

两自由度振动系统的斜碰撞分析¹⁾

韩 维 胡海岩 金栋平

(南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

摘要 研究斜碰撞振动系统动力学的一个关键问题是对系统在碰撞前后的状态进行合理描述和正确计算. 针对两弹性体斜碰撞问题, 基于瞬间碰撞假设, 提出了采用步进冲量来分析和求解斜碰撞前后的状态关系; 并以弹簧摆和振子组成的两自由度斜碰撞振动系统为例, 具体介绍了该算法如何实现. 用解析方法讨论了该系统在斜碰撞过程中可能出现的各种力学现象, 将冲量步进算法得到的数值解与解析结果进行对比, 取得了完全一致的结果. 该数值方法能适应多种斜碰撞问题的计算.

关键词 斜碰撞, 摩擦, 恢复系数, 数值方法

引 言

具有间隙的机械系统在动载荷的作用下经常发生碰撞振动. 近年来, 人们对碰撞振动进行了深入研究, 比较有代表性的研究如文献 [1,2]. 碰撞振动系统具有强非线性特性, 对其动力学研究主要集中在定性或数值方面, 对多自由度碰撞振动系统的研究尤为如此. 针对两自由度碰撞振动系统, Kember 和 Babitsky^[3] 用周期 Green 函数法对接触过程进行连续的积分运算. Jin 和 Hu^[4], 李群宏和陆启韶^[5] 研究了两自由度碰撞系统的周期运动及稳定性, 得到了单碰周期 n 运动解及其稳定性分析的解析形式. Luo 和 Xie^[6,7] 通过映射等方法对两自由度碰撞系统进行了较详尽的研究.

研究碰撞振动问题的一个关键是对碰撞过程进行合理的简化和正确计算. 以准刚体瞬间碰撞模型为基础, 碰撞可以分为正碰撞和斜碰撞两种情况. 现有研究多基于 Newton 碰撞定律的正碰撞模型. 在斜碰撞过程中, 碰撞物体在接触点同时具有相对法向速度和相对切向速度; 前者导致法向挤压变形, 后者借助摩擦引起切向畸变. 因此, 其情形比正碰撞复杂得多. 在现有研究中, 通常认为切向摩擦系数与法向恢复系数是相互独立的. Babitsky^[8] 用基于 Newton 碰撞定律和 Coulomb 摩擦定律的方法研究斜碰撞问题. 吕茂烈^[9] 建议引入“瞬态摩擦”和“切向恢复系数”来处理斜碰撞问题. Brach^[10] 指出, 在有摩擦的斜碰撞情况下, 基于 Newton 碰撞定

律的处理方法可能产生类似 Painlevé 问题中能量增加的悖论. 为此, Stronge 改进了用能量耗散方法定义的恢复系数^[11], 并在此基础上分析了单摆与固定面斜碰撞时的规律^[12]. 但这种能量恢复系数应用于斜碰撞时, 只适用于切向微滑动 - 逆向与法向压缩 - 恢复同步的情况, 该条件在多自由度斜碰撞振动中并不总是满足, 并且难以预测. 此外, Lewis 和 Rogers^[13] 用实验证明, 对单向微滑动而言, 斜碰撞过程中法向与切向碰撞力的时间变化历程是同步的. 刘才山和陈滨^[14] 针对重力场下作大范围回转运动的柔性梁与固定斜面发生斜碰撞的情况, 采用点 - 面接触碰撞模型刻画多柔体的碰撞过程, 为解决具有变拓扑结构的多柔体系统点 - 面碰撞动力学问题奠定了基础. 总的来说, 关于斜碰撞的研究还很不充分, 多数文献的结果限于处理个案而不具普遍性.

在碰撞振动系统动力学研究中, 人们基于大量实验数据提炼出了“瞬间碰撞假设”. 即碰撞过程在“瞬间”完成, 在此过程中碰撞体在接触区沿法向具有极微小的压缩变形和恢复, 不影响物体的宏观位移. 于是, 可以将瞬间碰撞过程区分为压缩和恢复两个“阶段”, 对每个阶段可以独立应用力学定律. 这样, 在瞬间斜碰撞时, 物体将具有切向运动趋势甚至“微滑动”而导致摩擦力作用, 从而使瞬间摩擦的引入成为可能.

