

# 液饱和多孔介质中三维应力波的传播<sup>1)</sup>

刘凯欣 刘 颖

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

**摘要** 为了深入研究液饱和多孔介质中应力波的传播, 提出了三维两相细观计算模型. 基于此模型, 应用 Galerkin 余量法并计及流-固耦合界面的耦合效应, 利用直接耦合的技术, 开发了三维流-固混合显式动力有限元计算程序. 在此基础上对冲击载荷作用下液饱和多孔介质中三维应力波的传播现象进行了数值模拟, 并详细讨论了孔隙率, 孔隙形状等因素对应力波传播主导波形的影响.

**关键词** 液饱和多孔介质, 两相模型, 流-固耦合, 显式动力有限元法, 应力波

## 引 言

含液多孔介质中应力波传播特性的研究在岩土工程、地震工程等工程领域具有重要的科学意义. 目前, 液饱和多孔介质性质的主要研究方法可以分为两大类: 一是从宏观角度研究其力学性能, 如 Biot 理论<sup>[1~4]</sup>, 混合物理理论<sup>[5,6]</sup>及其他理论<sup>[7,8]</sup>等; 二是从微观结构出发建立相应的控制方程, 如伪混合物理理论<sup>[9]</sup>等. 通过对比可以发现, 这些研究方法无论从宏观角度还是微观角度出发, 其本质都是用一个模糊化的替代模型来代替液饱和多孔介质细观结构在控制空间中的分布, 进而用连续介质力学的方法求解, 因此它们之间没有本质的区别, 且在适当的假设条件下, 可退化得到同样的形式<sup>[10~12]</sup>. 因而, 尽管进行了大量的实验工作验证其理论上的正确性<sup>[13,14]</sup>, 而且这些理论对液饱和多孔介质宏观特性的诠释能够满足工程应用的需要, 但由于其研究对象不是实际的液饱和多孔介质, 而是替代模型, 因此它们不能充分地揭示不同相之间的作用机理. 另外, 对于替代模型中描述物理现象的控制方程, 特别是本构方程, 需要针对特殊的情况建立. 但是, 用上述方法来建立能够完全反映材料物性的本构方程是不可能的, 而液饱和多孔介质中流体相的存在必将使本构方程的建立更加复杂. 事实上, 在细观的层次观察液饱和多孔介质, 可以发现固体相中存在具有复杂几何特性的孔隙或裂缝, 流体存在于其中, 固体骨架和孔隙流体遵循各自的力学法则, 并且通过二者在交界面处的耦合作用相互影响, 共同参与

变形. 可见, 含液多孔介质的力学性能不仅仅取决于材料的力学行为, 还与它的内结构息息相关. 为了揭示不同相以及内结构对冲击载荷作用下液饱和多孔介质中动力演化过程的影响, 特别是流体相在破坏, 后破坏以及固相液化中的作用, 建立能够反映不同相之间作用机理的两相模型具有重要的理论和实际意义.

基于以上的讨论, 本文提出了三维两相计算模型. 在此模型中, 固体相和流体相被处理成完全独立的两相, 通过交界面处的流固耦合作用相互联系, 使其能与真实多孔介质中流体相和固体相间的作用机理相吻合. 在此基础上, 应用 Galerkin 加权残数余量法并考虑流固交界面处的耦合作用, 采用直接耦合的方法, 开发了三维流-固混合显式动力有限元计算程序. 利用该程序对液饱和多孔介质中应力波的传播进行了数值模拟, 并将利用本文模型计算得到的波速与基于 Biot 理论得到的波速, 以及纯固体和流体中应力波的波速进行了对比. 进而详细讨论了孔隙率, 孔隙形状等对应力波传播主导波形的影响.

## 1 计算模型

液饱和多孔介质内结构和几何特性十分复杂. 为了使问题简单化, 采用了相对规则的孔隙排布形式. 如图 1 所示, 本计算模型的液饱和多孔介质由固体相和流体相交叉搭叠而成, 其中内部流体孔隙相互导通, 流体可以在固体骨架的孔隙中流动. 在模型建立中, 通过调整固体骨架列数、层数以及固

2002-11-29 收到第一稿, 2003-05-29 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19832010, 10025212).

