

## $Pr$ 数对湍流被动标量输运的影响<sup>1)</sup>

周海兵 崔桂香 张兆顺

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

L. Shao

(Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics, Ecole Centrale de Lyon, France)

**摘要** 采用直接数值模拟的方法, 研究分子  $Pr$  数对湍流被动标量输运的影响, 并提供充分的证据证明, 湍流  $Pr$  数明显依赖于分子  $Pr$  数. 在算例中, 湍流雷诺平均  $Pr_T$  数与分子  $Pr$  数的倒数呈线性关系; 湍流亚格子  $Pr_t$  数与分子  $Pr$  数的关系较为复杂, 在分子  $Pr$  数为 1 附近时, 湍流亚格子  $Pr_t$  数出现极小值.

**关键词** 湍流, 被动标量,  $Pr$  数, 雷诺平均, 亚格子模式

### 引 言

标量湍流的研究是当前的一个热点 (Warhaft<sup>[1]</sup>). 目前被动标量的研究主要有以下几个方面: (1) 研究被动标量的小尺度统计特性, 例如脉动标量的耗散研究 (Michel Gonzalez<sup>[2]</sup>, Prakash Vedula<sup>[3]</sup>), 它是标量的 Lagrangian 谱松弛模型的基础; (2) 标量局部特性的研究, 如被动标量的典型结构及其演化; (3) 标量湍流输运性质的研究, 这方面对工程预测模型有指导意义, 例如雷诺平均的标量通量和大涡模拟的亚格子标量通量的模式. 本文主要研究  $Pr$  数对标量通量的影响.

现有标量通量模式都采用湍流  $Pr$  数的形式, 除了谱空间封闭的模式, 都假定湍流普朗特数为常数. 从理论分析可以定性地判断, 不同的分子  $Pr$  数, 标量的扩散能力不同, 发展规律有明显差别, 标量湍流表现出不同的性质. 因此, 研究不同分子  $Pr$  数下, 湍流标量输运问题, 一方面, 可以更深入的研究标量输运本身; 另一方面, 在考虑标量通量的亚格子模式上也有重要意义. P. K. Yeung 等人<sup>[4]</sup> 对高  $Pr$  数问题的数值模拟做了研究, 在  $256^3$  的规模下完成了泰勒雷诺数为 38, 分子  $Pr$  数分别为 0.25, 1.0 和 4.0 的直接数值模拟, 初步研究了能谱和传输谱的性质. 但是缺少对其算例中不同  $Pr$  数的分析. A. R. Kerstein<sup>[5]</sup> 针对不同分子  $Pr$  数, 研究标量能谱的特性. Moin<sup>[6]</sup> 研究了湍流普朗特数的规律, 在均匀剪切流中, 在 3 种分子  $Pr$  数下 ( $Pr$  为 0.2, 0.7, 2.0), 应用动力模式的思想, 得到湍流亚格子普朗特数随时间的演化, 认为在粗网格下, 湍流亚格子普朗特数和湍流雷诺平均普朗特数接近一致, 都在 0.8~0.9 之间.

湍流亚格子普朗特数的研究, 将对被动标量的大涡模拟产生重要影响. 但是, 已有的研究结果, 没有深入分析不同分子  $Pr$  数对湍流普朗特数的影响. 从 Moin 的结果看, 不同分子  $Pr$  数下, 湍流亚格子普朗特数有一定的分布, 而且在不同的滤波尺度下, 湍流亚格子普朗特数的分散程度不同. 对于这种差别的原因 Moin 等人没有阐述. 因此, 我们将研究不同分子  $Pr$  数

2001-06-21 收到第一稿, 2001-11-26 收到修改稿.

1) 清华大学基础研究基金、中法实验室 (LIAMA) 和探索 108 集群计算机应用基金的资助项目.

下, 湍流亚格子普朗特数 (下文用  $Pr_t$  数表示) 和湍流雷诺平均普朗特数 (下文用  $Pr_T$  数表示) 的规律, 特别是湍流亚格子普朗特数随分子  $Pr$  数变化的原因. 我们将利用 DNS 数据库, 应用多种方法说明不同分子  $Pr$  数下, 湍流普朗特数的变化规律.

## 1 数值计算方法

### 1.1 数值方法

我们对不可压缩流体夹带被动标量进行了直接数值模拟. 湍流场为均匀各向同性, 标量场具有平均梯度 (在  $x_3$  方向保持恒定的平均梯度), 平均梯度值为  $-5$ . 具有平均标量梯度的标量场, 在均匀各向同性的湍流场中, 其标量输运由平均标量的常数梯度引起, 脉动标量场也是空间均匀的.

