

随机共振系统输出的一种新的反演方法¹⁾

李华锋 徐博侯

(浙江大学力学系, 杭州 310027)

摘要 随机共振是一种在非线性系统中噪声起促进作用的反直观的现象. 近来, 这一现象被应用到信号处理领域. 以前大部分关于随机共振的工作都集中在考虑受噪声污染的简谐信号或者数字信号, 将考虑多频模拟信号, 以获得随机共振在信号处理中的更多有价值的信息. 还原随机共振系统的输出一直是一个困难的问题, 但是在信号比较简单, 例如简谐模拟信号和数字信号的情况下, 可以有一些比较简便的方法. 对于多频模拟信号, 系统输出的还原就会相应地变得比较复杂. 在分析非线性系统输出波形畸变原因的基础上, 提出了一种新的反演方法, 这种方法包含一个简单的反演公式、跃迁区域(信号严重失真段)的线性插值和最小二乘法的多项式曲线拟合. 仿真结果表明, 在适当选择系统参数的基础上, 应用上述的反演方法可以得到比较理想的结果.

关键词 随机共振, 非线性系统, 模拟信号处理, 输出反演, 多频信号

引 言

1981 年 Benzi 等^[1] 在研究古气象冰川问题时提出随机共振 (Stochastic Resonance, SR) 的概念之后, 随机共振现象受到广泛的关注. 1983 年 Fauve 等^[2] 在 Schmitt 触发器电路实验中首次人为诱发了随机共振, 接着由 McNamara 等^[3] 在激光系统中发现了随机共振现象. 近些年来, 在众多的科学领域中, 科学家们相继发现了随机共振现象, 人们逐渐意识到, 随机共振是非线性系统的一个普遍现象.

通常, 随机共振理论认为, 在某些非线性动力学系统中, 当输入信号不变, 而输入噪声的强度变化时, 输出的信噪比将会出现峰值, 这种现象类似于动力学里的共振现象, 所以称之为随机共振. 从频谱的观点来看, 某个系统发生随机共振是指: 对于一个包含简谐激励与噪声输入的系统, 随着噪声强度 D 的改变, 输出的频谱上信号频率 ω 处的频谱出现峰值.

目前, 随机共振在信号处理中的应用的研究很多, Gingl 等^[4] 研究了双稳态系统的信噪比增益, Collins 等^[5] 把可激系统网络应用到弱信号检测问题中, Anishchenko 等^[6] 利用 Chua's 电路得出调频信号比调幅信号更有利于减小信号的失真结果, Hauptmann 等^[7] 研究了双稳态系统网络对生物信号传输的影响. 和一般的动力系统相似, 在输入不

变的情况下, 系统参数的改变也可以导致随机共振现象的出现; 调节参数使得输入信号中的噪声强度刚好就在共振点, 从而得到较好的输出信噪比^[8].

在处理数字信号时, 由于信号在几个态之间变化, 可以把输出分为处于跃迁过程和处于渐近稳定态两种情况考虑, 处理上比较方便. 但是对于模拟信号, 信号是随时间连续变化的, 所以必须把上面的两个过程联合起来考虑. 由于受系统的非线性影响, 波形将产生畸变, 从而直接研究输出就会有很大不便, 很难直接投入实际应用. 为了更好地研究及应用随机共振现象, 减小输出受系统非线性特性的影响, 我们在下面将提出一种信号反演的方法.

1 系统输出特性

首先, 让我们来研究一下系统的输出特性, 分析输出波形畸变的原因, 从而为下面提出的减小波形畸变的反演方法提供依据.