本文试图基于瞬间碰撞假设, 为多自由度振动系统斜碰撞分析提供一种普遍适用的方法. 论文的

2002-06-30 收到第一稿, 2003-05-26 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (59905010)、教育部留学回国人员科研启动基金资助项目和南京航空航天大学青年基金资助项目.

结构如下:先对多自由度系统的斜碰撞过程进行分析,提出碰撞前后状态关系算法的基本思路,然后以一类两自由度斜碰撞振动系统为例说明算法的具体实现和几个细节问题.作为特例,本文将分析该两自由度振动系统在斜碰撞过程中出现的各种情况,根据碰撞前状态求得斜碰撞前后状态的解析表达式.最后,对数值结果和解析结果进行对比.

1 斜碰撞过程的分析与算法

本文所关心的多自由度斜碰撞振动系统由两个相互独立的子系统构成,每个子系统仅以单个自由度参与斜碰撞.两个物体在斜碰撞中会出现切向单向微滑动、微滑动-逆向等复杂现象.和单自由度系统与固定面之间的斜碰撞情形^[12]不同,除个别情况外,在多自由度系统斜碰撞过程中切向运动的方向切换与法向压缩-恢复的切换一般并不同步.这种复杂性造成很难根据系统碰撞前的状态来预测切向运动是否逆向和何时逆向.因此,几乎不可能建立普遍适用的斜碰撞规律.针对此种情况,本节基于瞬间碰撞假设和碰撞中的冲量关系,提出“冲量步进算法”,为分析各种斜碰撞问题提供一种普遍适用的计算思路.

在复杂系统动力学的研究中,解析形式的规律有时并非必须.数值算法在复杂模型建模和动力学特征分析中具有和解析解在简单模型中一样重要的价值.正如文献[15]所指出的,“计算机强大的计算能力……不但极大地扩展了数学的应用范围,也改变了人们对数学求解的观念.过去认为满意的解是获得解的分析表达式,现在则认为成功的解是一种算法”.

1.1 冲量步进算法的基本思路

多自由度斜碰撞振动系统在非碰撞接触期的动力学方程可写为

$$M(q, t)\ddot{q}(t) - h(\dot{q}, q, t) = 0 \quad (1)$$

式中 $M(q, t)$ 为系统的质量矩阵, $q(t)$ 为系统的广义坐标.不失一般性,设物体 1 和 2 分别属于系统的两个相互独立子系统,并参与斜碰撞;其它自由度不直接参与碰撞,但通过方程(1)感受碰撞的影响.定义非负函数 $d = d[q(t)]$ 为物体 1 和 2 之间的法向距离, $d > 0$ 表示两个子系统处于非接触运动状态.如果系统在某一时刻 t_0 时 $d = 0$,则两个子系统发生接触.此时若 $\dot{d} < 0$,两子系统进入斜碰撞

过程,这将是本文关心的情况.若接触时 $\dot{d} = 0$,当 $\ddot{d} > 0$ 时,两物体仅仅以零法向速度相擦而过,这就是“擦边碰撞”,两物体并不交换能量和动量;当 $\ddot{d} < 0$ 时,两物体将产生持续的接触和表面滑动,这种情况比较复杂.易见,不可能在刚接触时刻存在 $\dot{d} > 0$ 的情况.

按法向变形将整个碰撞过程分为压缩和恢复两个阶段.在压缩阶段,参与碰撞的两物体在法向的微运动为相互靠近,至法向速度相等时切换到恢复阶段.对于斜碰撞,两物体在碰撞接触面上具有切向相对微滑动,并因此受到摩擦力的作用,导致微滑动可能在碰撞过程中逆向,但也可能保持初始滑动方向直至碰撞结束.我们确认,在准刚体瞬时碰撞的假设下,切向微滑动只可能存在一次逆向或者没有逆向.由于碰撞开始时刻两物体的速度关系存在多种情况,难以从初始条件来判断微滑动是否在碰撞过程中逆向和何时逆向.因此,我们提出一种按碰撞冲量步进计算碰撞状态转换的数值算法,并名之为“冲量步进算法”.