不可压缩牛顿流体的流动满足 Navier-Stokes 方程, 被动标量满足其输运方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

其中,  $x_i$  为物理空间坐标,  $u_i$  为速度分量,  $p$  为压力,  $\theta$  为被动标量,  $\nu$  为分子运动黏性系数,  $\kappa$  为标量分子扩散系数,  $\rho$  为流体的密度,  $f_i$  为质量力. 在均匀湍流场中, 可以采用 box 湍流模型, 在 3 个方向物理量都是周期条件, 于是可以采用谱方法数值求解控制方程. 各向同性均匀速度的初始场, 由 Von-Karman 能谱和连续方程随机生成; 在湍流场充分发展后, 按给定的能谱生成标量初始场. 时间方向推进, 采用二阶 Runge-Kutta 法. 利用伪谱法计算非线性项. 压力场的求解是直接求解压力 Poisson 方程.

详细的计算方法与文献 [7] 相同, 本文不再重复.

### 1.2 算例简介

对于脉动速度场, 我们分别计算了无外力的衰减均匀湍流场和有强迫力的平稳均匀湍流场两种情况, 衰减速度场的统计特性有实验结果可以对比, 以检验算法的准确性; 强迫湍流场可以得到多样本的统计结果. 我们选择分子  $Pr$  数分别为 0.1, 1.0 和 3.0 进行了模拟, 为了能够更加准确地反映  $Pr_t$  数或  $Pr_T$  数随  $Pr$  数变化的规律, 我们对算例 B 增加了 3 个分子  $Pr$  数的情况, 分别是 0.5, 0.8 和 1.2. 表 1 为 A, B, C, D 4 个算例的参数.

表 1 数值模拟的基本参数

Table 1 Basic parameters of the numerical simulations

Case	Case A	Case B	Case C	Case D
Aliasing errors removed	yes	yes	no	no
Grid	$128^3$	$128^3$	$256^3$	$256^3$
Velocity	damp	forcing	damp	forcing
$Re_\lambda$	18	30	23	50

对于速度场衰减的算例, 泰勒  $Re$  数都是随时间变化的, 表 1 中列出的是初始时刻的值, 而对于速度场强迫的算例, 表 1 中列出了达到平稳态后泰勒  $Re$  数的值. 表 1 中泰勒  $Re$  数为  $Re_\lambda = U\lambda/\nu$ , 其中泰勒尺度  $\lambda = \sqrt{10\nu(k/\epsilon)}$ , 速度尺度  $U = \sqrt{2k/3}$ ,  $k$  和  $\epsilon$  分别为湍动能和湍动能耗散率.

对于衰减湍流场, 我们检验了纵向脉动和横向脉动的衰减率, 分别为 1.28 和 1.22, 它们和已有实验 (Sirivat<sup>[8]</sup>) 结果一致. 我们还检查了速度脉动和标量脉动的时间尺度比, 也和实验结果相符.

## 2 结果及讨论

### 2.1 湍流雷诺平均 $Pr_T$ 数

在工程应用的模式中, 常用湍流  $Pr_T$  数来计算标量通量,  $Pr_T = \nu_T/\kappa_T$ . 我们用直接数值模拟的结果来考察不同  $Pr$  数下,  $Pr_T$  数的性质.

针对均匀各向同性湍流场的特点, 我们采用  $k-\epsilon$  模式的方法确定涡黏性系数:  $\nu_T = C_\mu k^2/\epsilon$ , 其中模式常数  $C_\mu = 0.09$ . 根据等梯度标量场的特点, 涡扩散系数采用下式:  $\kappa_T = \langle u_3\theta \rangle/G$ , 其中  $G$  为平均标量梯度,  $G = \partial\theta/\partial x_3$ ,  $\theta$  为平均标量,  $\theta$  为脉动标量,  $u_i$  为脉动速度分量. 于是湍流  $Pr_T$  数为:  $Pr_T = \frac{\nu_T}{\kappa_T} = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{G}{\langle u_3\theta \rangle}$ .

图 1, 图 2 和图 3 分别为 3 种湍流场的湍流  $Pr_T$  数随分子  $Pr$  数的变化. 我们发现当采用分子  $Pr$  数的倒数作为自变量时, 湍流  $Pr_T$  数表现出很好的线性, 拟合直线如表 2.

