

储液容器的三维流固耦合动力特性分析¹⁾

徐 刚* 任文敏* 张 维* H.G. Reimerdes† A. Dafnis† H. Korsch†

* (清华大学工程力学系, 北京 100084)

† (Institute for Light Structures, RWTH Aachen, D-52062 Aachen, Germany)

摘要 将储液容器流固耦合系统中的液体和容器分别视为理想可压缩流体和线弹性固体, 采用流体压力单元和固体壳单元对流固耦合系统进行有限元离散, 得到一个非对称的大型流固耦合有限元方程. 采用 Arnoldi 方法求解上面这个大型有限元方程的非对称特征值问题, 以得到储液容器的动力特性. 通过移频技术避免了处理零频问题, 并构造了迭代格式计算 Arnoldi 向量. 数值算例表明所用解法对于流固耦合系统都是非常有效的.

关键词 储液容器, 流固耦合, Arnoldi 方法

引 言

圆柱壳储液容器具有建造方便、受力合理和成本低廉等特点, 所以在许多工业部门中得到广泛地使用. 这种容器在静态受力时, 等效应力保持在塑性屈服应力以下, 容器就应该是安全的. 但是, 在 20 世纪, 这样设计的容器在许多国家的地震中都发生了严重的破坏, 造成容器中可燃或有毒的各种液体介质从容器中泄漏出来时, 从而引发火灾和环境污染等严重的灾害^[1]. 所以, 在设计储液容器时, 必须将其作为一个流固耦合系统的动力学问题进行研究.

动力特性参数, 如结构的固有频率和固有模态, 是地震工程中非常重要的参数. 当采用有限元方法分析流固耦合系统的动力学问题时^[2], 通常对结构采用位移作为基本变量, 而对于流体既可采用位移^[3~5]也可采用各种势函数^[6~8]作为基本变量. 当对流体采用位移进行描述时, 理想流体可以认为是一种剪切刚度为零的固体, 从而固体力学的各种方法便很自然地拓展到整个流固耦合系统. 但是, 剪切刚度为零在位移格式中会造成很多虚假的零能模态. 为了得到真实解, 必须花费大量的精力来消去这些零能模态. 另一种流体的格式是各种势函数, 如位移势、速度势、压力以及它们的各种混合格式. 如果采用压力来作为基本未知量, 则不仅方程的规模大大降低而且在理论上不存在零能模态. 但是, 采用结构位移和流体压力来分析流固耦合系统得到

的方程是非对称的, 这种大型非对称方程的求解是一个必须解决的问题.

对于大型非对称特征值问题的求解方法大致有 3 种^[9], 即 Bauer 子空间迭代方法、非对称的 Lanczos 方法和 Arnoldi 方法^[10]. Bauer 子空间迭代方法的收敛速度非常慢, 而非对称的 Lanczos 方法存在斜投影导致的中断现象. Arnoldi 方法是 Krylov 空间上的一种正交投影方法^[11], 是对称 Lanczos 方法的直接推广. 对称 Lanczos 方法投影后的矩阵是三对角矩阵, 而 Arnoldi 方法投影后的矩阵是一个上 Hessenberg 矩阵. Arnoldi 方法非常适合于求解大型非对称矩阵的部分特征值问题. 对于储液容器模型, 在地震工程中主要关心一些低阶的固有频率和固有模态, 所以采用 Arnoldi 方法来求解流固耦合系统的动力特性是非常合适的.

文中首先给出描述储液容器的位移(固体) - 压力(流体)格式流固耦合系统模型. 在介绍 Arnoldi 方法后, 导出了流固耦合系统的 Arnoldi 求解格式, 其中采用了移频技术来克服零频问题和迭代格式计算 Arnoldi 向量. 最后, 通过一个储液容器的实例检验了本文方法的有效性和可行性.

1 流固耦合模型

流固耦合模型(如图 1 所示)包含 3 部分, 即流体域 V_f 、固体域 V_s 和流固交界面 S_i . 其中流体部分还包含上部的自由边界 S_f 和底部的固壁边界 S_b ,

2002-09-16 收到第 1 稿, 2003-12-11 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(19872036)和德国 DAAD 奖学金资助项目.

