

缺陷孔对平面裂纹应力强度因子的影响¹⁾

王元丰 蒲军平

(北方交通大学土建学院, 北京 100044)

摘要 带有裂纹和缺陷孔洞的板的问题是一个多连域的边值问题, 这类问题适合用边界元法所具有的高精度特性来求解. 采用子域边界元法, 在平面应变的条件下对存在中心裂纹的平板受远处拉伸和剪切载荷的作用进行了数值分析. 研究了圆形孔洞对 I 型和 II 型应力强度因子的影响, 与有限元法进行了对比, 求解结果更加精确. 计算了椭圆形孔对 I 型应力强度因子的影响, 得到了一些有意义的结果, 并对移动接触弹性体作用下的带裂纹板进行了钻孔研究.

关键词 边界元法, 裂纹, 缺陷孔, 接触力学

引 言

结构材料中有时存在如裂纹一样的缺陷, 它们将影响结构的整体承载能力、缩短结构的使用寿命. 因此, 有必要对裂纹的扩展加以控制以提高带裂纹结构残余强度及其使用年限. 为了控制裂纹生长, 已使用了一些可行的方法^[1~4]. 在裂纹前端钻孔来降低应力强度因子以阻止裂纹的进一步扩展也是常用的一种方法, 文献 [5] 通过实验研究对此给予了验证. 带有裂纹和孔洞的板的问题是一个多连域的边值问题, 它适合用边界元法所具有的高精度特性来求解. 本文采用子域边界元法^[6], 研究了圆形孔洞对 I 型和 II 型应力强度因子的影响, 与有限元等方法进行了对比, 得到了更高的求解精度.

1 计算裂纹的子域边界元法公式

子域法是对不同的子域分别建立边界积分方程, 通过内部共有边界上的位移协调条件和面力平衡条件建立总方程组, 然后代入外部的指定边界条件加以求解. 对于各子域 Ω^i (图 1) 当不考虑体力时可建立边界积分方程的矩阵形式

$$H^i U^i = G^i T^i; \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

其中, U^i 和 T^i 分别为位移和面力矢量; H^i 和 G^i 为系数矩阵. 令

$$A^i = (G^i)^{-1} H^i$$

可将 (1) 式写成

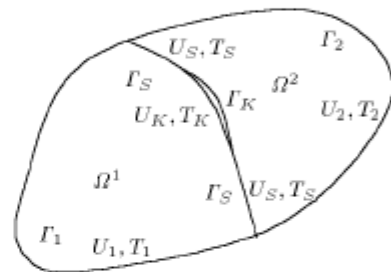


图 1 子域界面上有裂纹

Fig.1 Crack on the interface of subregion

$$A^i U^i = T^i; \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

对每个子域写出 (2) 式的展开形式为

$$\begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_K^1 \\ U_S^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_K^1 \\ T_S^1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 \\ A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_S^2 \\ U_K^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_S^2 \\ T_K^2 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中, U_S^i 和 T_S^i ($i = 1, 2$) 分别为子域连接界面上的位移和面力; U_K^i 和 T_K^i ($i = 1, 2$) 分别为子域边界的裂纹面上的位移和面力. U_S^i 和 T_S^i 应满足下面的位移协调和面力平衡条件

$$U_S^1 = U_S^2 = U_S \quad (5)$$

2001-07-26 收到第一稿, 2001-12-31 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19902001) 和国家优秀青年教师基金 (人教司 2001-39) NJTU(PD-157) 资助.

$$T_S^1 = -T_S^2 \quad (6)$$

将方程 (3) 的第 3 行和式 (4) 的第 1 行相加, 并将式 (5) 和式 (6) 代入, 得

$$A_{31}^1 U_1^1 + A_{32}^1 U_k^1 + (A_{33}^1 + A_{11}^2) U_S + A_{12}^2 U_k^2 + A_{13}^2 U_2^2 = 0 \quad (7)$$

将式 (3) 的第 1 行和第 2 行, 式 (4) 的第 2,3 行和式 (7) 组装成系统求解方程如下

$$\begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & 0 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 \\ 0 & 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 \\ 0 & 0 & A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_k^1 \\ U_S \\ U_k^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1^1 \\ T_k^1 \\ T_S \\ T_k^2 \\ T_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

如果是张开型裂纹, 则在裂纹面上按指定面力条件处理, 即 $T_k^i \equiv 0 (i = 1, 2)$; 如果是闭合型裂纹, 需在式 (8) 中加入裂纹面上的接触表面条件系数矩阵^[7]进行接触迭代计算. 当板上作用的不是固定载荷而是一个移动接触的弹性体时, 其移动接触下的计算方法可参阅文献 [8].