考察双稳态动力学系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + V'(x) = H^*(t) \quad (1)$$

其中 $V(x) = -a^*x^2/2 + \mu^*x^4/4$, a^* 和 $\mu^* > 0$, 描述的是: 在阻尼力 $c\dot{x}$ 的作用下, 受外界激励力 $H^*(t)$, 质量为 m 的粒子在 $V(x)$ 确定的能量势阱中运动. 当粒子的质量很小, 惯性力比起其他各项来可以忽略时, 令

2001-09-14 收到第一稿, 2002-02-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (60272035) 和浙江省自然科学基金资助项目 (601089).

$$a^*/c = a, \quad \mu^*/c = \mu, \quad H^*(t)/c = H(t)$$

系统就简化为

$$\dot{x} = C(x) + H(t) \quad (2)$$

其中 $C(x) = ax - \mu x^3$, a 和 $\mu > 0$, 系统势函数变为 $U(x) = -ax^2/2 + \mu x^4/4$. 激励力 (输入) 为 $H(t) = h(t) + \Gamma(t)$, 其中 $h(t)$ 为确定性的激励力, 可以视为信号, $\Gamma(t)$ 为随机干扰力, 可视为噪声.

1.1 双阱对输出特性的影响

我们考虑最简单的简谐激励力

$$h(t) = A \cos \omega t \quad (3)$$

$\Gamma(t)$ 则是强度为 D 的零均值高斯白噪声

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (4)$$

系统 (2) 存在简谐激励的临界值 $A_0 \approx \sqrt{\frac{4a^3}{27\mu}}$ [9].

对于确定性的输入 (即 $D = 0$), 当 $A < A_0$ 时, 运动轨道将在稳态 $x = \pm\sqrt{a/\mu}$ 中的某一个附近进行局部的周期运动, 只有当 $A > A_0$ 时才能超越势阱.

对非确定性的输入, 当 $A < A_0$, D 比较小时, 信号和噪声单独作用都不能导致输出的跃迁, 但噪声和信号共存时输出会出现跃迁, 就出现了随机共振现象. 这样噪声表现出协同的作用, 我们来直观地考虑一下这种情况下的输出.

$h = 0$ 时, 系统 (2) 的势函数是对称的, 系统有两个稳定点 x_+ 和 x_- 和一个不稳定点 x_u (这里 x_u, x_+, x_- 为系统势函数 $U(x)$ 的平衡点, $x_u = 0, x_{\pm} = \pm\sqrt{a/\mu}$). 由于系统势函数的对称性, 输出落在两个势阱里的概率都是相等的, 所以概率密度是对称分布的, 均值点为 0, 正是不稳定点 x_u . 系统存在两个势阱, 中间由一个势垒隔开, 跃迁实质上是输入提供能量来使粒子越过势垒. 当信号很小时, 信号半个周期内提供的能量不足以使粒子越过势垒; 同样噪声很小时, 需要非常长的时间的能量积累, 才能出现噪声诱导的粒子跃迁, 从而认为实际上这样的噪声单独作用不能导致粒子的跃迁; 但是在两者协同作用下, 噪声只要积累较少的能量就能导致跃迁, 从而大大减小粒子跃迁的时间. 输入信号不变, 适当增大噪声强度, 这样的能量积累所需要的时间就可以减少, 噪声也就促进了跃迁的发生.

在信号和噪声单独作用都不能导致跃迁、而协同作用导致跃迁的条件下, 可以得到: $h < 0$ 时,

粒子出现由正到负的跃迁比出现由负到正的跃迁的概率要大; 同样, $h > 0$ 时, 则是出现由负到正的跃迁的概率大. 这样, 在信号半个周期的时间内, 输出产生的跃迁从统计的角度看总是促使输出与信号同步, 从而产生由噪声引起的“共振” [8,9].

利用这样的随机共振现象来进行信号处理, 很关键的一点是: 粒子越过势垒的能量积累需要时间, 则 h 过零后的一段时间内, 粒子都在积累能量以越过势垒, 输出就不能很快地跟上信号的变化, 从而产生严重的波形失真; 而跃迁完成后, 粒子在特定的阱内以确定性方程的解为轨道振荡, 输出就能足够快地跟上信号的变化.