体骨架和孔隙横截面的尺寸,可以得到具有不同排布、不同孔隙率的模型.在本模型中,孔隙率为

$$n = \frac{A_f}{A_s + A_f} \quad (1)$$

其中  $A_f$  和  $A_s$  分别为单个流体孔隙和固体骨架的横截面积.本文中下标  $s$  和  $f$  分别代表固体骨架和孔隙流体.

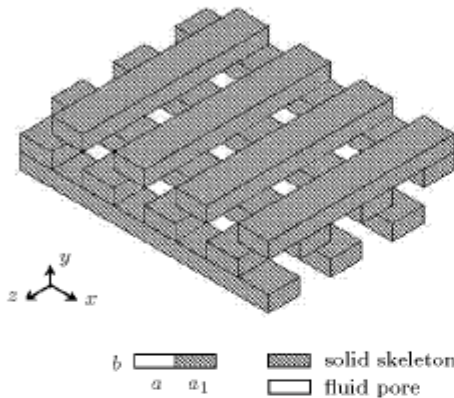


图 1 三维两相液饱和和多孔介质计算模型

Fig.1 3D model for fluid-saturated porous media

### 2 基本方程

液饱和多孔介质中的应力波传播问题是位移场和流体场的耦合问题.固体相的基本方程为

$$\text{运动方程 } \mathbf{L}_s^T \boldsymbol{\sigma} + \rho_s \mathbf{b} = \rho_s \ddot{\mathbf{u}} + \mu \dot{\mathbf{u}} \quad (2a)$$

$$\text{本构方程 } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2b)$$

$$\text{几何方程 } \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (2c)$$

$$\text{边界条件 } u_i = \bar{u}_i \quad (\text{边界 } S_u) \quad (2d)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{边界 } S_\sigma) \quad (2e)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}$  为固体骨架的应力张量,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为固体骨架的应变张量,  $\rho_s$  为固体骨架的密度,  $\mathbf{b}$  为体力张量,  $\mathbf{u}$  为固体骨架的位移场,  $\mathbf{D}$  为固体骨架的弹性系数矩阵,黑点表示对时间  $t$  的偏导数,  $\mathbf{L}_s^T$  为微分算子.

如无特殊声明,文中  $i, j = 1, 2, 3$  分别对应于  $x, y, z$ .

对于孔隙流体,假定<sup>[15]</sup>:

- 1) 孔隙流体可压缩,即流体密度随压力变化;
- 2) 流体无黏性,即无黏性耗散;
- 3) 无平均流动;
- 4) 流体中平均密度和压力均匀分布.

基于以上假设,流体相的波动方程为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0 \quad (3)$$

其中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子,  $P$  为孔隙流体压力,声波波速  $c = \sqrt{K_f/\rho_f}$ ,其中  $K_f$  为流体的体积模量,  $\rho_f$  为流体平均密度.

根据流体动量方程,在流固交界面  $S$ ,流体法向压力梯度和固体骨架的法向加速度之间满足<sup>[16]</sup>

$$n \nabla P = -\rho_f n \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4)$$

其中  $n$  为交界面单位法向矢量.

### 3 显式动力有限元方程的建立

耦合场分析中,通常使用两种不同的方法计算耦合项,即间接法和直接法.在本文的程序编制中,采用了直接求解的技术.

采用 8 节点等参单元离散控制空间.  $\mathbf{u}_e$  和  $p_e$  分别为固体单元的节点位移矢量和流体单元的节点压力矢量.对于交界面处的单元,即流固耦合单元,其节点同时具有压力和位移自由度.应用 Galerkin 加权残数余量法离散方程 (2) 和 (3),离散后形式为

$$\mathbf{M}_s^e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_s^e \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_s^e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}^e \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_f^e \ddot{p}_e + \mathbf{K}_f^e p_e + \rho_f \mathbf{R}_e^T \ddot{\mathbf{u}}_e = 0 \quad (6)$$

其中  $\mathbf{M}_s^e, \mathbf{C}_s^e, \mathbf{K}_s^e$  和  $\mathbf{F}_s^e$  分别为固体单元的质量矩阵,阻尼矩阵,刚度矩阵以及载荷矩阵.对于流体单元,单元质量矩阵  $\mathbf{M}_f^e = c^{-2} \int_{V_e} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f dV$ ,单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_f^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{B}_f dV$ ,  $\mathbf{B}_f = \mathbf{L}_f \mathbf{N}_f$  为流体应变矩阵,  $\mathbf{L}_f$  为微分算子,耦合矩阵为  $\mathbf{R}_e = \int_S \mathbf{N}_f \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS$ ,  $V_e$  为单元的体积,  $\mathbf{N}_s$  和  $\mathbf{N}_f$  分别为位移和压力的形函数矩阵.