2 带裂纹的板上作用着固定载荷的数值计算

使用子域边界元法对远处受拉伸和剪切载荷作用的含中心裂纹的无限大板分别进行了计算, 在裂

纹的两端各钻了两个圆孔, 即 $d = b = r$ (见图 2). 计算所取的材料特性常数及几何参数为: 弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, 波松比 $\nu = 0.3$, 裂纹半长 $a = 100 \text{ mm}$, w/a 及 L/a 均为 10, 作用在远处的拉伸及剪切应力 σ_0 及 τ_0 均为 100 N/mm^2 , 沿板及孔的外部边界及子域和裂纹边界共取 360 个线性单元, 钻孔的半径分别取为 5 mm, 16 mm 和 25 mm 3 种情况进行了计算. 首先在裂纹的对称两侧取 $r = 16 \text{ mm}$ 的 4 个钻孔进行分析, 钻孔中心到裂纹面的垂直距离保持不变 $y_0/a = 0.6$, 沿裂纹面水平方向的位置发生变化. 对于 I 型加载的情况, 计算所得的应力强度因子分别与用于表示能量释放率的 J 积分的求值结果^[9]、修改的裂纹闭合回路积分方法 (MCCI) 求值结果^[10]及有限元交替法 (FEAM) 的求值结果^[11]进行了比较, 见表 1.

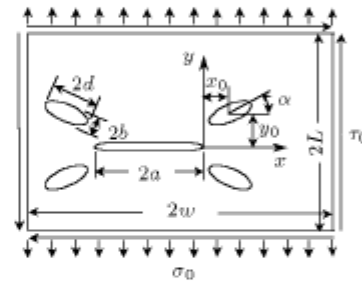


图 2 含裂纹与缺陷板受拉伸和剪切作用
Fig.2 Plane with crack and defects subjected to tensile and shear load

表 1 I 型加载时与各种方法的精度比较

Table 1 Precision compare of various methods on mode I loading

Location x_0/a	K_I/K_I^0				Error %		
	$y_0/a = 0.6$	BEM	J Integral	MCCI	FEAM	J Integral	MCCI
-1.0	0.9982	1.0141	1.0199	1.0003	1.57	2.13	0.21
-0.7	0.9861	1.0007	1.0063	0.9878	1.46	2.00	0.17
-0.6	0.9751	0.9869	0.9947	0.9776	1.19	1.97	0.25
-0.4	0.9394	0.9509	0.9576	0.9430	1.21	1.90	0.38
-0.2	0.9131	0.9217	0.9318	0.9142	0.93	2.01	0.12
0.0	0.9634	0.9719	0.9792	0.9478	0.87	1.61	1.65
0.2	1.0530	1.0679	1.0696	1.0350	1.39	1.55	1.74
0.4	1.0842	1.1044	1.1078	1.0801	1.83	2.13	0.38
0.6	1.0717	1.0921	1.0977	1.0761	1.87	2.37	0.41

由计算可知, 正则应力强度因子 K_I/K_I^0 与 J 积分法求值的偏差 $< 2\%$, 与 MCCI 法计算结果的偏差 $< 2.5\%$, 与 FEAM 法计算结果的偏差 $< 2\%$. 通过在拉伸载荷作用时的钻孔位置和孔尺寸对应力强度因子的影响进行计算, 得到不同尺寸的钻孔保持

$y_0/a = 0.6$ 时的应力强度因子变化情况见图 3. 由图 3 清楚可见, 当在距离裂纹中心 80% 的半裂纹长处钻孔时, 可使应力强度因子降至最低, 这个位置对不同尺寸的钻孔都是相同的. 随着钻孔尺寸的增大, 可进一步降低应力强度因子的大小. 当然, 如果钻孔位

置布置不当也会进一步增大应力强度因子. 从图中还可观察到两个点 M 和 N , 即在 $x_0/a = -1.0$ 和 $x_0/a = 0.08$ 处, 所有钻孔的应力强度因子变化曲线都要经过这里, 钻孔尺寸的大小对裂纹没有影响. 根据图 3 所得到的结果, 在 $x_0/a = -0.2$ 处开孔是降低 I 型应力强度因子的最佳位置. 现在 $y_0/a = 0.6$ 处开出 4 个椭圆孔进行 I 型加载, 椭圆长轴 $d = 16\text{mm}$, 当短轴 b 取不同值且椭圆发生旋转时, 对应力强度因子的影响见图 4 所示. 由计算可知, 随着椭圆长短轴之比的增大, 对裂纹的影响逐渐减小.