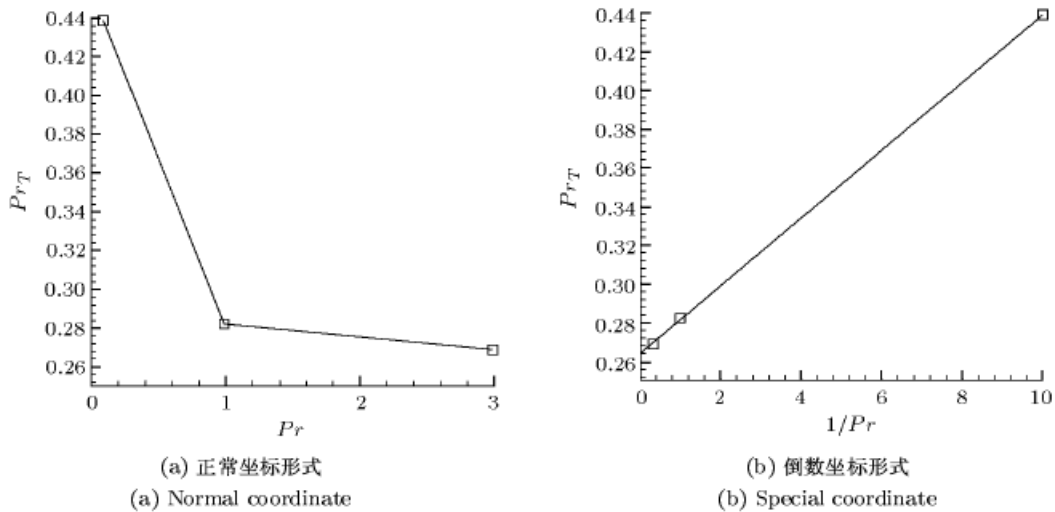


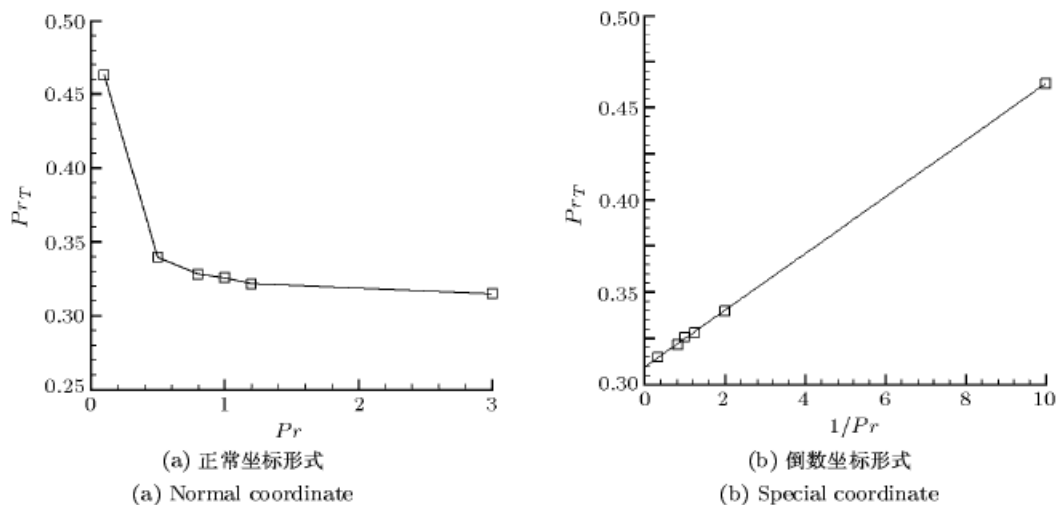
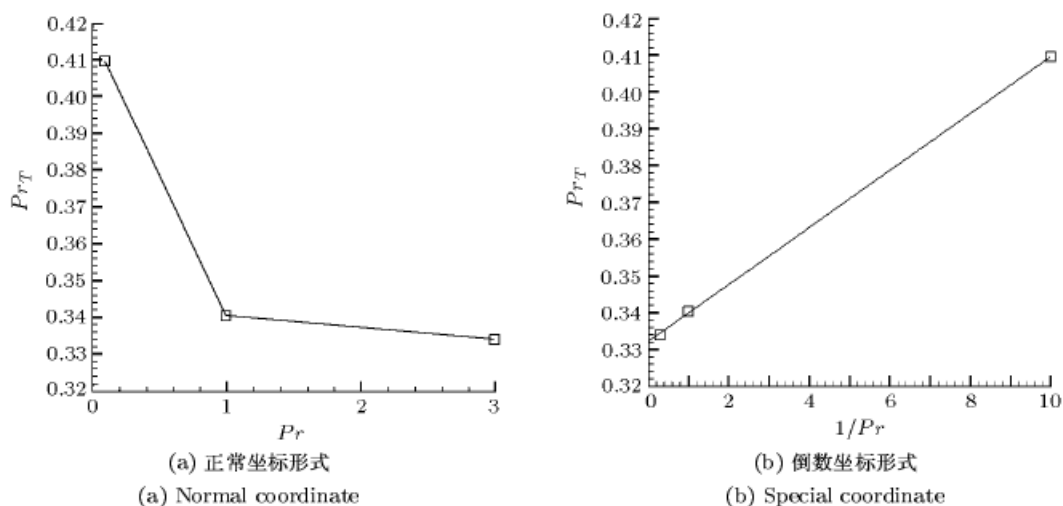
图 1 不同  $Pr$  下的  $Pr_T$  数 (算例 A)