1.2 波形失真情况的研究

考虑粒子在特定的阱内以确定性方程的解为轨道振荡的运动. 当 $h(t)$ 随时间变化很慢时, 方程 (2) 中的 \dot{x} 比起其他项来是个小量, 则确定性方程的解, 也就是阱内振荡的轨道, 可以通过求解方程

$$C(x) + h(t) = 0 \quad (5)$$

近似得到. 方程 (5) 对 t 求一阶导数后成为

$$C'(x)\dot{x} + \dot{h}(t) = 0$$

我们就可以写出 \dot{x} 的表达式

$$\dot{x} = -\dot{h}(t)/C'(x) \quad (6)$$

在微弱信号 ($|h| \ll 1$) 条件下, 从方程 (5) 可以得到 $|x| \approx \sqrt{a/\mu}$, 从而

$$|C'(x)| \approx 2a, \quad |\dot{x}| \approx |\dot{h}(t)/2a|$$

当 $a > 1/2$ 时, $|\dot{x}| < |\dot{h}(t)|$, 即跃迁完成后的运动被压缩了, a 越大压缩也就越明显.

由于跃迁产生的输出为 $O(x)$ 量级, 而跃迁完成后输出的运动轨道却受到了压缩, 考虑到信号 $|h| \ll 1 = O(x)$, 综合考虑跃迁及跃迁后的运动, 输出的波形就近似于梯形波 (如图 1). 由于噪声的作用主要是促进跃迁, 噪声的多少只影响到跃迁段时间的长短, 对总体波形没有影响. Dykman 等 [10] 通过线性响应理论也得到类似的结论.

很明显, 这样的输出波形有严重的畸变, 不能真实反映输入信号的变化. 特别是在多频信号输入的情况下. 下面, 我们将讨论如何对这种类型的畸变进行非线性补偿——反演, 更好地从输出中提取有用信息.

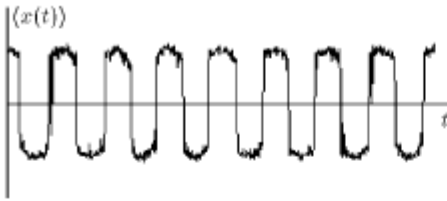


图 1 弱信号和弱噪声, 两者单独作用都不能导致跃迁, 但协同作用导致跃迁的情况
(参数为 $a = \mu = 1, f = 0.001, A = 0.2, D = 0.016$)

Fig.1 Weak signal and noise, which cannot induce intrawell jumping separately (system parameters: $a = \mu = 1, f = 0.001, A = 0.2, D = 0.016$)

2 信号的反演

对于式 (2) 的输出, 如果 $D \ll 1$, 可以假定它有如下的形式

$$x(t) = \hat{x}(t) + \sqrt{D}y(t) \quad (7)$$

其中 $\hat{x}(t) = \langle x(t) \rangle$ 为输出的确定性部分; $y(t) = O(1)$ 为一个近似的高斯随机过程, 显然, 其均值为零.

将式 (7) 代入式 (2) 并取均值, 略去关于 D 的高阶小量

$$\dot{\hat{x}} = C(\hat{x}) + h(t) \quad (8)$$

当 $|\dot{\hat{x}}(t)| \ll |h(t)|$ 时, 可以有反演公式

$$\bar{h}(t) = -C(\hat{x}) \approx h(t) \quad (9)$$

由式 (9) 得: $\dot{\hat{x}}(t) \approx -\dot{h}(t)/C'(\hat{x})$, 从而满足反演成立的条件变为

$$|\dot{h}(t)| \ll |C'(\hat{x})h(t)| \quad (10)$$

很明显, 式 (10) 在 $h = 0$ 附近不能成立, 所以此处不能直接用反演公式 (9). 如果条件 (10) 只是在 $h = 0$ 附近不成立, 相对一个周期来说时间很短, 我们可以认为, 只需对 $h = 0$ 附近的数据进行特殊处理, 其他数据可以直接用式 (9) 反演.