考虑到流固交界面处的耦合效应,将交界面处的流体压力加入方程 (5) 并与方程 (6) 结合,液饱和和多孔介质两相计算模型整体的有限元离散形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fs}^e & \mathbf{M}_f^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{p}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{p}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^e & \mathbf{K}_{fs}^e \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ p_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中单元耦合质量矩阵  $\mathbf{M}_{fs}^e = \rho_f \mathbf{R}_e^T$ ,单元耦合刚度矩阵  $\mathbf{K}_{fs}^e = -\mathbf{R}_e$ .

采用中心差分对方程 (9) 在时间域积分,物理量  $\mathbf{a}$  的速度和加速度矢量可以表示为

$$\dot{\mathbf{a}}_t = (\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_{t-\Delta t}) / (2\Delta t) \quad (8a)$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_t = (\mathbf{a}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{t+\Delta t})/\Delta t^2 \quad (8b)$$

其中  $\mathbf{a} = \{u_x, u_y, u_z, p\}$ ;  $\mathbf{a}_{t-\Delta t}, \mathbf{a}_t$  和  $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$  分别为  $\mathbf{a}$  在时刻  $t - \Delta t, t$  和  $t + \Delta t$  的值,  $\Delta t$  为时间步长. 将方程 (8) 带入方程 (7), 并采用实时修正, 方程 (7) 可以重写为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_s^e \mathbf{u}_{t+\Delta t}^e &= \mathbf{F}_t^e - (\mathbf{K}_s^e - c_2 \mathbf{M}_s^e) \mathbf{u}_t^e - \\ & (c_0 \mathbf{M}_s^e - c_1 \mathbf{C}_s^e) \mathbf{u}_{t-\Delta t}^e - \mathbf{K}_{fs}^e \mathbf{p}_t^e \\ \mathbf{M}_f^e \mathbf{p}_{t+\Delta t}^e &= -(\mathbf{K}_f^e - c_2 \mathbf{M}_f^e) \mathbf{p}_t^e - \\ & c_0 \mathbf{M}_f^e \mathbf{p}_{t-\Delta t}^e - \mathbf{M}_{fs}^e \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}^e \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $\bar{M}_s^e = c_0 \mathbf{M}_s^e + c_1 \mathbf{C}_s^e$  为等效质量矩阵,  $c_0 = 1/\Delta t^2, c_1 = 1/(2\Delta t), c_2 = 2c_0$ . 方程 (9) 即为固液混合显式动力有限元的差分格式.

中心差分为条件收敛. 为了保证计算的稳定性, 在不计及体积黏度耗散时, 时间步长必须满足

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = l_e/c \quad (10)$$

其中  $l_e = V_e/A_{e\max}$  为特征长度,  $A_{e\max}$  为最大边所在面的面积,  $c$  取纵波波速.

### 4 数值结果和分析

基于本文提出的模型, 对液饱和多孔介质中应力波的传播进行了数值模拟. 计算中固体骨架为各向同性, 杨氏模量  $E = 30 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 固体骨架和孔隙流体的密度分别为  $\rho_s = 2400 \text{ kg/m}^3$  和  $\rho_f = 1040 \text{ kg/m}^3$ , 流体声速为  $v = 1460 \text{ m/s}$ . 因为介质的端面 ( $z = 0$ ) 受冲击载荷, 如图 2 所示, 其初始条件和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} = v_i^s = v_i^f = p = 0, \quad \text{当 } t = 0 \\ \sigma_y = -p(x, t) = \\ -p_0 H(a-x)(a-y) \exp(-\alpha t^2) \sin(\beta t) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $H(\cdot)$  为 Heaviside 函数,  $p_0 = 100 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 3.886 \times 10^{10} \text{ s}^{-2}, \beta = 6727 \text{ s}^{-1}, a = 10 \text{ mm}$ . 计算区域为  $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ , 单元尺寸为  $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ , 总单元数为 1000000.