该算法的基本思路是:瞬间碰撞假设保证系统位移向量 x 在碰撞中不发生变化,并且不需要考虑所有常规有限力对碰撞过程中系统状态的影响.因此,碰撞仅仅改变系统的速度,这种改变来源于斜碰撞导致的法向碰撞冲量和与之耦合的切向摩擦冲量.法向和切向冲量都是从零开始累积作用在两个子系统上的,因此可以将其分成很小的“冲量增量”,逐次施加到系统上,由冲量-动量(矩)定律求得系统在每一步时的状态,直到碰撞物体脱离.之所以这样做,是为了在每一步计算时判断切向速度是否发生了反向.

1.2 冲量步进算法用于两自由度斜碰撞分析

考察如图 1 中的二自由度斜碰撞振动系统,它由放置在水平面上的弹簧摆和振子组成.弹簧摆只能绕中心点 O 旋转,其质量 M_1 全部集中在端部摆球处,摆杆长为 l ,摆球体积可忽略;振子只能作水平线运动,质量为 M_2 ;摆球与质量块左平面之间的摩擦系数为定值 μ .现以该系统为例,分析碰撞过程中系统状态的变化,说明冲量步进算法的具体实现及其技术细节.

记摆的转角和振子位移分别为 θ 和 X ,定义 $d = \Delta - (l \sin \theta - X)$ 为摆球与质量块之间的法向距离,其中 Δ 为摆的平衡位置与振子平衡位置之间的距离. $d > 0$ 时表示摆和振子分别处于独立运动状

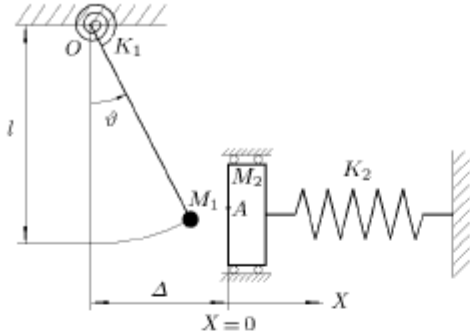


图 1 两自由度斜碰撞系统

Fig.1 An oblique impacting system of two degrees of freedom

态. 当系统运动使 $d = 0$ 时, 摆球在位置 A 以角度 θ_0 与振子质量块的左表面发生接触. 本文仅关心接触时 $\dot{d} = l\dot{\theta} \cos \theta_0 - \dot{X} < 0$, 即两物体进入瞬间斜碰撞过程的情况.

令 V_{i-1}, \dot{X}_{i-1} 和 V_i, \dot{X}_i 分别为碰撞过程中两物体在状态 $i-1$ 和 i 时的法向速度值, 对应的摆角速度为 $\dot{\theta}_{i-1}$ 和 $\dot{\theta}_i$. 根据瞬间碰撞假设, 不计碰撞过程中微滑动引起 θ 的变化, 按几何关系有 $V_i = l\dot{\theta}_i \cos \theta_0$. 设摆球在此过程中的切向速度不改变方向, 若从状态 $i-1$ 到 i 的变化过程中两物体相互作用的冲量为 ΔP_i , 则碰撞面上 Coulomb 摩擦力产生的切向冲量的大小为 $\mu \Delta P_i$, 其方向由 $\dot{\theta}$ 的方向决定, 在 $|\theta| < \pi/2$ 的范围内, $\dot{\theta}$ 和 V_i 的方向是一致的, 因此 $\text{sgn}(V_i) = \text{sgn}(\dot{\theta}_i)$. 分析从状态 $i-1$ 到 i 的变化过程中两物体的受力情况, 并分别应用冲量 - 动量 (矩) 定律, 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \dot{\theta}_{i-1} - \Delta p_i [\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\dot{\theta}_{i-1}) \sin \theta_0] \\ \dot{x}_i &= \dot{x}_{i-1} + \bar{m} \Delta p_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $\bar{m} = M_1/M_2, x = X/l, p = P/(M_1 l)$ 和 $v = V/l$ 为无量纲变量. 记碰撞开始时系统的初始速度为 $\dot{\theta}_0$ 和 \dot{x}_0 , 压缩阶段应在两碰撞物体的切向速度相等时, 即关系式