Fig.1  $Pr_T$  number with different  $Pr$  number (Case A)

表 2 不同泰勒雷诺数下  $Pr_T$  数的拟和公式

Table 2 Approximate equation of  $Pr_T$  number with different  $Re_\lambda$  number

$Re_\lambda$	Approximate equation
19.5(case A)	$Pr_T = 0.264 + 0.0175/Pr$
30.0(case B)	$Pr_T = 0.309 + 0.0154/Pr$
50.0(case D)	$Pr_T = 0.332 + 0.0077/Pr$

图 2 不同  $Pr$  下的  $Pr_T$  数 (算例 B)Fig.2  $Pr_T$  number with different  $Pr$  number(case B)图 3 不同  $Pr$  下的  $Pr_T$  数 (算例 D)Fig.3  $Pr_T$  number with different  $Pr$  number(case D)

由拟合结果表明, 标量的湍流输运特性和湍流雷诺数有关, 一般情况下, 可以写成

$$Pr_T = A(Re) + \frac{B(Re)}{Pr} \quad (4)$$

系数  $A, B$  对  $Re$  数的依赖比较小. 有关雷诺数和拟合直线的关系还要进一步研究, 但是从拟合公式本身, 说明了对于不同分子  $Pr$  数, 湍流  $Pr_T$  数是有明显差别的, 在  $Pr < 1.0$  时,  $Pr_T$  数随分子  $Pr$  数变化较大; 而在  $Pr > 1.0$  时,  $Pr_T$  数随分子  $Pr$  数变化较小. 这说明我们在研究  $Pr_T$  数的变化规律时, 研究的重点应放在  $Pr \ll 1.0$  的流动介质上.

## 2.2 应用动力模式计算湍流亚格子 $Pr_t$ 数

计算湍流亚格子  $Pr_t$  数时, 应用动力模式, 采用最小二乘法, 求动力模式系数. 涡黏性系

数为:  $\nu_t = C\Delta_1^2|\hat{S}|$ , 其中  $C = -L_{ij}M_{ij}/(2\Delta_1^2M_{ij}M_{ij})$ ,  $M_{ij} = \alpha^2|\hat{S}|\overline{\hat{S}_{ij}} - |\hat{S}|\overline{\hat{S}_{ij}}$ ,  $|\hat{S}| = (2\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij})^{1/2}$ ,  $|\overline{\hat{S}}| = (2\overline{\hat{S}_{ij}}\overline{\hat{S}_{ij}})^{1/2}$ ,  $L_{ij} = (\overline{\hat{u}_i\hat{u}_j} - \overline{\hat{u}_i}\overline{\hat{u}_j}) - [\delta_{ij}(\overline{\hat{u}_k\hat{u}_k} - \overline{\hat{u}_k}\overline{\hat{u}_k})]/3$ ,  $\hat{\bullet}$  和  $\overline{\bullet}$  分别表示物理量的一次滤波和二次滤波,  $S_{ij}$  为速度应变率,  $\alpha = \Delta_2/\Delta_1$ ,  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  分别表示两次滤波尺度, 取  $\alpha = 2$ . 涡扩散系数为:  $\kappa_t = D\Delta_1^2|\hat{S}|$ , 其中  $D = -L_jM_j/(\Delta_1^2M_jM_j)$ ,  $M_j = \alpha^2|\hat{S}|\overline{\hat{R}_j} - |\hat{S}|\overline{\hat{R}_j}$ ,  $R_j$  为标量梯度,  $L_j = (\overline{\hat{u}_i\hat{\theta}} - \overline{\hat{u}_i}\overline{\hat{\theta}})$ . 于是湍流亚格子  $Pr_t$  数为  $Pr_t = \frac{\nu_t}{\kappa_t} = \langle C \rangle / \langle D \rangle$ .