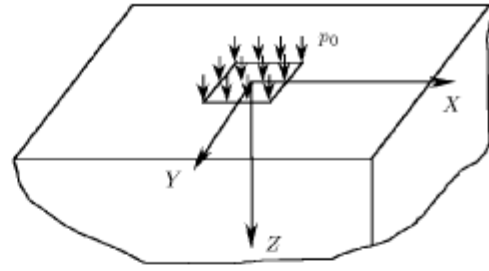


图 2 计算模型示意图

Fig.2 The diagrammatic sketch for calculating model

图 3 和图 4 分别为平面  $z = 0$  上应力  $\sigma_x$  在时刻  $t = 50 \mu\text{s}$  和  $t = 60 \mu\text{s}$  时的分布. 固体骨架和孔隙的横截面积均为  $a \times b = a_1 \times b = 2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  (孔隙率为 0.5). 从图中可以清楚地看出在多孔介质中存在三种主要的波: 快波, 慢波和剪切波. 在当前的计算模型中, 慢波和剪切波显示出局部震荡. 快波有所弱化且波形较为光滑. 其受流体局部效应的影响较小.

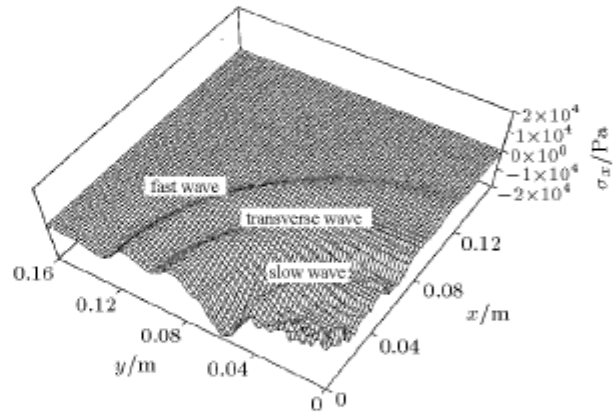


图 3  $t = 50 \mu\text{s}$  时应力  $\sigma_x$  的分布

Fig.3 Distribution of stress  $\sigma_x$  at  $t = 50 \mu\text{s}$

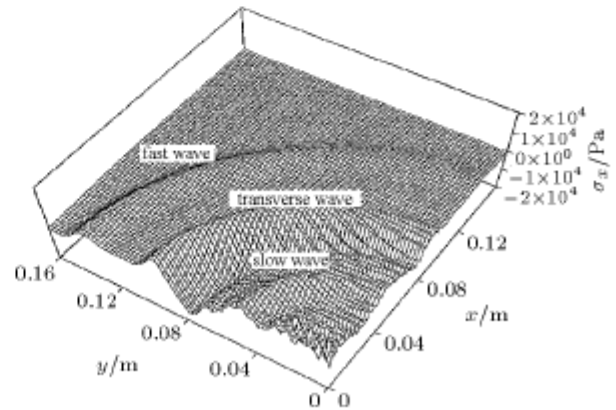


图 4  $t = 60 \mu\text{s}$  时应力  $\sigma_x$  的分布

Fig.4 Distribution of stress  $\sigma_x$  at  $t = 60 \mu\text{s}$

为了研究孔隙形状对应力波传播特性的影响,图 5 给出了时刻  $t = 50 \mu\text{s}$  时平面  $z = 0$  上应力  $\sigma_x$  的分布情况. 此时固体骨架和孔隙的界面尺寸分别为  $a \times b = a_1 \times b = 2 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  (孔隙率为 0.5). 对比图 4 和图 5 表明, 随着固体骨架横截面高度  $b$  的增加, 快波的波速基本不发生变化, 但是应力幅值减小且显示出局部震荡. 慢波和剪切波的波速均有所降低, 但应力幅值增加, 局部效应加强.