$$v = \dot{\theta}_i \cos \theta_0 = \dot{x}_i \quad (3)$$

成立时结束, 在此过程中两物体经受的切向冲量为

$$P = \sum_{j=1}^i \Delta p_j \quad (4)$$

由于在碰撞过程中无法判断微滑动变化是否与方法向压缩 - 恢复同步, 在此处应用恢复系数的 Poisson 定义比较合适. 因此, 在进行恢复阶段的步进计算时, 应继续按式 (2) 进行, 直到

$$P_{II} = rP \quad (5)$$

时为止, 此时碰撞结束. 上式中 r 为碰撞恢复系数, P_{II} 为恢复阶段每一步进段的冲量累积.

实现算法的几个技术细节如下.

1.2.1 冲量步长的选择

为了用尽量少的迭代次数使系统状态达到压缩结束时刻, 先假定在压缩阶段切向速度不发生变化, 得到一个初始的法向冲量 P_f^* . 在式 (2) 中取 $i-1 = 0$ 和 $\Delta p = P_f$, 考虑压缩结束时系统状态满足式 (3), 联立求解得

$$P_f = \frac{\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 - \dot{x}_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0 + \mu \text{sgn}(\dot{\theta}_0) \sin \theta_0 \cos \theta_0} \quad (6)$$

因碰撞开始时必有 $v_0 - \dot{x}_0 > 0$, 即 $\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 - \dot{x}_0 > 0$, 故初始法向冲量 $P_f > 0$. 为保证一定的迭代精度, 在压缩阶段冲量步长 Δp_i 可取为 $P_f/50 \leq \Delta p_i \leq P_f/20$. 在恢复阶段, 恢复冲量已经成为已知量, 所以可以类似地选取步长.

1.2.2 压缩阶段结束时的状态计算

计算中每一步均须判断压缩阶段是否结束, 其条件是 $v = \dot{\theta}_i \cos \theta_0 = \dot{x}_i$, 但按定步长不能保证恰好满足该条件. 注意到碰撞开始时 $\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 > \dot{x}_0$, 因此第一次出现 $\dot{\theta}_i \cos \theta_0 < \dot{x}_i$ 时, 压缩阶段已经结束. 通过线性插值可以得到压缩结束时的状态. 设在压缩结束前的最后一次迭代结果为 $\dot{\theta}_{i-1}$ 和 \dot{x}_{i-1} , 则 $\dot{\theta}_{i-1} \cos \theta_0 > \dot{x}_{i-1}$. 分析图 2 所示的速度关系, 在压缩结束时刻, 其共同的法向速度和此阶段法向冲量累积为

$$\bar{v} = \dot{x} = \dot{\theta} \cos \theta_0 = \dot{\theta}_{i-1} \cos \theta_0 + R(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) \cos \theta_0 = \dot{x}_{i-1} + R(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \quad (7)$$

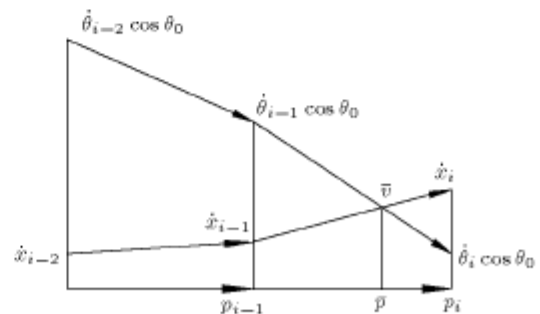


图 2 压缩阶段结束前后碰撞物体的速度大小关系

Fig.2 The velocity change before and after the switch of approach phase and restitution phase

$$p_i = p_{i-1} + R\Delta p_i \quad (8)$$

$$\text{式中 } R = \frac{|\dot{\theta}_{i-1} \cos \theta_0 - \dot{x}_{i-1}|}{|\dot{\theta}_{i-1} \cos \theta_0 - \dot{x}_{i-1}| + |\dot{\theta}_i \cos \theta_0 - \dot{x}_i|},$$