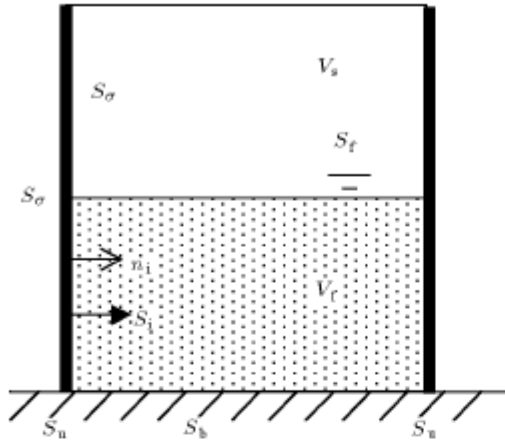


图 1 储液容器模型

Fig.1 Model of liquid-filled tank

而固体部分还包含底部位移边界条件 S_u 和力边界条件 S_σ . 描述流固耦合系统自由振动时的方程为

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_{ij,j} = \rho_s \ddot{u}_i, \quad \text{在 } V_s \text{ 内} \\ \text{固体} \quad & u_i = 0, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \\ & \sigma_{ij} n_j = 0, \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} & p_{,ii} - \dot{p}/c^2 = 0, \quad \text{在 } V_f \text{ 内} \\ \text{流体} \quad & p_{,i} \hat{n}_i = 0, \quad \text{在 } S_b \text{ 上} \\ & p_{,i} \hat{n}_i + \dot{p}/g = 0, \quad \text{在 } S_f \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{耦合面} \quad & \ddot{u}_i n_i + p_{,i} n_i / \rho_f = 0, \\ & \sigma_{ij} n_j = -p n_i, \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } S_i \text{ 上} \quad (3)$$

其中, u_i, \ddot{u}_i 和 σ_{ij} 分别表示固体的位移、加速度和应力. p, c 和 \hat{n}_i 分别表示流体的压力、波速和边界外法线. ρ_f 和 ρ_s 分别表示流体和固体的质量密度. n_i 表示固体外法线, 其与 \hat{n}_i 大小相等, 符号相反. 在流体耦合面上的连接条件(即方程(3))中, 第 2 个方程表示法向应力相等条件, 而第 1 个方程表示采用压力变量描述的位移连续性条件 $(u_i)_S = (u_i)_F$. 首先对 $(u_i)_S = (u_i)_F$ 两边取时间的二阶导数, 然后代入流体的动量方程 $-p_{,i} = \rho_f \ddot{u}_i$ 消去流体位移变量后, 便可得方程(3)中的第 1 个方程.

对于流固耦合方程的积分弱形式, 通过对固体结点位移 \mathbf{a} 和流体结点压力 \mathbf{p} 以及它们的插值函数 \mathbf{N} 的 $\tilde{\mathbf{N}}$, 便可以得到如下的流固耦合有限元动力学方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\Phi^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \frac{1}{\rho_f} \Phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{M}_s = \sum_e \int_{v^e} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_e \int_{v^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$\Phi = \sum_e \int_{s_i} \rho_f \mathbf{N}^T \mathbf{n}_i \tilde{\mathbf{N}} dV$$

$$\mathbf{M}_f = \sum_e \int_{v^e} \frac{1}{c^2} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} dV + \sum_e \int_{s_f} \frac{1}{g} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} dV$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_e \int_{v^e} \tilde{\mathbf{N}}_{,i}^T \tilde{\mathbf{N}}_{,i} dV$$

从方程(4)中可以看出, 虽然流体和固体的质量矩阵和刚度矩阵都是带状对称的, 但是耦合矩阵 Φ 的存在导致整个流固耦合方程是一个非对称的满阵方程. 从方程(4)可以导出流固耦合系统的特征方程

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \frac{1}{\rho_f} \Phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\Phi^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中, ω 为特征值, 在物理上对应的是流固耦合系统的固有频率值. Irons^[12] 提出过非对称方程(4)的一种对称化方法, 即

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_s & \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T & \hat{\mathbf{M}}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\hat{\mathbf{M}}_s = \mathbf{M}_s + \frac{1}{\rho_f} \Phi \mathbf{K}_f^{-1} \Phi^T$$

$$\hat{\mathbf{M}}_f = \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_f \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{M}_f$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\rho_f} \Phi \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{M}_f, \quad \hat{\mathbf{K}}_s = \mathbf{K}_s$$

$$\hat{\mathbf{K}}_f = \frac{1}{\rho_f} \mathbf{M}_f$$

对于方程(6), 可以采用各种成熟的对称特征值方法进行求解. 但是, 这种变换本身具有一定局限性. 其一, 需要进行耗时的大型矩阵 \mathbf{K}_f 求逆运算, 才能得到新矩阵 $\mathbf{E}, \hat{\mathbf{M}}_f$ 和 $\hat{\mathbf{M}}_s$; 其二, 进行 \mathbf{K}_f 求逆运算的前提是矩阵 \mathbf{K}_f 非奇异, 而如果流体模型中包含零频, 则这种变换是不可能的; 其三, 虽然通过移频技术可以克服 \mathbf{K}_f 的奇异问题, 但是移频同样使得方程(6)更复杂并更难求解^[13,14].