计算结果发现, 分子  $Pr$  数在 1.0 附近时 (此时标量场的耗散尺度与速度场的耗散尺度最为接近),  $Pr_t$  数出现极小值 (如图 4 所示). 在 Moin 的文章中, 在 3 种分子  $Pr$  数下 ( $Pr$  为 0.2, 0.7, 2.0), 也是分子  $Pr$  数为 0.7 所对应的湍流亚格子  $Pr_t$  数最小. 在不同雷诺数下,  $Pr_t$  数随分子  $Pr$  数的演化具有相同的规律, 所以我们可以得出结论,  $Pr_t$  数在分子  $Pr$  数为 1.0 附近取得极小值是被动标量输运的特性之一.

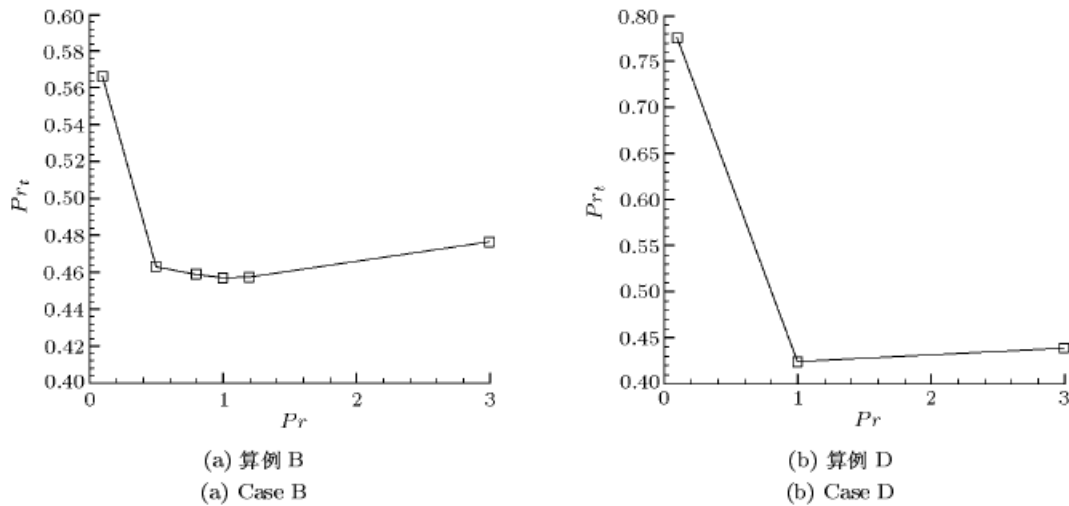


图 4 不同  $Pr$  下的  $Pr_t$  数

Fig.4  $Pr_t$  number with different  $Pr$  number

我们可以从标量输运的物理过程来解释在  $Pr=1.0$  附近,  $Pr_t$  数具有极小值的性质. 在动力模式中, 根据  $Pr_t$  数的定义, 我们可以将  $Pr_t$  数估计为

$$Pr_t \propto \langle M_j M_j \rangle / \langle L_j M_j \rangle \tag{5}$$

其中  $L_j = (\overline{\hat{u}_i\hat{\theta}} - \overline{\hat{u}_i}\overline{\hat{\theta}})$  表示两次滤波中标量通量的差, 由小尺度决定; 而  $M_j = \alpha^2|\hat{S}|\overline{\hat{R}_j} - |\hat{S}|\overline{\hat{R}_j}$ , 可以改写为  $M_j = (\alpha^2 - 1)|\hat{S}|\overline{\hat{R}_j} + (|\hat{S}|\overline{\hat{R}_j} - |\hat{S}|\overline{\hat{R}_j})$ , 对于  $\alpha$  大于 1 的情况下, 第一项起主要作用, 说明它由大尺度湍流决定.

我们发现标量耗散在不同的分子  $Pr$  数下, 具有相似的特点. 图 5 为不同  $Pr$  数下的标量耗散的等值线图. 在 Vedula et al.<sup>[3]</sup> 的论文中也发现类似的现象. 耗散作用是小尺度的作用. 图 5 说明标量的小尺度统计量与  $Pr$  数的关系较小.  $L_j$  反映的就是小尺度的作用, 则它依赖  $Pr$  数的程度较小. 而  $M_j$  反映的大尺度的作用, 与  $Pr$  数的关系密切. 图 6 绘出  $M_j M_j$ ,  $L_j M_j$  随  $Pr$  数变化的规律, 不难看到  $M_j M_j$  变化显著, 而  $L_j M_j$  的斜率则要小得多, 这就进一步证实

我们的推测. 从  $M_j M_j, L_j M_j$  斜率变化的特征, 用简单的数学推理可以说明在  $Pr=1.0$  附近,  $Pr_t$  会出现极值.