$$p_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta p_j.$$

计算恢复阶段的状态变化时,以压缩结束时的状态作为恢复阶段的开始状态.法向冲量 p_{Π} 由式(5)得到,恢复阶段的计算分为两种情况.若是切向速度的反向发生在压缩阶段,即在压缩阶段结束时满足

$$\text{sgn}(\dot{\theta}_0)\text{sgn}(\dot{\theta}) = -1 \quad (9)$$

则切向速度的方向在恢复阶段不会再改变,因此可以直接利用下式得到碰撞物体在恢复阶段结束时,也就是碰撞结束时的速度

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_f &= \dot{\theta} - p_{\Pi}[\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\dot{\theta}) \sin \theta_0] \\ \dot{x}_f &= \dot{x} \cos \theta_0 + \bar{m} p_{\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

反之,则无法判断切向速度的反向在恢复阶段是否发生或何时发生,仍需按式(2)进行迭代计算,至累积的冲量到达 p_{Π} 时结束.

1.2.3 切向速度反向时的状态计算

迭代计算的每一步均需判断切向速度是否反向.因为切向速度的反向同时意味着法向速度的反向,所以可采用法向速度的方向来判断.如果在第 i 步迭代结束时 $\text{sgn}(\dot{\theta}_i)\text{sgn}(\dot{\theta}_{i-1}) = -1$ 成立,则切向与法向速度同时反向,利用线性插值同样可以得到反向时新的系统状态 $\dot{\theta}_i^*$ 和 \dot{x}_i^* ,并以此作为下一步迭代的初值.

2 两自由度振动系统斜碰撞前后的状态关系

在考虑碰撞面切向摩擦的情况下,利用冲量步进算法可以比较方便地求得碰撞前后的状态关系并应用于多自由度斜碰撞振动系统动力学的数值计算中.为了考核这种算法,本节导出图1所示两自由度振动系统发生斜碰撞时的状态变化关系.显然,瞬间碰撞过程中切向运动是否逆向和何时逆向阻碍着我们求得简单的碰撞关系,但这种阻碍只体现在考虑碰撞面切向摩擦的情况.下面分两种情况来分析两自由度斜碰撞振动系统在碰撞前后的状态关系.

2.1 考虑碰撞面切向摩擦时的碰撞关系

在考虑碰撞面的切向摩擦时,何时发生切向微滑动逆向有如下3种可能:一是在法向压缩阶段逆向;二是在法向恢复阶段逆向;三是不发生,即保持

单向滑动至碰撞结束.根据碰撞前的系统状态,我们用下面的方法来进行逆向的判断.

在碰撞过程中,系统状态变化由式(2)表示.对摆从碰撞开始到可能存在的切向滑动逆向阶段应用动量矩定律,考虑逆向时摆角速度 $\dot{\theta}$ 为零,得此阶段作用的法向冲量为

$$P_* = \dot{\theta}_0 / [\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \quad (11)$$

设从碰撞开始到法向压缩结束时切向摆速不逆向,此阶段作用的法向冲量由式(6)表示为 P_f .如果摆保持初始切向运动方向直至碰撞阶段结束,则根据恢复系数的 Poisson 定义,碰撞物体相互作用的总法向冲量为 $(1+r)P_f$, r 为正碰恢复系数.此处不用 Newton 恢复系数和能量恢复系数,是因为 Newton 系数用于复杂碰撞情况时可能出现错误,而能量系数不适合于切向运动与法向运动不同步的情形.根据 P_* 与 P_f 和 $(1+r)P_f$ 的大小比较,可以判断切向摆速逆向是否发生和何时发生,并存在前面提到的三种可能情况.