本文将对方程 (4) 不作对称化处理, 而直接采用非对称特征值的 Arnoldi 方法进行求解. 在 Arnoldi 方法中, 计算 Arnoldi 向量和 Hessenberg 矩阵的过程中不涉及矩阵的变换问题, 但仍需要采用移频技术来克服零频问题.

2 Arnoldi 方法

设矩阵 A 是 $m \times m$ 维非对称方阵, 而 x 是 m 维向量. 则矩阵 A 的标准特征值问题为

$$Ax = \lambda x \quad (7)$$

其中 λ 为特征值, 而 x 是特征向量.

Arnoldi 方法的基本思想是将原大型非对称矩阵 A , 通过构造一系列的 $n(n < m)$ 个 m 维的 Arnoldi 向量 $(c_i, i = 1, 2, \dots, n)$, 减缩为一个小型 $n \times n$ 维上 Hessenberg 矩阵 H , 即

$$AC = CH \quad (8)$$

其中

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

然后, 通过上 Hessenberg 矩阵 H 的特征值问题

$$H\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x} \quad (9)$$

的求解, 得到 H 的全部特征值 $\tilde{\lambda}$ 和特征向量 \tilde{x} . 最后, 便可以实现对原来矩阵 A 的部分特征值问题的求解, 即

$$\lambda = \tilde{\lambda}, \quad x = C\tilde{x}$$

由此可见, Arnoldi 方法的求解过程主要分两步, 即方程 (8) 中各矩阵的形成和方程 (9) 特征值问题的求解. 对于后者, 可以采用 QR 先求解特征值, 然后再采用反幂法求解特性向量. 而对于前者的求解, 过程相对复杂一些, 具体计算步骤如下:

1. 初始化

构造任意的 Arnoldi 向量 c_0 , 并使其满足 $c_0^T c_0 = 1$.

2. 循环计算 ($r = 0, 1, \dots, n-1$)

(1) 计算 $\tilde{c}_{r+1} = Ac_r$;

(2) 计算 $h_{ir} = c_i^T \tilde{c}_{r+1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 和 $\tilde{c}_{r+1} = \tilde{c}_{r+1} - \sum_{i=1}^r h_{ir} c_i$;

(3) 计算 $\varepsilon_{ir} = c_i^T \tilde{c}_{r+1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 和 $\tilde{c}_{r+1} = \tilde{c}_{r+1} - \sum_{i=1}^r \varepsilon_{ir} c_i$;

(4) 计算 $h_{r+1,r} = \sqrt{\tilde{c}_{r+1}^T \tilde{c}_{r+1}}$ 和 $c_{r+1} = \tilde{c}_{r+1}/h_{r+1,r}$.

在 Arnoldi 方法中, Arnoldi 向量 $(c_i, i = 1, 2, \dots, n)$ 是 Krylov 子空间上的一个正交基, 而 Hessenberg 矩阵 H 是矩阵 A 在这个子空间上的投影, 即

$$H = C^T AC \quad (10)$$

3 流固耦合系统特征值问题的 Arnoldi 求解方法

在流固耦合系统的流体自由液面上采用的边界条件是一个线性波条件, 因此, 流固耦合系统必然含有一个常压力零频模态. 对于这种含有零频的方程 (5), 需要采用移频技术处理, 即

$$\left(\begin{bmatrix} K_s & \frac{1}{\rho_f} \Phi \\ 0 & K_f \end{bmatrix} + \omega_o^2 \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -\Phi^T & M_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} = (\omega^2 + \omega_o^2) \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -\Phi^T & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中 ω_o^2 表示移频的大小, 其值为正. 在上面讨论的 Arnoldi 方法都是针对标准特征值问题的, 方程 (11) 转化为标准特征值形式为

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -\Phi^T & M_f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_s + \omega_o^2 M_s & \frac{1}{\rho_f} \Phi \\ -\omega_o^2 \Phi^T & K_f + \omega_o^2 M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} = (\omega^2 + \omega_o^2) \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix} \quad (12)$$

通过对比方程 (8) 和方程 (12), 可以发现

$$A = \begin{bmatrix} K_s + \omega_o^2 M_s & \frac{1}{\rho_f} \Phi \\ -\omega_o^2 \Phi^T & K_f + \omega_o^2 M_f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -\Phi^T & M_f \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2 + \omega_o^2}, \quad x = \begin{Bmatrix} a \\ p \end{Bmatrix}$$