下面给出两个确定性输入的输出利用反演公式 (9) 的结果. 图 2 和图 3 差别很大, 图 2 为信号不能



图 2 没有跃迁时反演的结果

Fig.2 Recovery result of intrawell oscillation case

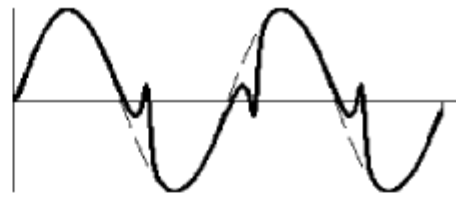


图 3 有跃迁时反演的结果

Fig.3 Recovery result of intrawell jump case

产生跃迁的情形, 反演后基本波形不变; 图 3 是信号能产生跃迁的情形, 反演后波形就会在过零处有严重失真的情况. 对带噪声的弱信号产生跃迁后的输出的均值经过反演, 也有图 3 的现象, 可见, 这种现象是由于跃迁导致的.

当系统在 $h = 0$ 附近出现跃迁的时候, 输出的均值 \hat{x} 是从 x_- 到 x_+ (或从 x_+ 到 x_-) 连续变化的, 它们所对应的 \bar{h} 如图 4 所示; 同时, \hat{x} 是随时间变化的, 所以如果把图 4 中的横坐标变换为时间 t , 则刚好对应于图 5 中的 AB 段曲线, 反演的结果严重失真.

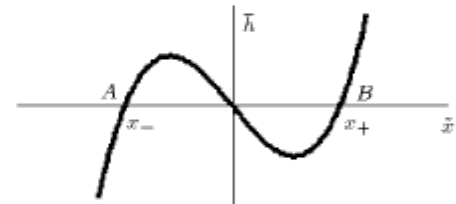


图 4 函数 $\bar{h}(t) = -C(\hat{x})$ 图像

Fig.4 Shape of $\bar{h} = -C(x)$

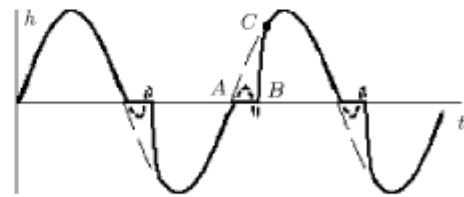


图 5 跃迁时间段反演失真原因

Fig.5 Shape of recovered result

通过系统参数的调节, 可以使得系统的响应速度 λ 很大 [8], 从而图 5 中 AB 段很短, 也就是反演结果严重失真的时间很短. 而在这个时间段内, 可以认为信号近似线性变化, 所以可以选取基本不受跃迁影响的 C 点, 用 A, C 的线性插值来作为这段时间的输出的近似. 这要求严重失真段的时间越短越好, 根据数值结果, 在跃迁时间 $1/\lambda < T/12$ (T 为信号的周期) 时, 选择 AC 段的时间为 $2.5/\lambda$, 此时 C 点的偏差为 $e^{-2.5} = 0.082$, 已经较小.

由于实际计算中 \hat{x} 不可能完全排除噪声的干扰，所以上述的反演结果也有噪声的影响在内。为了尽可能减小噪声的影响，我们对反演输出的结果用最小二乘法进行拟合，避免在某些点上因噪声引起大偏差，导致对最终结果的不利影响。

综上所述，反演的具体过程为：1) 对直接输出进行平均；2) 对输出的均值应用式 (9) 进行反演；3) 对严重失真段 AC 进行线性插值，如果 AC 段非常短 (λ 很大时)，这一步可以省略；4) 由于反演的结果中仍包含有明显的随机成份，故进一步对上面得到的结果进行拟合 (多项式拟合)。

3 数值模拟结果

例 1 $h(t) = 0.2\cos(0.002\pi t)$ ，噪声方差 $\sigma^2 = 1$ ，采样时间 $\Delta t = 0.1$ 的情况下，取 $a = \mu = 1$ 进行数值模拟。下面给出模拟的结果。图 6(a) 为输入的信号加噪声，图 6(b) 为直接的输出，图 6(c) 为输出取均值后反演的结果，图 6(d) 为反演结果用 20 次的多项式拟合的结果。