2.1.1 切向微滑动在法向压缩阶段逆向

这种情况发生的条件是 $P_* < P_f$.将碰撞过程分为切向摆速度逆向前后的压缩阶段、逆向后的压缩阶段和恢复阶段,根据式(2)和阶段切换时的系统特征状态,对弹簧摆和振子分别应用冲量-动量(矩)定律可得到几组代数方程组,求解方程组即得系统在各阶段切换时和碰撞结束时的速度以及累积冲量分别为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_R &= 0, \quad \dot{x}_R = \dot{x}_0 + \frac{\bar{m}\dot{\theta}_0}{\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0} \\ P_R &= \frac{\dot{\theta}_0}{\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\frac{1}{A} \{ \dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] + \bar{m} \dot{\theta}_0 \} \\ &\quad [\cos \theta_0 - \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \\ \dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_0 \\ P_1 &= P_R + \frac{1}{A} \{ \dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] + \bar{m} \dot{\theta}_0 \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{\Pi} &= -\frac{1}{A} [\cos \theta_0 - \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \cdot \\ &\quad \{ \bar{m} \dot{\theta}_0 - r \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 [\cos \theta_0 - \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] + \\ &\quad (1+r) \dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \text{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \} \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{II} = & -\frac{1}{A} \{ \dot{x}_0 \cos \theta_0 [\cos^2 \theta_0 - \mu^2 \sin^2 \theta_0] + \\ & (1+r)\bar{m}\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 [\cos \theta_0 - \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] - \\ & r\bar{m}\dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \} \end{aligned} \quad (14b)$$

$$P_{II} = (1+r)P_I \quad (14c)$$

式中 $\dot{\theta}$, \dot{x} 和 P 的下标为 R , I 和 II 时分别表示切向微滑动逆向时、压缩 - 恢复切换时和碰撞结束时的系统状态和累积法向冲量, 另外

$$A = \mu^2 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 - \bar{m} [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \quad (15)$$

2.1.2 切向微滑动在法向恢复阶段逆向

这种情况发生的条件是 $P_f < P_* < (1+r)P_f$. 各阶段切换时和碰撞结束时的速度以及累积冲量分别为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_I = & \frac{1}{B_1} \{ \bar{m}\dot{\theta}_0 + \dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \} \\ \dot{x}_I = & \dot{\theta}_I \cos \theta_0, \quad P_I = \frac{1}{B_1} (\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 - \dot{x}_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_R = & 0, \quad \dot{x}_R = \dot{x}_0 + \frac{\bar{m}\dot{\theta}_0}{\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0} \\ P_R = & \frac{1}{B_2} \{ \bar{m}\dot{\theta}_0 + \dot{x}_0 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{II} = & \frac{1}{B_2} [\cos \theta_0 - \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \{ \bar{m}\dot{\theta}_0 - \\ & [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] [r\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 - (1+r)\dot{x}_0] \} \\ \dot{x}_{II} = & \frac{1}{B_1} \{ \dot{x}_0 \cos \theta_0 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] + \\ & (1+r)\bar{m}\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 - r\bar{m}\dot{x}_0 \} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中各符号含义与情况 1 相同, 总的法向冲量由式 (14c) 表示, 且

$$B_1 = \bar{m} + \cos \theta_0 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \quad (19a)$$

$$B_2 = B_1 [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \quad (19b)$$

2.1.3 切向微滑动不逆向, 保持方向至碰撞结束

这种情况发生的条件是 $P_* > (1+r)P_f$. 由于切向微滑动在整个碰撞过程中不逆向, 则法向压缩 - 恢复阶段切换时的速度以及此阶段冲量仍由式 (16)

表示, 碰撞结束时的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{II} = & \frac{1}{B_1} \{ \bar{m}\dot{\theta}_0 + [\cos \theta_0 + \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] \cdot \\ & [(1+r)\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 \cos \theta_0] \} \\ \dot{x}_{II} = & \frac{1}{B_1} \{ (1+r)\bar{m}\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 + \dot{x}_0 \cos \theta_0 [\cos \theta_0 + \\ & \mu \operatorname{sgn}(\theta_0) \sin \theta_0] - r\bar{m}\dot{x}_0 \} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 B_1 由式 (19a) 表示; 累积冲量仍可由式 (14c) 表示.