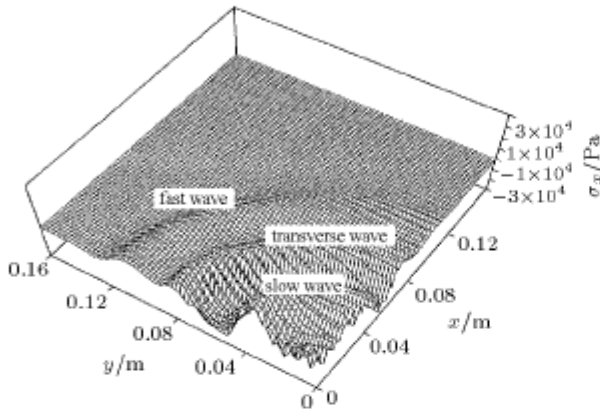


图 5  $t = 60 \mu\text{s}$  时应力  $\sigma_x$  的分布

Fig.5 Distribution of stress  $\sigma_x$  at  $t = 60 \mu\text{s}$

图 6 给出了  $t = 50 \mu\text{s}$  时平面  $z = 0$  上应力  $\sigma_x$  分布情况. 其中固体骨架横截面尺寸为  $a \times b = 6 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ , 流体孔隙横截面尺寸为  $a_1 \times b = 2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  (孔隙率为 0.25). 对比图 4 和图 6 表明应力波的主导波形不受孔隙率变化的影响. 但是随着固体骨架横截面宽度  $a$  的增加, 应力幅值有所降低, 局部震荡减弱. 快波的波速有所增加, 而慢波的波速降低. 剪切波的波速几乎不发生变化.

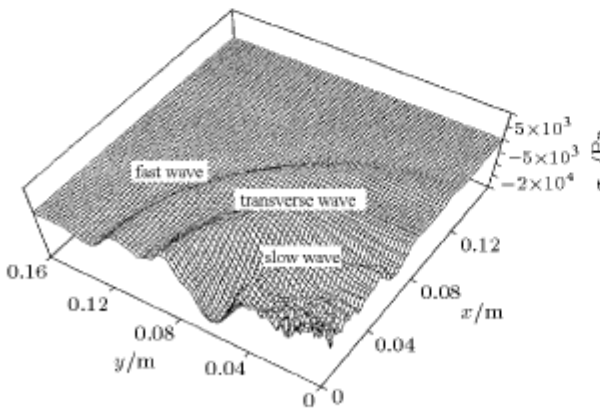


图 6  $t = 50 \mu\text{s}$  时应力  $\sigma_x$  的分布

Fig.6 Distribution of stress  $\sigma_x$  at  $t = 50 \mu\text{s}$

表 1 给出了根据本文的模型计算所得的应力波波速与基于 Biot 理论得到的波速, 以及纯固体和流

体中应力波波速的对比. 计算中, 取固体骨架体积模量  $K_s = 12.5 \text{ GPa}$ , 流体体积模量  $K_f = 2.22 \text{ GPa}$ , 其余参数与前面给出的参数相同. 通过对比表 1 中的各波速可发现, 基于本模型所得的快波比纯固体中的纵波的波速慢, 而慢波的波速比纯流体中声波的波速快. 这是本模型中流固耦合界面处的耦合效应的作用结果. 流体场和位移场通过交界面相互影响, 相互牵制, 进而使得快波的波速有所降低, 而慢波的波速有所增加. 从表中可以看出, 基于 Biot 理论得到的波速均比基于本模型所得到的快波, 剪切波和慢波的波速快, 甚至也快于纯固体和流体中的波速. 此差别正是 Biot 理论对液饱和多孔介质均化处理的结果. 参考文献 [17] 可以看出, 在计及流体场对位移场的作用时, 替代模型的弹性参数增加, 而平均密度降低. 这必然增加了应力波的传播速度. 计算结果的对比进一步表明 Biot 理论的研究对象为真实液饱和多孔介质的替代模型, 尚有缺陷. 探索能反映液饱和多孔介质的真实性质的模型具有重要的意义.

表 1 速度比较 (单位: m/s)

Table 1 Comparison of the velocities (unit: m/s)

Kinds of waves	Pure solid	Our model	Biot theory	Pure fluid
longitudinal wave (L1)	2 900	2 800	3 299	
transverse wave (S)	2 112	2 100	2 362	
longitudinal wave (L2)		1 500	1 583	1 460

## 5 结 论

数值计算结果表明, 本文中提出的两相三维多孔液饱和介质模型在研究液饱和多孔介质中应力波的传播问题上是有用的. 这个模型与真实的多孔介质中固液间的作用机理相吻合, 并可以方便地采用不同的固体及流体的基本方程来研究复杂载荷作用下多孔介质的动力响应特征. 从计算结果可以看出, 孔隙的形状和尺寸直接影响应力波在多孔介质中的传播特性. 考虑到孔隙分布和形状的复杂性, 如何建立更加合理的构形成为本文提出的模型的关键问题之一. 但是随着随机建模技术的成熟, 这个问题可以得到较好解决.

