}m + \boldsymbol{P}_1^2 : \boldsymbol{\varepsilon} - J_0^2 \tag{39}$$

式中

$$J_0^1 = A_0^1 \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\zeta=1}^{n} \widetilde{\psi}_\alpha^1 \boldsymbol{\Phi}_{\alpha\beta}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_\beta\xi}}{\lambda_\beta}\boldsymbol{\Phi}_{\beta\gamma}^{-1}\tilde{b}_{\gamma\zeta}^{-1}\widetilde{\psi}_\zeta^1 \tag{40}$$

$$J_0^2 = A_0^2 \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\zeta=1}^{n} \widetilde{\psi}_\alpha^1 \boldsymbol{\Phi}_{\alpha\beta}\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_\beta\xi}}{\lambda_\beta}\boldsymbol{\Phi}_{\beta\gamma}^{-1}\tilde{b}_{\gamma\zeta}^{-1}\widetilde{\psi}_\zeta^1 \tag{41}$$

将式 (39) 代入湿分扩散本构方程式 (17) 第 2 式，可得

$$\rho\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}\cdot\left[\left(P_0^{12} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}}\right)\theta\nabla + P_0^{22}m\nabla + \boldsymbol{P}_1^2 : \boldsymbol{\varepsilon}\nabla - J_0^2\nabla\right] \tag{42}$$

上式表明，湿分的扩散不但会由湿分分布的不均匀驱动外，也会受到温度、变形等的不均匀的驱动．将上式代入湿分扩散方程 (20), 可以导出如下计及热传导和变形影响的湿分扩散方程

$$\rho^2\dot{m} = \nabla\cdot\left\{\boldsymbol{F}\cdot\left[\left(P_0^{12} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{F}}\right)\theta\nabla + P_0^{22}m\nabla + \boldsymbol{P}_1^2 : \boldsymbol{\varepsilon}\nabla - J_0^2\nabla\right]\right\} \tag{43}$$

考虑能量守恒方程式 (4), 将 Helmholtz 自由能的定义形式 (9) 代入，在小变形的假设下，当式 (15) 都得到满足时，有

$$-\rho\bar{s}\theta\dot{m} + R_\alpha\dot{\gamma}_\alpha + \rho\theta\dot{\eta} + (\bar{h}\nabla)\cdot\boldsymbol{f} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla = 0 \tag{44}$$

上式中 $\dot{\eta}$ 可以通过式 (15) 第 2 式将自由能代入得到其具体的形式．注意到式 (2) 的湿分守恒方程及化学势定义式 (8) 第 1 式，式 (44) 可化为

$$R_\alpha\dot{\gamma}_\alpha + \rho\theta\dot{\eta} + \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{f} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla + (\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\nabla = 0 \tag{45}$$

将本构方程 (17) 代入上式，略去 $\dot{\gamma}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{z}$ 的二次项，可得计入湿分扩散效应具有黏弹性性质的耦合热传导方程

$$\rho\theta\dot{\eta} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla + (\bar{s}\theta\boldsymbol{f})\cdot\nabla = 0 \tag{46}$$

代入式 (17), (38), 并注意到式 (19), 经整理可得

$$P_0^{11}\dot{\theta} = \frac{1}{\theta}\nabla\cdot[(\boldsymbol{k} - \bar{s}\theta\boldsymbol{L})\cdot\theta\nabla + \theta\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\mu}\nabla] - P_0^{12}\dot{m} - \boldsymbol{P}_1^1 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{J}_0^1 \tag{47}$$

5 结　论

从连续介质不可逆热力学出发，在引入表征材料黏性的内变量的基础上，基于 Helmholtz 自由能，建立了计及热传导、湿分扩散影响的三场耦合的黏弹性本构方程和完整的控制方程体系．为进一步深入研究高分子材料在湿、热环境下的行为建立了理论基础．

参　考　文　献

1 Crank J, Park GS. (Eds.). Diffusion in Polymers. New York: Academic Press, 1968

2 Tay Andrew, Moisture AO. Diffusion and heat transfer in plastic IC packages. *IEEE Transactions on Components Packing and Manufacturing Technology——Part A*, 1996, 19(2): 186～192

3 Kuo Y, Chen WT, et al. Popcorning——a fracture mechanics approach. In: Proc. 46th Electronic Components and Technology Conference. Orlando, FL, USA: Components, Packaging, & Manuf Technol Soc IEEE Electron Ind Assoc. 1996.5. 869～874