可以看到，在开始一个周期左右，拟合得到的结果 (虚线) 与原始信号 (实线) 有较大的偏差，以后的波形还是基本一致的。

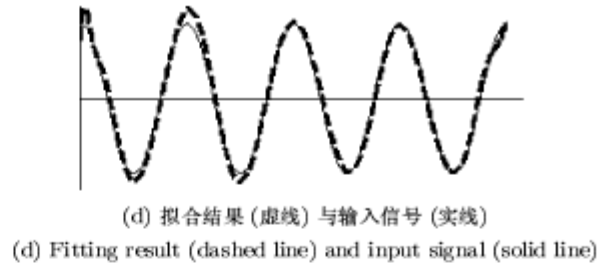
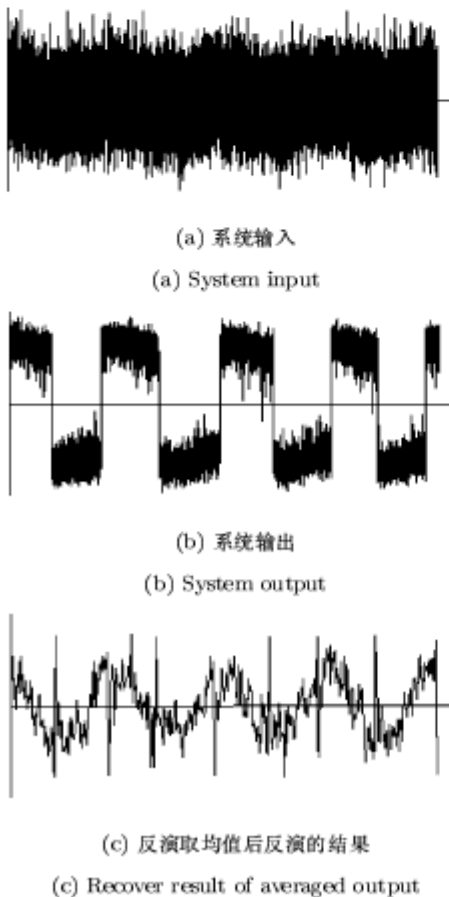


图 6
Fig.6

例 2 多频信号 $h(t) = 0.3\cos(0.2\pi t) + 0.2\cos(0.5\pi t)$ ， $\sigma^2 = 1$ ， $\Delta t = 0.001$ 的情况下，取 $a = 10$ ， $\mu = 12000$ ，同样的算例也出现在参考文献 [8] 中。图 7(a) 为信号加噪声的输入，图 7(b) 为直接的输出，图 7(c) 为对 20s 内的输出进行恢复的结果，图中细实线为原始信号，虚线为反演得到的结果，作为比较，我们还给出了文献 [8] 中的相应结果 (图 7(c) 中的圆点线)。可以看到，对输出进行反演后再进行拟合，能得到较好的恢复结果。