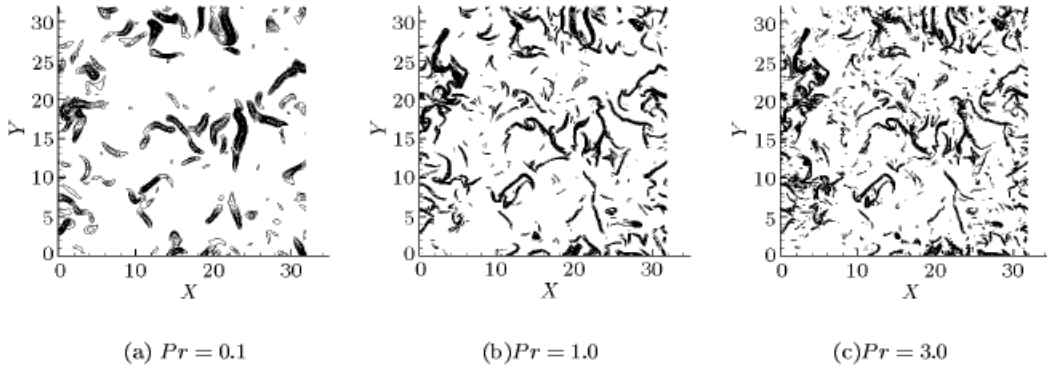


图 5 标量耗散的等值线(算例 D)

Fig.5 Iso-contours of scalar dissipation(case D)

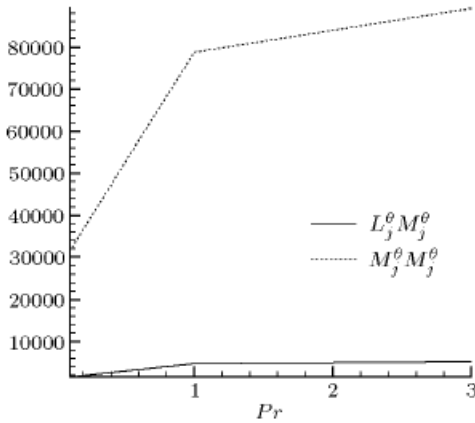


图 6 不同  $Pr$  下  $Pr_t$  数表达式中两项的变化  
Fig.6 Two terms in  $Pr_t$  number with different  $Pr$  number

我们还可以利用标量谱的传输方程 (6)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\nu}{Pr}k^2\right)E_\theta(k) = T_\theta(k) + A\theta^*w \quad (6)$$

来进一步说明  $Pr_t-Pr$  关系的机制. 式中  $\theta, w$  分别表示标量谱和  $z$  方向脉动速度谱,  $E_\theta(k)$  是标量脉动的能谱,  $T_\theta(k)$  是标量脉动的传输谱, “\*”表示复共轭. 式 (7) 是式 (6) 在谱空间中经过低通过滤后, 得到的大涡模拟方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t}\right)k^2\right]E_\theta^<(k) = T_\theta^<(k) + A\theta^{*<}w^< \quad (7)$$

其中  $2\frac{\nu_t}{Pr_t}k^2E_\theta^< = -(T_\theta - T_\theta^<) = -T_\theta^>$

$$T_\theta(\mathbf{k}) = \text{Im}\left[\theta^*(\mathbf{k})k_j \int u_j(\mathbf{p})\theta(\mathbf{k}-\mathbf{p})d\mathbf{p}\right] \quad (8)$$

$$T_\theta^<(\mathbf{k}) = \begin{cases} T_\theta(\mathbf{k}), & |\mathbf{k}|, |\mathbf{p}|, |\mathbf{k}-\mathbf{p}| < k_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

图 7 分别为  $128^3$  和  $256^3$  的算例的结果, 两个算例表现出了相同的特性. 在小于截断波数的范围内,  $T_\theta^>(k)$  的幅值随  $Pr$  数的增加而增大, 即可解尺度对亚格子尺度的能量传输作用随  $Pr$  数的增加而增大, 因而要引入耗散机制, 将这部分能量耗散掉.