4 Nguyen LT, Chen KL, et al. New criterion for package integrity under solder reflow conditions. In: Proceedings —— Electronic Components and Technology Conference, Proceedings of the 1995 45th Electronic Components & Technology Conference, 1995, 05, 21～24, Las Vegas, NV, USA: NJ, IEEE, Piscataway, USA, 1995

5 Brewis DM, Comyn J, Cope BC, Moloney AC. Effect of carrier on the performance of aluminum alloy joints bonded with a structural film adhesive. *Polymer Engineering and Science*, 1981, 21: 797～803

6 Noland JS. Adhesion science and technology. New York: Plenum Press, 1975

7 Cognard J. Influence of water on the cleavage of adhesive joints. *Int J Adhesion and Adhesives*, 1988, 8(2): 93～99

8 Neve B De, Shanahan MER. Water absorption by an epoxy resin and its effect on the mechanical properties and infra-red spectra. *Polymer*, 1993, 34: 5099～5105

9 Browning Charles E. Mechanisms of elevated temperature property losses in high performance structural epoxy resin matrix materials after exposure to high humidity environments. *Poly Eng & Sci J*, 1978, 18(1): 16～24

10 Nicolais L, Apicella A, Drioli E. Effect of applied stress, thermal environment and water in epoxy resins. AFOSR-TR-82-0215, 1980

11 Henson MC, Weitsman Y. Stress effects on moisture transport in an epoxy resin and its composite. In: Proc. 3rd Japan-US Conference on Composites, Tokyo, Japan: Japan Society for Composite Materials. 1986.6. 775～783

12 Biot MA. Thermoelasticity and irreversible thermodynamic. *J Appl Phy*, 1989, 27: 41～62

13 Weitsman Y. Stress assisted diffusion in elastic and viscoelastic materials. *J Mech Phys Solids*, 1987, 35: 73～93

14 Weitsman Y. A Continuum diffusion model for viscoelastic materials. *J Phy Chem*, 1990, 94(2): 961～968

15 Pecht Michael, Haslach Henry Jr W. A viscoelastic constitutive model for constant rate loading at different relative humidities. *Mechanics of Materials*, 1991, 11: 337～345

16 王嘉弟．物质本构理论．成都：成都科技大学出版社， 1995 (Wang Jiadi. Material Constitutive Theory. Chengdu: Chengdu University of Science and Technology Press, 1995 (in Chinese))

17 曾丹苓．工程非平衡热动力学．北京：科学出版社， 1991 (Zeng Danling. Engineering Non-Equilibrium Thermal Dynamics. Beijing: Science Press, 1991 (in Chinese))

18 Schapery RA. Application of thermodynamics to thermomechanical fracture and birefringent phenomena in viscoelastic media. *J Appl Phys*, 1964, 35: 1451～1465

19 Schapery RA. A theory of nonlinear thermoviscoelasticity based on irreversible thermodynamics. In: Proc 5th US Natl Cong Appl Mech, 1966. 511～530

20 Hochstadt H. Differential Equations: A Modern Approach. New York: Dover Publications, 1975, c1964

COUPLED VISCOELASTIC CONSTITUTIVE RELATIONS INVOLVING THERMAL EFFECT AND MOISTURE DIFFUSION PROCESS [1)]

Wang Jun Yang Fan Chen Dapeng
(*Institute of Computational Engineering and Science, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

Abstract In recent years, the failure caused by moisture and heat was often observed in hydrophilic polymer structures, such as plastic packages and adhesive joints etc. It was found that moisture diffusion, heat conduction and mechanical response in polymers are coupled and affected each other. It is necessary to develop a set of full coupling constitutive relations to model the viscoelasticity and hydrophilicity of polymers. In this paper, the constitutive equations of the coupling problem, which involve effects of heat and moisture, have been developed on the basis of continuum thermodynamics in virtue of Helmholtz free energy. In this development, a group of internal variables is introduced to characterize the viscous behaviors of polymers. The work presents a fundamental framework to analyze the coupling problems due to heat and moisture transmit into viscoelastic materials.

Key words coupling effect, constitutive relations, moisture diffusion, heat conduction, viscoelasticity

Received 21 June 2001, revised 20 November 2001.
1) The project supported by the Foundation of Southwest Jiaotong University.