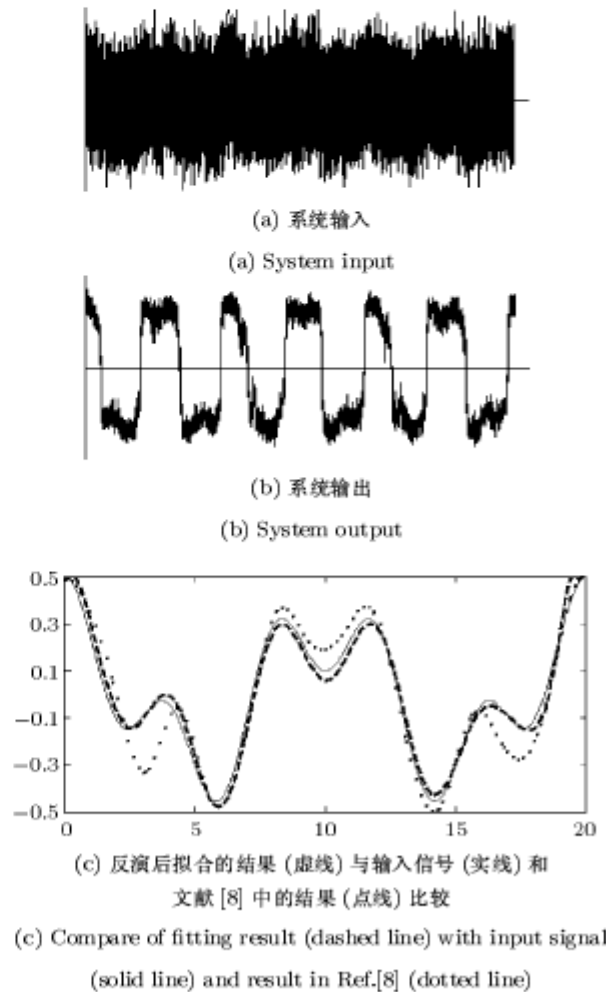


图 7
Fig.7

4 讨 论

应用随机共振处理模拟信号, 首先选取适当的系统参数, 使系统的响应速度 λ 满足第 2 部分提到的 $1/\lambda < T/12$, 同时, λ 又不能太快, 否则输出噪声将明显增大^[8].

对于多频的模拟信号, 在适当选取系统参数的基础上, 应用本文提到的反演方法(对输出取均值, 对均值应用式(9)进行反演, 对反演的严重失真段进行线性插值, 再进行最小二乘法曲线拟合), 就能得到很好的结果.

另外, 从图 2 可以看到, 没有跃迁的情况下, 系统的输出反演有相位延迟; 实际上, 在有跃迁的情况下, 系统的确定性的相位延迟也存在, 它对信号恢复的影响将在另文中讨论.

参 考 文 献

- 1 Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *J Phys A: Math Gen*, 1981, 14(11): L453~457
- 2 Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system. *Phys Lett*, 1983, 97A (1,2): 5~7

- 3 McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R. Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Phys Rev Lett*, 1988, 60(25): 2626~2629
- 4 Gingl Z, Vajtai R, Kiss LB. Signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a bistable system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, 11(12): 1929~1932
- 5 Collins JJ, Carson CC, Thomas TI. Stochastic resonance without tuning. *Nature*, 1995, 376(6537): 236~238
- 6 Anisshchenko VS, Safonova MA, Chua LO. Stochastic resonance in chua's circuit driven by amplitude or frequency modulated signals. *Inter J Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(2): 441~446
- 7 Hauptmann C, Kaiser F, Eichwald C. Signal transfer and stochastic resonance in coupled nonlinear systems. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(6): 1159~1167
- 8 Xu BH, Duan FB, Bao RH, et al. Stochastic resonance via tuning system parameters: The application of bistable system in signal processing. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13(4): 633~644
- 9 Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance. *Rev Mod Phys*, 1998, 70(1): 223~246
- 10 Dykman MI, Luchinsky DG, et al. Stochastic resonance: linear response and giant nonlinear. *Journal of Statistical Physics*, 1993, 70(Nos 1/2): 463~478

A NEW METHOD TO RECOVER THE SIGNALS OBTAINED BY STOCHASTIC RESONANCE¹⁾

Li Huafeng Xu Bohou

(Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract Stochastic resonance (SR) is a counterintuitive phenomenon wherein the noise plays a constructive role in nonlinear dynamic systems, and it becomes a promising way of signal processing recently. Since most of the previous works concentrated on distorted simple-harmonic input and digital signals, we are tending to observe more signal processing features of SR by use of multi-frequency analog signals in this paper. It is difficult to recover the information in the output obtained by a SR system. But for simple input, i.e. the simple-harmonic analog signal and digital signal, there are some typical methods. When treating a multi-frequency analog signal, the recovery procedure becomes more complex. In this paper, we firstly discuss the reason why the output of a nonlinear system is distorted in detail. Based on this work, a new signal recovery method is suggested. The method includes a simple formula to restore the signal data, a linear interpolation in transient timeslice and a least square polynomial fitting to deal with the data obtained above. According to the simulation, this method gives good results when the system parameters are well selected.

Key words stochastic resonance, nonlinear system, analog signal processing, output recover, multi-frequency signal

Received 14 September 2001, revised 1 February 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60272035) and the Provincial Natural Science Foundation of Zhejiang (601089).