在采用 Arnoldi 方法求解矩阵 A 特征值的过程中, 矩阵 A 只出现一次, 即计算

$$\tilde{c}_{r+1} = Ac_r \quad (13)$$

对于流固耦合系统, \tilde{c}_{r+1} 和 c_r 的表达式为

$$\tilde{c}_{r+1} = [\tilde{a}_{r+1} \quad \tilde{p}_{r+1}], \quad c_r = [a_r \quad p_r]$$

将 \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{c}}_{r+1}$ 和 \mathbf{c}_r 的表达式代入方程 (13) 后, 可得

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{K}_f + \omega_o^2 \mathbf{M}_f) \bar{\mathbf{p}}_{r+1} - \omega_o^2 \Phi^T \bar{\mathbf{a}}_{r+1} = \\ - \Phi^T \mathbf{a}_r + \mathbf{M}_f \mathbf{p}_r \\ (\mathbf{K}_s + \omega_o^2 \mathbf{M}_s) \bar{\mathbf{a}}_{r+1} + \frac{1}{\rho_f} \Phi \bar{\mathbf{p}}_{r+1} = \mathbf{M}_s \mathbf{a}_r \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

如果直接采用高斯消去法对方程 (14) 进行直接求解, 则需要大型矩阵的求逆运算和很大的内存空间, 则在计算上是非常不经济的。

另外一种求解方程 (14) 的方法是迭代求解。迭代方法是將耦合项 $\Phi^T \bar{\mathbf{a}}_{r+1}$ 和 $\Phi \bar{\mathbf{p}}_{r+1}$ 都作为已知载荷项移到方程的右边

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{K}_f + \omega_o^2 \mathbf{M}_f) \bar{\mathbf{p}}_{r+1}^j &= -\Phi^T \mathbf{a}_r + \mathbf{M}_f \mathbf{p}_r + \omega_o^2 \Phi^T \bar{\mathbf{a}}_{r+1}^{j-1} \\ (\mathbf{K}_s + \omega_o^2 \mathbf{M}_s) \bar{\mathbf{a}}_{r+1}^j &= \mathbf{M}_s \mathbf{a}_r - \frac{1}{\rho_f} \Phi \bar{\mathbf{p}}_{r+1}^j \\ (j &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

然后通过不断地迭代求解直到方程 (15) 的解能够收敛到指定的精度为止。方程 (15) 中的耦合项在单元水平上的表达式为

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{a}_r &= \sum_e \int_{s_i} \rho_f (\mathbf{N} \mathbf{a}_r)^T \mathbf{n}_i \tilde{\mathbf{N}} dV \\ \Phi^T \bar{\mathbf{a}}_{r+1}^{j-1} &= \sum_e \int_{s_i} \rho_f (\mathbf{N} \bar{\mathbf{a}}_{r+1}^{j-1})^T \mathbf{n}_i \tilde{\mathbf{N}} dV \\ \Phi \bar{\mathbf{p}}_{r+1}^j &= \sum_e \int_{s_i} \rho_f \mathbf{N}^T \mathbf{n}_i (\tilde{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{p}}_{r+1}^j) dV \end{aligned}$$

在方程 (15) 中, 耦合项完全等同于边界条件项, 不仅不存在矩阵求逆的问题, 而且不对耦合矩阵 Φ 进行存储, 从而节省内存空间。另外, 矩阵 \mathbf{K}_s , \mathbf{M}_s , \mathbf{K}_f 和 \mathbf{M}_f 的稀疏、带状和对称特性都可以在求解过程中得到充分利用。对于储液容器这里流固耦合问题来说, 流体和固体的耦合只发生在耦合界面上。在经过几次迭代以后, 流体压力和固体位移能够在耦合面上完全满足位移协调条件和应力平衡条件。

在利用矩阵 \mathbf{A} 得到 Arnoldi 向量 \mathbf{C} 和上 Hessenberg 矩阵 \mathbf{H} 后, 可以由 QR 方法解出这个上 Hessenberg 矩阵 \mathbf{H} 的所有特征值 $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n)$, 从而得到流固耦合系统 \mathbf{A} 的部分固有频率

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i} - \omega_o^2}$$

然后采用反幂法计算上 Hessenberg 矩阵的特征向量

$\tilde{\mathbf{x}}_i$ 后, 便可以得到流固耦合系统的部分特征模态

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{p}_i \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_i$$

4 数值算例

为了进行储液容器的动力特性分析, 本文编制了上述 Arnoldi 方法和流固耦合迭代求解模型的计算程序。为了检验这些方法的有效性, 本文用该程序对文献 [15] 中一个具有实验解和计算解的储液容器模型进行实例计算。

实例容器模型如图 2 所示, 容器的上部自由, 下部固定在地面上。容器和液体的材料参数如下所示。

容器: 弹性模量 $E = 2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; 泊松比 $\nu = 0.3$; 质量密度 $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ 。