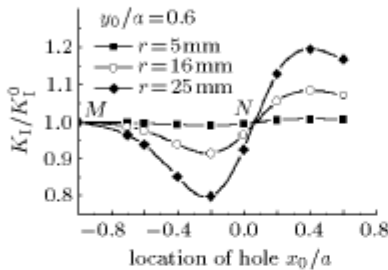


图 3 孔洞沿水平方向位置变化的应力强度因子曲线
Fig.3 The SIF curves vs. the horizontal location of holes

表 2 II 型加载时与各种方法的精度比较

Table 2 Precision compare of various methods on mode II loading

Location x_0/a $y_0/a = 0.6$	K_{II}/K_{II}^0				Error %		
	BEM	J Integral	MCCI	FEAM	J Integral	MCCI	FEAM
-1.0	0.9535	0.9660	0.9391	0.9601	1.29	1.53	0.69
-0.7	0.9143	0.9233	0.8978	0.9254	0.97	1.84	1.20
-0.4	0.9798	0.9953	0.9603	0.9849	1.56	2.03	0.52
-0.2	1.0479	1.0678	1.0300	1.0430	1.86	1.74	0.47
0.0	1.0440	1.0658	1.0361	1.0458	2.04	0.76	0.17
0.2	0.9667	0.9828	0.9602	0.9871	1.64	0.68	2.07
0.4	0.9411	0.9527	0.9261	0.9566	1.22	1.62	1.62
0.6	0.9621	0.9747	0.9447	0.9710	1.29	1.84	0.92

3 带裂纹的板上作用着移动接触的弹性体的钻孔研究

当不是固定载荷而是一个移动接触的弹性体(图 5), 在含裂纹体的水平方向作用着拉伸应力以保持裂纹始终处于张开状态. 在距离裂纹中心 80% 的半裂纹长处钻有 4 个孔, 各计算参数为: $H = 100\text{mm}$, $h = 94.3\text{mm}$, 裂纹半长 $a = 3.6\text{mm}$, 孔半径 $r = 0.5\text{mm}$, 拉伸应力 $\sigma_0 = 1\text{N/mm}^2$, 移动轮的半径 $R = 10\text{mm}$, 轮心压力 $P = 5\text{N}$, 弹性模量 $E = 4 \times 10^3\text{MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 当上部圆轮移动时, 得到裂纹上部尖端应力强度因子变化

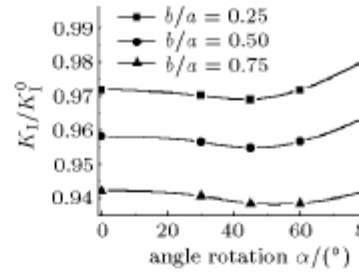


图 4 椭圆孔发生旋转的应力强度因子曲线
Fig.4 The SIF curves vs. rotation of the elliptical holes

对于 II 型加载的情况, 在裂纹的对称两侧取 4 个圆孔进行分析, 计算所得的应力强度因子分别与用于表示能量释放率的 J 积分的求值结果、修改的裂纹闭合回路积分方法 (MCCI) 求值结果及有限元交替法 (FEAM) 的求值结果进行了比较, 见表 2. 由计算可知, 正则应力强度因子 K_{II}/K_{II}^0 与 J 积分法求值的偏差 $\leq 2.04\%$, 与 MCCI 法计算结果的偏差 2.03% , 与 FEAM 法计算结果的偏差 $\leq 2.07\%$. 在 II 型加载的情况下, 降低应力强度因子最理想的位置在孔心最接近裂纹中心且大于孔半径处.

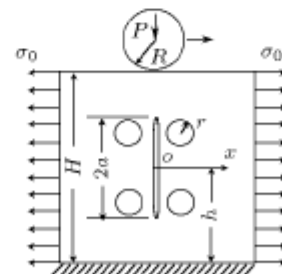


图 5 板上作用着移动接触的弹性体
Fig.5 Plane with a moving contact elastic body

如图 6 所示.

从图 6 计算结果的比较可明显看出, 在上部圆

轮发生移动接触的整个过程中, 开孔后的应力强度因子均小于无孔时的情况. 若取拉伸应力 $\sigma_0 = 0$, 则裂纹在上部圆轮发生移动接触的大部分过程中将会发生闭合, 仅在轮靠近裂纹上部的小范围移动通过时裂纹张开(图 7), 可见钻孔的方法能明显起到降低运动载荷作用下的带裂纹板的裂纹扩展的作用.