2.2 不考虑碰撞面切向摩擦时的碰撞关系

不考虑碰撞面切向摩擦的情形比较简单. 按与上面类似的过程, 可方便地得到压缩 - 恢复切换时的速度为

$$\dot{\theta}_I = \frac{\bar{m}\dot{\theta}_0 + \dot{x}_0 \cos \theta_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0}, \quad \dot{x}_I = \dot{\theta}_I \cos \theta_0 \quad (21)$$

系统在斜碰撞前后的状态关系为

$$\dot{\theta}_{II} = r_1 \dot{\theta}_0 + r_2 \dot{x}_0, \quad \dot{x}_{II} = r_3 \dot{\theta}_0 + r_4 \dot{x}_0 \quad (22)$$

式中各系数为

$$\left. \begin{aligned} r_1 = & \frac{\bar{m} - r \cos^2 \theta_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0}, \quad r_2 = \frac{(1+r) \cos \theta_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0} \\ r_3 = & \frac{(1+r)\bar{m} \cos \theta_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0}, \quad r_4 = \frac{-r\bar{m} + \cos^2 \theta_0}{\bar{m} + \cos^2 \theta_0} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

且 r 可以由任意方法定义的正碰恢复系数, 并非局限于 Poisson 定义. 因系统动量关系与碰撞角度有关, 所以式 (23) 中 $r_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 均为碰撞角度的函数.

3 数值解与解析解的对比

针对本文的两自由度振动系统斜碰撞问题, 图 3 给出了由冲量步进算法得到的结果与上节分析结果的对比, 显示了两种方法的一致性. 图中实线和虚线分别代表摆角速度和振子速度的数值结果, 实心 and 空心符号 “■ ● ★ ▲” 分别表示摆角速度和振子速度在碰撞开始、碰撞结束、切向微滑动逆向和压缩 - 恢复阶段切换各时刻的解析结果; 除初始速度外, 其它参数取值为 $\bar{m} = 0.6$, $r = 0.6$, $\mu = 0.5$, $\theta_0 = 1.0$, $x_0 = 0$. 图中例举了上节分析的 3 种情况, 情况 1 的初始速度为 $(\dot{\theta}_0 = 0.8, \dot{x}_0 = -0.6)$, 相应的 $P_* = 0.832$ 和 $P_f = 0.922$, 此时切向微滑动在压缩阶段逆向; 情况 2 的初始速度为 $(1.3, -0.4)$,

$P_n = 1.353$, $P_f = 0.985$, $(1+r)P_f = 1.576$, 此时切向微滑动在恢复阶段逆向; 情况 3 的初始速度为 $(1.2, -0.1)$, $P_n = 1.249$, $(1+r)P_f = 1.070$, 此时切向微滑动不逆向, 保持初始方向至碰撞结束.

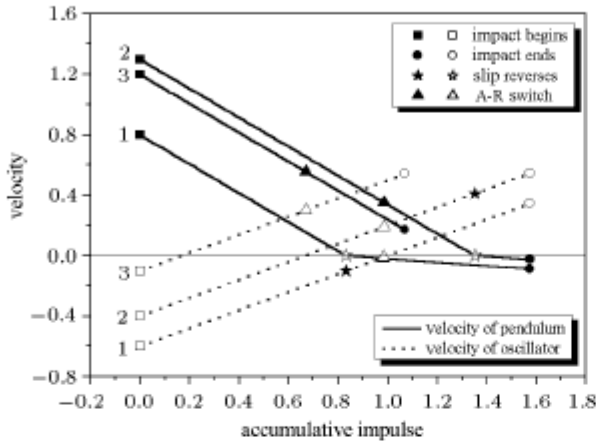


图 3 斜碰撞过程数值结果与解析结果的比较

Fig.3 A comparison between numerical and analytical results of oblique-impacts

4 结 论

在计入切向摩擦的斜碰撞中, 碰撞面上可能出现切向运动逆向, 导致系统在碰撞前后的状态关系无法简单地用常恢复系数表示. 针对这种情况, 本文提出了基于瞬间碰撞假设的冲量步进算法, 为处理各种斜碰撞问题提供了一种普遍适用的思路. 针对本文关心的两自由度斜碰撞振动系统, 该算法可以方便地求得系统在斜碰撞前后的状态变化. 作为对照, 本文给出了该两自由度系统斜碰撞过程所有的状态关系表达式, 冲量步进算法得到的数值结果与之完全一致.