液体: 波速 $c = 1414.2 \text{ m/s}$; 质量密度 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ 。

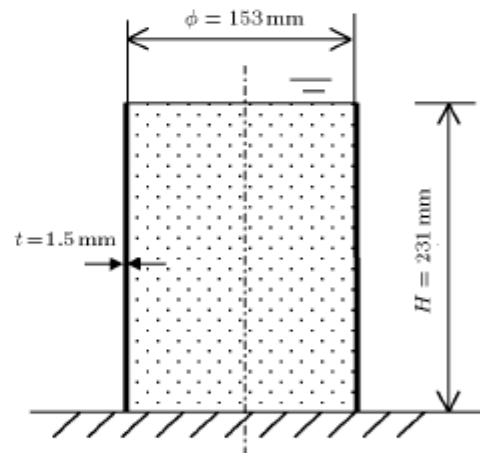


图 2 圆柱形储液容器模型

Fig.2 A circular liquid-filled tank

储液容器的网格划分如图 3, 其中容器采用 4 结点四边形壳体单元进行有限元离散, 而液体采用 8 结点压力体单元进行有限元离散。4 结点壳体单元是由采用减缩积分方案的平面应力单元和一个 Mindlin 板单元复合而成。

采用 Arnoldi 方法对上述模型进行两次计算, 结果如图 4 所示。第 1 次取 Arnoldi 向量的个数为 250, 图中的实线表示第 1 次得到的结果, 而图中的虚线表示第 2 次计算时 Arnoldi 向量个数为 200 时

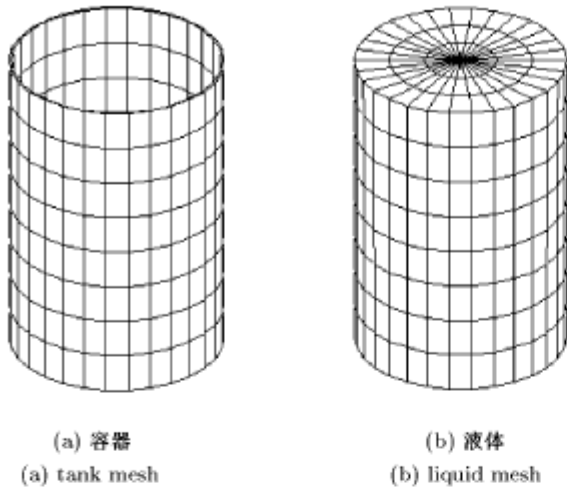


图 3 储液容器的网格划分

Fig.3 The computational mesh of liquid filled tank

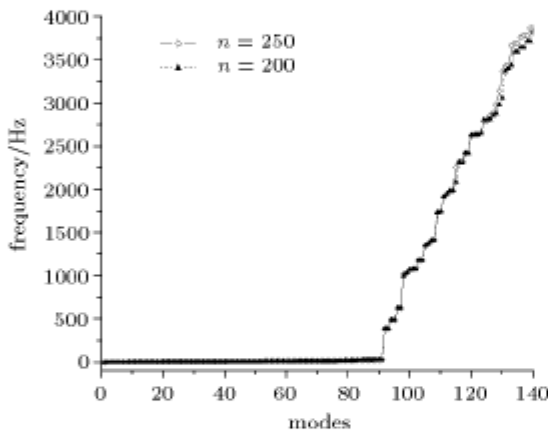


图 4 计算得到的各阶模态固有频率大小

Fig.4 Natural frequencies of the computational modes

的结果. 通过两次计算结果比较, 可以看出尽管所取的 Arnoldi 向量个数不同, 从第 1 阶模态到第 111 阶模态的固有频率计算结果都非常一致. 其中前 92 阶模态为同一量级的低价模态, 而 93 阶到 111 阶模态的频率值为差异很大的高价模态, 模态图见图 5~图 12. 图中左边为容器的变形模态图, 右边为流体的压力分布图. 流体压力的大小是通过垂直方向的位移分量来显示的. ω 表示该模态的固有频率值.