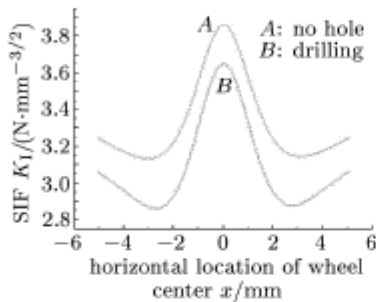


图 6 无孔与钻孔时上端裂尖应力强度因子变化曲线

Fig.6 The SIF curves of the crack tip for no hole and drilling

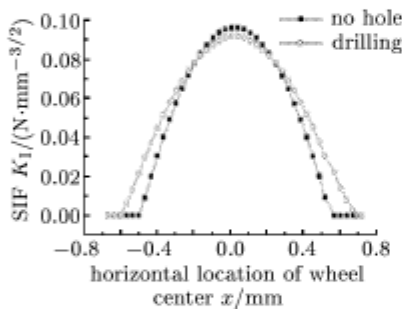


图 7 闭合裂纹上端裂尖的应力强度因子变化曲线

Fig.7 The SIF curves of upside tip of closed crack

4 结 论

边界元法在求解含缺陷孔及裂纹这类多连域的边界值问题上相对于有限元法具有明显的更高的精度特性. 对于 I 型加载, 降低应力强度因子的最佳位置在距离裂纹中心 80% 的半裂纹长处. 对于 II 型加载, 降低应力强度因子的最佳位置在靠近裂纹中

心处, 但这一距离不得小于钻孔的半径, 否则两个钻孔重叠后又会使应力强度因子重新增大. 如果钻孔位置选取不当, 不但不能降低应力强度因子, 反而会增大裂纹进一步开裂的可能性. 对于椭圆形的缺陷孔, 研究表明, 它对 I 型应力强度因子的影响要小于半径与椭圆长轴相等的圆孔.

参 考 文 献

- 1 Arin K. A plate with crack stiffened by partially debonding stringers. *J Eng Fract Mech*, 1974, 6: 133~140
- 2 Jones R, Callinan RJ. Finite element analysis of patched cracks. *J Struct Mech*, 1979, 7: 107~130
- 3 Chu RC, Ko TC. Isoparametric shear spring element applied to crack patching and instability. *J Theoret Appl Fract Mech*, 1989, 11: 93~102
- 4 Sih GC, Hong TB. Integrity of edge debonded patch on cracked panel. *J Theoret Appl Fract Mech*, 1989, 12: 121~139
- 5 Shin CS, Wang CM, Song PS. Fatigue damage repair: a comparison of some possible methods. *Int J Fatigue*, 1996, 18: 535~546
- 6 Eisuke K, Norio K. Subregion boundary element method. *JSME Int J, Series A*, 1994, 37: 366~372
- 7 蒲军平, 姚振汉. 应用边界元法解决接触界面附近带有孔洞的二维移动接触问题. 清华大学学报, 2001, 41(2): 88~91(Pu Junping, Yao Zhenhan. Solving two-dimensional moving contact problems with a hole near the contact interface using boundary element method. *Journal of Tsinghua University*, 2001, 41(2): 88~91 (in Chinese))
- 8 Yao ZH, Pu JP, Kim CS. Boundary element method for moving and rolling contact of 2D elastic bodies with defects. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 17(2): 183~192
- 9 Rice J. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J Appl Mech*, 1968, 35: 379~386
- 10 Sethuraman R, Maiti SK. Finite element based computation of strain energy release rate by modified crack closure integral method. *J Engng Fract Meth*, 1988, 30: 225~229
- 11 Thomas SB, Mhaiskar MJ, Sethuraman R. Stress intensity factors for circular hole and inclusion using finite element alternating method. *Theoret Appl Fract Mech*, 2000, 33: 73~81

EFFECT OF DEFECTIVE HOLE ON STRESS INTENSITY FACTOR OF CRACKED PLANE¹⁾

Wang Yuanfeng Pu Junping

(*School of Civil Engineering and Architecture, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

Abstract Boundary value problem of a plate with crack and defect such as circular hole is a multi-connected domain problem. This kind of problem is suitable for solving with boundary element method due to higher precision. The sub-domain method is used in the paper, a center cracked plate subjected to remote tensile and shear loadings is computed numerically. The effect of circular hole on Mode-I and Mode-II stress intensity factors are studied assuming plane strain condition, the results are more precise than those by using FEM's. The effect of elliptical hole on Mode-I stress intensity factors is studied and some significant results have been obtained. The cracked plate with a moving contact elastic body has been analyzed under the condition of drilling hole near the crack.

Key words boundary element method, crack, defective hole, contact mechanics

Received 26 July 2001, revised 31 December 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19902001) and National Excellent Youth Teacher Foundation of China (RJS2001-39)NJTU(PD-157).