参 考 文 献

- Shaw SW, Homes PJ. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 90(1): 129~155
- Ivanov AP. Impact oscillations: Linear theory of stability and bifurcation. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 178(3): 361~378
- Kemper SA, Babitsky VI. Excitation of vibro-impact systems by periodic impulses. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(2): 427~447
- Jin DP, Hu HY. Periodic impacting motions and their stability of a dual component system. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 13(4): 366~376
- 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰撞系统运动分析. *力学学报*, 2001, 33(6): 776~786 (Li Qunhong, Lu Qishao. Analysis to motions of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(6): 776~786 (in Chinese))
- Luo GW, Xie JH. Bifurcations and chaos in a system with impacts. *Physica D*, 2001, 148(3-4): 183~200
- Luo GW, Xie JH, Guo SHL. Periodic motions and global bifurcations of a two degree-of-freedom system with plastic vibro-impact. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 240(5): 837~858
- Babitsky VI. *Theory of Vibro-impact Systems and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 15~20
- 吕茂烈. 关于斜碰撞时的摩擦系数. *固体力学学报*, 1987, 9(3): 282~284 (Lu Maolie. Note on the coefficient of friction during an oblique collision. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1987, 9(3): 282~284 (in Chinese))
- Brach RM. Rigid body collisions. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1989, 56(1): 133~138
- Stronge WJ. Rigid body collisions with friction. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1990, 431(1881): 169~181
- Stronge WJ. Friction in collisions: Resolution of a paradox. *Journal of Applied Physics*, 1991, 69(2): 610~612
- Lewis AD, Rogers RJ. Experimental and numerical study of forces during oblique impact. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 125(3): 403~412
- 刘才山, 陈滨. 作大范围回转运动柔性梁斜碰撞动力学研究. *力学学报*, 2000, 32(4): 457~465 (Liu Caishan, Chen Bin. The oblique impact dynamic study for a flexible beam undergoing large overall motion. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(4): 457~465 (in Chinese))
- 杜珣编著. 现代数学引论. 北京: 北京大学出版社, 1996. 10 (Du Xun. Introduction to the Modern Mathematics. Beijing: Peking University Press, 1996. 10 (in Chinese))

ANALYSIS OF OBLIQUE IMPACT OF A VIBRATING SYSTEM OF TWO DEGREES OF FREEDOM¹⁾

Han Wei Hu Haiyan Jin Dongping

(*Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China*)

Abstract A crucial issue in studying the dynamics of an oblique-impact vibrating system is to establish a simple, but reasonable impact model and a right computational method for the relation between pre-impact state and post-impact state. In this paper, an attempt is made to propose a uniform numerical method so as to describe the oblique-impact process of two elastic bodies in a system of multiple degrees of freedom and to lay the groundwork for the dynamic analysis of the oblique-impact vibrating system.

When the instantaneous impact is assumed and the friction between two contact surfaces is taken into account, there may exist the reverse of relative micro-slip or its trend in tangential direction of the contact when oblique-impact occurs. Thus, the relation between pre-impact state and post-impact state cannot be described by using any simple impact laws, such as Newton's law or Poisson's law. To attack this problem, a numerical method, referred to as the incremental impulse method, is developed in this study. The method enables one to judge the direction of tangential micro-slip and to determine the state of the system at each incremental step of both normal impulse and tangential frictional impulse such that the possible reverse of relative micro-slip due to friction can be properly determined.

An oblique-impact vibrating system of two degrees of freedom, composed of a spring-pendulum and a mass-spring oscillator, is used to illustrate the numerical method and some technical details. To verify the numerical method, the relation between pre-impact state and post-impact state of this system is analyzed in closed form and all possible cases of the tangential impact motion are discussed in detail. The analytical relation between pre-impact state and post-impact state is derived in three cases when the reverse of micro-slip occurs within the normal approach phase or within the restitution phase in impact process, or it does not show up in the impact process. A comparison between the numerical results and the analytical results indicates very good agreement. Compared with the analytical expressions applicable to a few of special vibro-impacting systems, the numerical method provides a widely feasible way for solving the oblique-impact problems of various dynamic systems.

Key words oblique impact, friction, coefficient of restitution, numerical method

Received 30 June 2002, revised 26 May 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59905010), the Scientific Research Start-up Fund for the Returned Faculty of Ministry of Education, and the Research Fund for Young Faculty Members of NUAA.