上述储液容器的流固耦合模态大致上可分为 3 类. 第 1 类是图 5 中的零频常压力模态, 即流体所有结点上的压力值相同, 而固体是在这个均布内压下变形. 第 2 类是流体的低频晃动模态, 如图 6~图 8 所示, 其特点是自由液面上的流体结点压力变化比较大, 而固体随着晃动压力而变形. 第 3 类是固体的高阶振动模态, 如图 9~图 12 所示, 其特点是能量集中在固体的变形上, 而流体的内部结点随着固体

变形相应地产生压力变化. 除了上面这些模态外, 理论上还存在内部流体的可压缩性形成的模态, 但是由于流体几乎是不可压缩的, 这种模态的频率值会非常地高. 在 Arnoldi 方法中, 只有在其它低价模

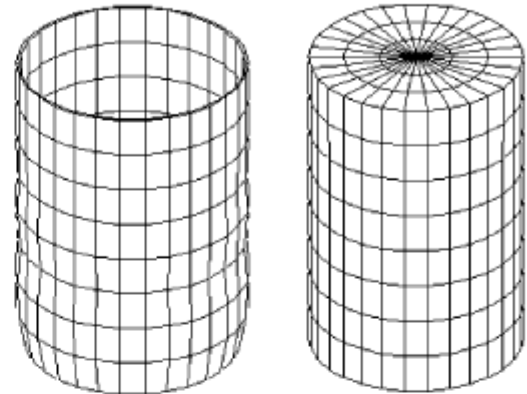


图 5 第 1 阶模态 ($\omega = 0.0\text{Hz}$)

Fig.5 The 1st mode with $\omega = 0.0\text{Hz}$

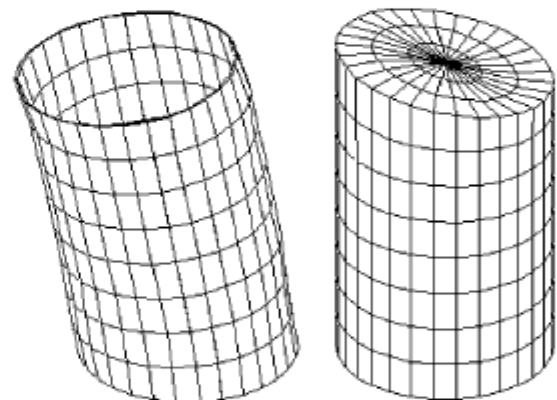


图 6 第 2 阶和第 3 阶模态 ($\omega = 2.284\text{Hz}$)

Fig.6 The 2nd and 3rd modes with $\omega = 2.284\text{Hz}$

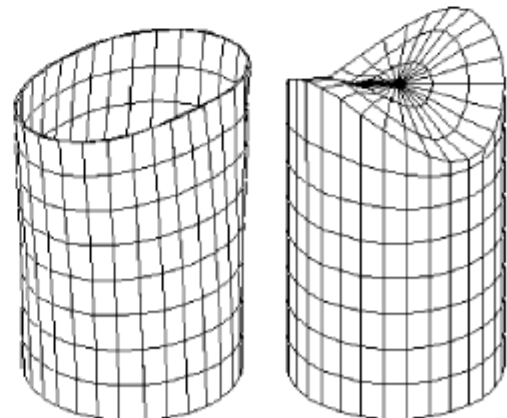


图 7 第 4 阶和第 5 阶模态 ($\omega = 3.268\text{Hz}$)

Fig.7 The 4th and 5th modes with $\omega = 3.268\text{Hz}$

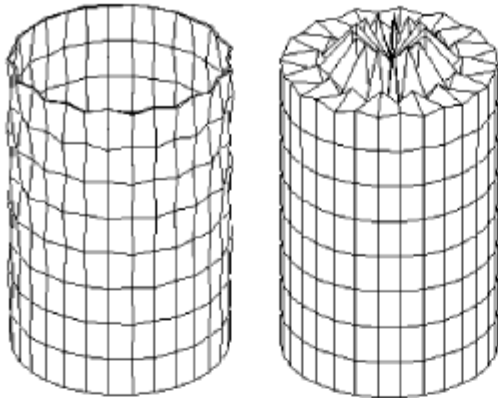


图 8 第 91 阶模态 ($\omega = 32.91 \text{ Hz}$)

Fig.8 The 91st mode with $\omega = 32.91 \text{ Hz}$

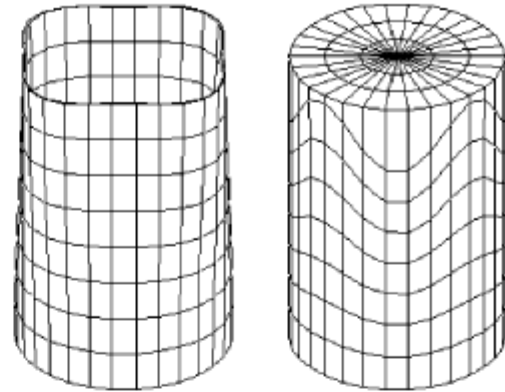


图 11 第 96 阶和第 97 阶模态 ($\omega = 653.9 \text{ Hz}$)