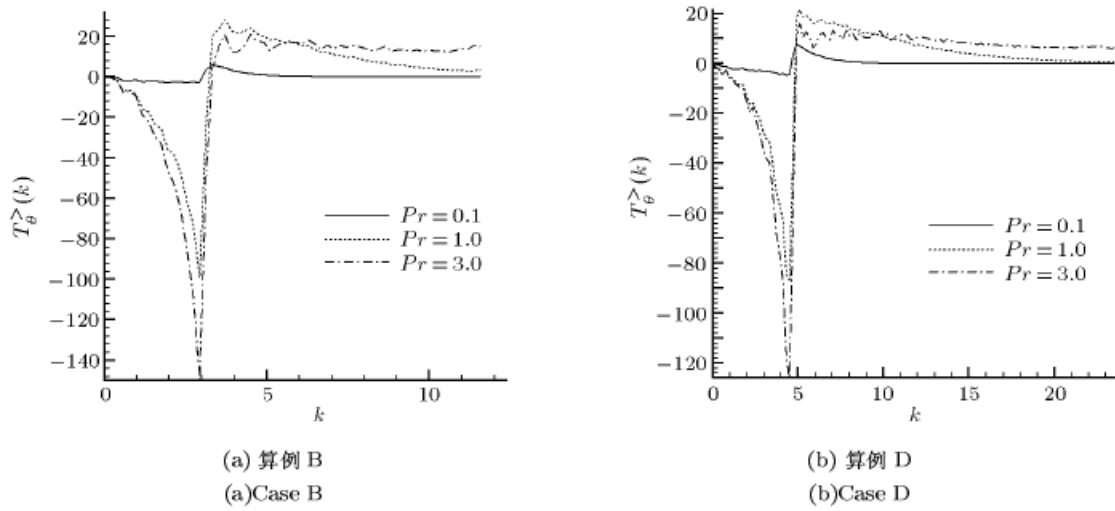


图 7 标量亚格子传输谱

Fig.7 Scalar subgrid transfer spectrum

为了估计从可解尺度到亚格子尺度上的标量通量总传输量, 我们将传输谱积分, 得到

$$\Pi_\theta = \int T_\theta(k)dk \tag{10}$$

$$\Pi_\theta^\gt = \int T_\theta^\gt(k)dk \tag{11}$$

$\Pi_\theta$  是标量能量的产生率,  $\Pi_\theta^\gt$  是标量亚格子部分的能量的产生率.

从图 8 中可以看到, 在  $Pr$  数为 1 处, 亚格子标量能量的产生率最大. 这种亚格子尺度能量产生率的变化, 是导致亚格子  $Pr_t$  数在  $Pr = 1.0$  处出现极值的原因.