## 参 考 文 献

- 1 Biot MA. The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids: I. Low-frequency range. *J Acoust Soc Am*, 1956, 28: 168~178

- 2 Biot MA. The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solids: II. High-frequency range. *J Acoust Soc Am*, 1956, 28: 179~191
- 3 Biot MA. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33: 1482~1498
- 4 Biot MA. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J Acoust Soc Am*, 1962, 34: 1254~1264
- 5 Bowen RM. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int J Eng Sci*, 1982, 20: 697~735
- 6 de Boer R. Development of porous media theories—A historical review. *Transport Porous Media*, 1992, 9: 155~164
- 7 门福录. 波在饱和孔隙弹性介质中的传播. 地球物理学报, 1965, 4(2): 107~114 (Men Fulu. Wave propagation in a porous, saturated elastic medium. *Acta Geophysica Sinica*, 1965, 4(2): 107~114 (in Chinese))
- 8 Li Xiangyue, Li Xiangwei. On the thermoelasticity of multicomponent fluid-saturated reacting porous media. *Int J Engng Sci*, 1992, 30: 891~912
- 9 Schrefler BA. Mechanics and thermodynamics of saturated/unsaturated porous materials and quantitative solutions. *Appl Mech Rev*, 2002, 55: 351~388
- 10 Mei CC, Foda MA. Wave induced responses in a fluid poroelastic solid with a free surface. *Geophy J Roy Astr Soc*, 1981, 66: 597~631
- 11 de Bore R, Ehlers W, Kowalski S, et al. Porous Media, A Survey of Different Approches. Forschungsbericht Aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität-Gesamthochschule Essen. 1991. 54
- 12 Li Xiangwei, Li Xiangyue. Wave propagation with mass-coupling effect in fluid-saturated porous media. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(4): 327~340
- 13 Plona TJ, Johnson DL. Experiment study of the two bulk compressional modes in water-saturated porous structure. *IEEE Ultrason Symp*, 1980, 2: 868~872
- 14 Johnson DL, Plona TJ. Acoustic slow waves and the consolidation transition. *J Acoust Soc Am*, 1982, 72(2): 556~565
- 15 Kinsler EL. Fundamentals of Acoustics. New York: John Wiley and Sons, 1982. 98~123
- 16 Zienkiewicz OC, Newton RE. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. Proceedings of the Symposium on Finite Element Techniques, Germany: University of Stuttgart, 1969-06
- 17 Simon BR, Paul DK. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. *Inter J Numer Anal Geomechanics*, 1984, 8: 381~398

## THREE-DIMENSIONAL STRESS WAVE PROPAGATION IN FLUID-SATURATED POROUS MEDIA<sup>1)</sup>

Liu Kaixin    Liu Ying

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract** A three-dimensional two-phase model for analysis of the fluid-saturated porous media, which more accords with the inner action of the media, is proposed. In this model, the solid phase and the fluid phase are separated into two really independent phases and connected on the interface. This model is in good agreement with the interaction between the solid phase and the fluid phase in the natural fluid-saturated porous media. Using Galerkin weighted residual method and considering fluid-solid coupling on the interface, the model is discretized into solid elements, fluid elements and fluid-solid coupling elements. By adopting direct-coupling technique, a three-dimensional fluid-solid mixture explicit dynamic finite element scheme is developed. Moreover, stress wave propagation in the fluid-saturated porous media is numerically simulated by using the scheme. The comparison of the wave speeds, that have been obtained by our model and the Biot's theory, as well as the wave speeds in pure solids and fluids, are made. And, the effects of the porosity and the shapes of pores on the propagation characteristic of main waves are analyzed in detail. The research results show that the velocities obtained by our model are more reasonable. The faster velocities given by Biot's theory further indicate that owing to the homogenization treatment in the generally used theories, the object investigated is a fussy substitutive model, which can not fully reflect the characteristic of stress wave propagation in the true media.

**Key words** fluid-saturated porous media, two-phase model, fluid-solid interaction, explicit dynamic finite element method, stress wave

Received 29 November 2002, revised 29 May 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19832010, 10025212).