Fig.11 The 96th and 97th modes with $\omega = 653.9 \text{ Hz}$

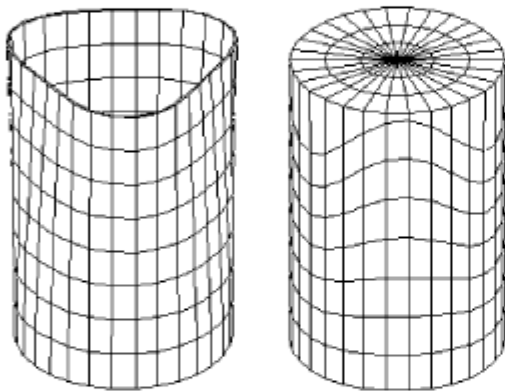


图 9 第 92 阶和第 93 阶模态 ($\omega = 393.7 \text{ Hz}$)

Fig.9 The 92nd and 93rd modes with $\omega = 393.7 \text{ Hz}$

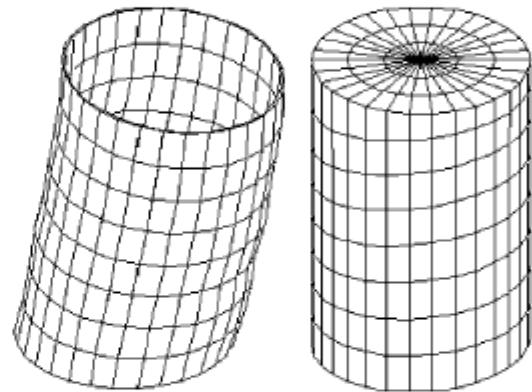


图 12 第 98 阶和第 99 阶模态 ($\omega = 1036.4 \text{ Hz}$)

Fig.12 The 98th and 99th modes with $\omega = 1036.4 \text{ Hz}$

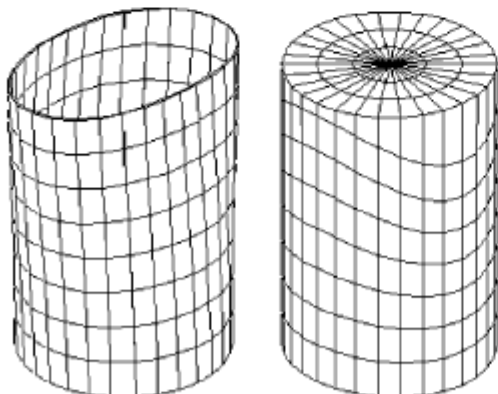


图 10 第 94 阶和第 95 阶模态 ($\omega = 488.9 \text{ Hz}$)

Fig.10 The 94th and 95th modes with $\omega = 488.9 \text{ Hz}$

态都计算出来后，这种高价模态才能被精确计算出来。在上面这些模态中，经常出现两个相邻模态的频率相同现象，是由三维模型的轴对称特征造成的，从数学上来说是因为特征方程具有重根。

在文献 [15] 中，对图 2 的模型分别采用实验方法和计算方法进行了研究。但文献 [15] 只研究了耦合系统中的结构振动模态，而忽略流体晃动模态和振动模态。为了方便比较，在表 1 中给出了本文的结构振动模态计算结果和文献 [15] 中的实验和计算结果。为了分析耦合同非耦合的差别，在表 2 中给出了容器在不含流体情况下的本文计算结果、文献 [15] 中的实验结果和计算结果。由表 1 和表 2 可以看出耦合系统中的流体对固体振动造成的影响。

表中左边 1 栏中的数字 m 和 n 分别表示模态的轴向波数和周向波数，而模态号一栏表示该模态在本文计算结果中依频率大小排列的位置序号。

表 1 充满液体时容器的固有频率

Table 1 The frequencies of the tank with full liquid

Mode m	Mode n	Mode number	Computational results (f_1)	Computational results ^[15] (f_2)	Error (%) ($f_2 - f_1$)/ f_2	Experimental results ^[15] (f_3)
1	3	92, 93	393.7	400.6	1.753	388
1	2	94, 95	488.9	482.1	1.391	421
1	4	96, 97	653.9	633.2	3.166	628
1	1	98, 99	1036.4	1038.6	0.212	—

表 2 无液体时容器的固有频率

Table 2 The frequencies of the tank without liquid

Mode m	Mode n	Mode number	Computational results (f_1)	Computational results ^[15] (f_2)	Error (%) ($f_2 - f_1$)/ f_2	Experimental results ^[15] (f_3)
1	3	1, 2	612.4	633.6	1.753	616
1	2	3, 4	815.6	814.6	1.391	708
1	4	5, 6	961.8	947.6	3.166	945
1	1	11,12	1829.0	1826.6	0.212	—

从表 1 和表 2 可以看出, 本文的计算结果同文献 [15] 的计算结果相当一致, 而且除了模态 ($m = 1, n = 2$) 外, 本文的计算结果同实验结果也很一致. 计算结果和实验结果在模态 ($m = 1, n = 2$) 的差异, 无论在充满液面时还是无液体时都存在. 在文献 [15] 中, 对于无液体时的容器, 理论解同计算解符合非常好. 这说明, 实验方法是造成这一差异的主要原因.