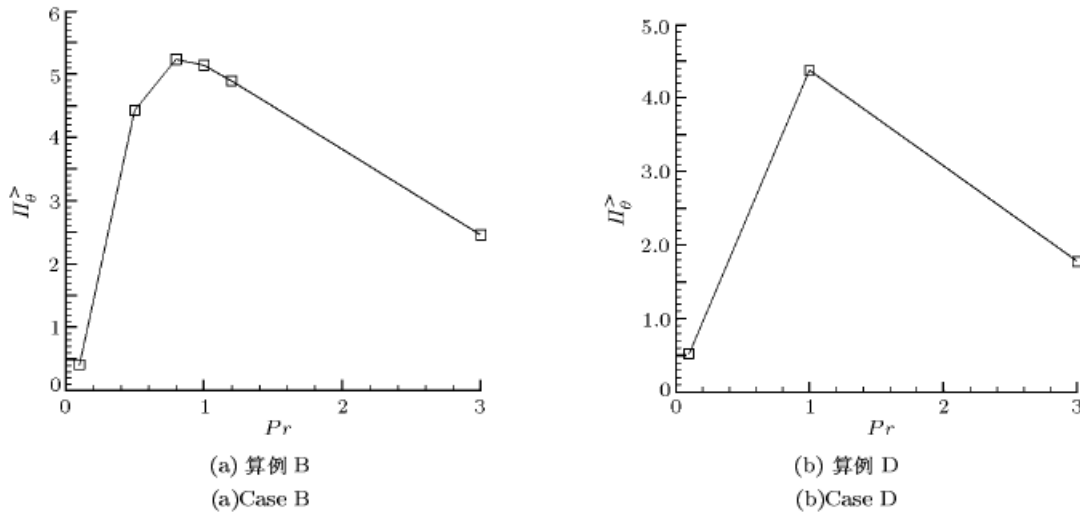


图 8 标量亚格子能量产生率

Fig.8 Ratio of scalar subgrid energy production

### 3 结 论

本文研究了分子  $Pr$  数对湍流标量输运的影响, 重点分析了不同分子  $Pr$  数下  $Pr_T$  数和  $Pr_t$  数的变化规律. 结果表明对于湍流雷诺平均  $Pr_T$  数, 与分子  $Pr$  数的倒数呈线性关系, 湍流雷诺平均  $Pr_T$  数与雷诺数的关系要进一步研究; 应用动力模式计算湍流亚格子  $Pr_t$  数, 其与分子  $Pr$  数的关系较为复杂, 在分子  $Pr$  数为 1 附近时, 湍流亚格子  $Pr_t$  数出现极小值. 亚格子  $Pr_t$  数的复杂行为与亚格子尺度的能量产生率在  $Pr$  数为 1 附近出现极值对应.

### 参 考 文 献

- 1 Warhaft Z. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, 32: 203~240
- 2 Michel Gonzalez. Study of the anisotropy of a passive scalar field at the level of dissipation. *Physics of Fluids*, 2000, 12(9): 2302~2310
- 3 Vedula P, Yeung PK, Fox RO. Dynamics of scalar dissipation in isotropic turbulence: a numerical and modeling study. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, 433: 29~60
- 4 Yeung PK, Michelle CS, Prakash Vedula. Direct numerical simulation of differential diffusion with Schmidt numbers up to 4.0. *Physics of Fluids*, 2000, 12(6): 1601~1604
- 5 Kerstein AR, Cremer MA, McMurtry PA. Scaling properties of differential molecular diffusion effects in turbulence. *Physics of Fluids*, 1995, 7(8): 1999~2007
- 6 Moin P, Squires K, Cabot W, et al. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A*, 1991, 3(11): 2746~2757
- 7 Cui Guixiang, Chen Yuguang, Zhang Zhaoshun, et al. Transportation of passive scalar in inhomogeneous turbulence. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 16(1):21~28
- 8 Sirivat A, Warhaft Z. The effect of a passive cross-stream temperature gradient on the evolution of temperature variance and heat flux in grid turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, 128: 323~346



## THE EFFECT OF TRANSPORTATION OF PASSIVE SCALAR IN THE HOMOGENEOUS TURBULENCE WITH DIFFERENT MOLECULAR PRANDTL NUMBERS<sup>1)</sup>

Zhou Haibing Cui Guixiang Zhang Zhaoshun

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

L. Shao

(*Laboratory of Fluid Mechanics and Acoustics, Ecole Centrale de Lyon, France*)

**Abstract** This paper studies the transportation of passive scalar in statistically stationary isotropic turbulence with different molecular Prandtl numbers by direct numerical simulation (DNS). The mean gradient of scalar is constant. Two cases of grid resolution are computed, i.e.  $128^3$  and  $256^3$  with several Taylor-scale Reynolds numbers respectively in order to see the Reynolds number effect. The molecular Prandtl numbers are given at 0.1, 0.5, 0.8, 1.0, 1.2 and 3.0. The results of DNS are in good agreement with available experimental data, including the decay of the longitudinal variance and cross-stream variance, the ratio of velocity to scalar timescale, etc. This paper provides sound evidence that the turbulence Prandtl number depends on molecular Prandtl number. The turbulence Prandtl number  $Pr_T$  varies linearly with the reciprocal of molecular Prandtl number in Reynolds average. So the study on the turbulent Prandtl number is particularly important for lower molecular Prandtl number. We applied dynamic procedure to obtain subgrid Prandtl number in large eddy simulation. The relationship between subgrid-scale turbulence Prandtl number  $Pr_t$  and molecular Prandtl number is more complicated, the minimum  $Pr_t$  occurs around  $Pr = 1.0$ . The paper investigates the reason for the minimum of subgrid Prandtl number. The statistical quantities dominated by small scale turbulence are weakly dependent on the molecular Prandtl number, but it is of stronger dependence on the molecular Prandtl number for the quantities dominant by great scale turbulence. Based on the analysis of transfer spectrum of scalar flux the appearance of minimum subgrid Prandtl number around  $Pr = 1$  can be well understood. The production of subgrid scalar flux clearly shows a maximum of around  $Pr = 1.0$ . This is the further explanation of why the subgrid Prandtl number takes a minimum around  $Pr=1.0$ .

**Key words** turbulence, passive scalar,  $Pr$  number, Reynolds average, subgrid-scale model

---

Received 21 June 2001, revised 26 November 2001.

1) The project supported by the Fundamental Research Foundation of Tsinghua University, Sino-French Laboratory (LIAMA) and Application Foundation of TANSUO 108 Cluster.