5 结 论

本文的主要工作是采用 Arnoldi 方法来分析储液容器的动力特性问题. 对于计算中涉及到的零频问题和 Arnoldi 向量的计算问题, 分别通过引入移频技术和构造迭代求解格式进行相应地处理.

储液容器的实例计算表明, 本文的计算结果同实验结果非常一致, 这证明了采用 Arnoldi 方法求解储液容器动力特性问题的正确性. 在采用迭代格式计算 Arnoldi 向量时, 一般只要 4 个迭代步就可以使计算结果收敛到足够高的计算精度. 这说明本文构造出 Arnoldi 向量的迭代求解格式, 在计算效率方面同样具有较好的性能.

计算结果还表明, 液体对容器的固有频率具有很大的影响. 在本文的算例中, 充满液体时容器的固有频率相对无液体的容器要低很多. 所以在工程上进行储液容器设计时, 必须认真考虑这种流固耦合作用.

参 考 文 献

1 Rammerstorfer FG, Sharf K, Fisher FD. Storage tanks un-

- der earthquake loading. *Applied Mechanics Reviews*, 1990, 43: 261~282
- 2 Zienkiewicz OC, Bettess P. Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 13: 1~16
- 3 Belytschko TB, Kennedy JM. A fluid-structure finite element method for the analysis of reactor safety problems. *Nuclear Engineering Design*, 1976, 38: 71~81
- 4 Bathe KJ, Hahn WF. On transient analysis of fluid-structure systems. *Computer & Structures*, 1979, 10: 383~391
- 5 Olson LG, Bathe KJ. A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid-structure systems. *Nuclear Engineering Design*, 1983, 76: 137~151
- 6 Olson LG, Bathe KJ. Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computer & Structures*, 1985, 21: 21~32
- 7 Liu WK, Uras RA. Variational approach to fluid-structure interaction with sloshing. *Nuclear Engineering Design*, 1988, 106: 69~85
- 8 Olson L, Vandini T. Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions. *Computer & Structures*, 1989, 33: 679~687
- 9 Saad Y. Numerical solution of large nonsymmetric eigenvalue problems. *Computer Physics Communications*, 1989, 53: 71~90
- 10 Arnoldi WE. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Ewart Appl Math*, 1951, 9: 17~29
- 11 Saad Y. Krylov Subspace methods for solving unsymmetric linear systems. *Mathematics of Computation*, 1981, 37: 105~126
- 12 Irons BM. Role of part inversion in fluid-structure problem

- with mixed variable. *J AIAA*, 1970, 7: 568
- 13 Petyt M, Lim PS. Finite element analysis of the noise inside a mechanically excited cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 13: 109~122
- 14 Petyt EH, Gorman GF, Smith DA. Acoustoelastivity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 52: 519~542
- 15 Mazuch T, Horacek J, Trnka J, et al. Natural modes and frequencies of a thin damped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 193: 669~690

DYNAMIC CHARACTERISTIC ANALYSIS OF LIQUID-FILLED TANKS AS A 3-D FLUID-STRUCTURE COUPLING SYSTEM¹⁾

Xu Gang* Ren Wenmin* Zhang Wei* H. G. Reimerdes† A. Dafnis† H. Korsch†

^{*}(Dept. of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

[†](Institute for Light Structures, RWTH Aachen, D-52062 Aachen, Germany)

Abstract In this paper, the 3-D liquid-filled tank is considered as a Fluid-Structures Interaction (FSI) system that consists of the ideal, compressible fluid with free surface and the linear, elastic solid with thin thickness. This system is simulated with Finite Element (FE) method. In the FE model, the liquid is discretized by pressure body element and the tank is characterized by displacement shell elements. Since the coupling equation of this FSI system is unsymmetric, Arnoldi's method is adopted to get the dynamic characteristics of the liquid-filled tank. In addition, the shift-frequency technique is introduced to solve the problem of zero frequency and an iteration method is adopted to make the computation both accurate and economical. A numerical simulation of a liquid-filled tank is carried out to confirm the effectiveness of these methods.

Key words liquid-filled tanks, fluid-structure interaction (FSI), Arnoldi's method

Received 16 September 2002, revised 11 December 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19872036) and DAAD.