

充分发展湍流场中 Pr 数对被动标量输运的影响¹⁾

周海兵 崔桂香 许春晓 张兆顺

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 采用直接数值模拟方法, 研究壁湍流中分子 Pr 数对湍流被动标量输运的影响. 发现在槽道湍流的外层, 湍流雷诺平均普朗特数 Pr_T 与分子普朗特数的倒数呈线性关系; 湍流亚格子普朗特数 Pr_t 与分子普朗特数的关系较为复杂, 在分子普朗特数为 1 附近时, 湍流亚格子 Pr_t 数出现极小值.

关键词 湍流, 被动标量, 普朗特数, 雷诺平均, 亚格子模式

引 言

标量湍流是当前湍流研究中的一个热点^[1]. 对于被动标量, 其输运特性既与雷诺数 (Re) 有关, 也与分子扩散系数有关 (Pr 数或 Sc 数是标量分子扩散的表征). 在实际应用中, 表征扩散的 Pr 或 Sc 数变化范围非常大. 因此正确地分析不同分子扩散对标量湍流通量的影响是十分必要的. 下文都用 Pr 数表示分子扩散, 所有的论述对温度扩散或质量扩散都适用.

现有标量湍流通量模式大都采用湍流 Pr 数的形式, 除了谱空间的 EDQNM 模式^[2], 都假定湍流普朗特数为常数. 从理论分析可以定性地判断, 分子扩散能力不同, 标量的湍流输运有明显差别. 周海兵等^[3] 曾经研究各向同性湍流场中有平均标量梯度的标量输运, 并发现湍流普朗特数明显依赖于分子普朗特数, 湍流雷诺平均普朗特数 Pr_T 与分子普朗特数的倒数呈线性关系; 湍流亚格子普朗特数 Pr_t 在分子普朗特数为 1 附近时出现极小值; 并且利用谱空间通量传输函数解释了极值出现的原因.

各向同性湍流中有平均标量梯度场属于简单的均匀湍流, 为了探讨在简单的标量湍流中发现的标量输运特性是否具有普遍意义, 本文在直槽湍流中研究标量湍流输运特性. 研究结果证实在直槽湍流外层, 湍流普朗特数具有和各向同性湍流中相仿的性质.

1 数值计算方法

不可压缩牛顿流体的流动满足 Navier-Stokes 方

程, 被动标量满足其输运方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} - \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\partial \theta / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta \quad (3)$$

其中 \mathbf{u} 为速度分量, $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 为涡量, $\Pi = p/\rho + |\mathbf{u}|^2/2$ 为总压, θ 为被动标量, ν 为分子运动黏性系数, κ 为标量分子扩散系数. 选择截面平均速度 U_m 为特征速度, 半槽宽 H 为特征长度, 对方程进行无量纲化. 雷诺数定义为 $Re = U_m H / \nu$. 计算域设置如下: x, y, z 分别代表流向、法向和展向坐标; u, v, w 为相应的速度分量. 湍流场上下边界为壁面, 水平方向延伸至无穷, 在流向和展向采用周期边界条件, 在法向采用固壁无滑移条件. 标量场在流向和展向采用周期边界条件, 在固壁上给定标量为常数: 在 $y = H$ 处, $\theta = 1$; 在 $y = -H$ 处, $\theta = -1$. 采用谱方法进行数值模拟, 流向和展向采用 Fourier 展开; 法向采用 Chebyshev 多项式展开; 时间推进采用三阶时间分裂法^[4], 详细的计算方法与文献^[5] 相同, 本文不再重复.

计算网格为 $128 \times 129 \times 128$, 雷诺数为 2666, 分子普朗特数分别为 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 和 1.2. 速度场统计量和 Xu^[5] 的结果相符; 标量场统计量和 Kawamura^[6] 的结果相符, 证实本文计算结果正确.

2 结果及讨论

2.1 湍流雷诺平均 Pr_T 数的变化规律

2003-03-03 收到第一稿, 2003-10-08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10272065)、中法实验室 (LIAMA) 和清华大学基础研究基金资助项目.

用直接数值模拟的结果来考察不同 Pr 数下 Pr_T(= ν_T/κ_T) 数的性质.

在槽道湍流中, ν_T = -⟨u'v'⟩/(∂U/∂y), κ_T = -⟨v'θ'⟩/(∂θ/∂y), 湍流 Pr_T 数等于

$$Pr_T = \nu_T / \kappa_T = \langle u'v' \rangle \partial\theta / \partial y / \langle v'\theta' \rangle \partial U / \partial y \quad (4)$$

图 1 为在槽道对数区中, 不同分子 Pr 数下, 湍流 Pr_T 数随 Y⁺ 的分布. 从图 1 的结果可以看到, 湍流 Pr_T 数随 Y⁺ 有 20% 的变化. 因此, 传统标量湍流模型在全场给定常数湍流普朗特数是不准确的.

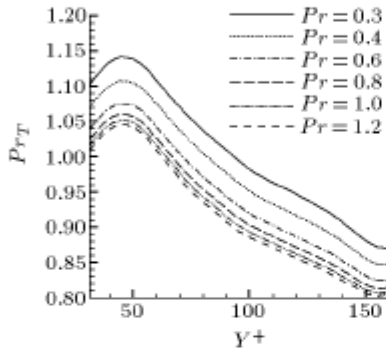


图 1 湍流普朗特数在槽道中的变化

Fig.1 Turbulent Prandtl number in turbulent channel flow

从图 1 的结果也可以看到, 湍流普朗特数不仅与 Y⁺ 有关, 而且与分子普朗特数密切相关. 同时发现在对数区中, 采用分子普朗特数的倒数作为自变量时, 湍流普朗特数可近似为线性关系, 如图 2 所示, 可以写成下式

$$Pr_T = A(Re_\lambda) + B(Re_\lambda) / Pr \quad (5)$$

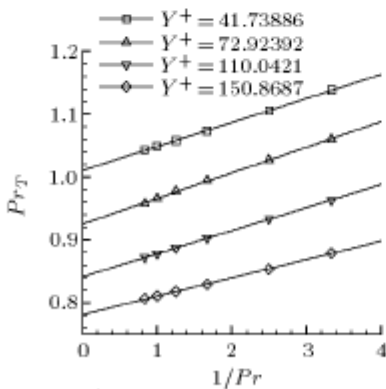


图 2 不同 Pr 数下的湍流 Pr_T 数

Fig.2 Pr_T number verse Pr number

系数 A 在 0.8~1.0 之间, 系数 B 很小, 在 0.03~0.04 之间. 因此, 在 Pr > 1.0 时, 湍流普朗特

数随分子普朗特数变化较小, 例如对于空气或水污染的扩散问题, 一般其分子普朗特数较大, 系数 B 的影响可以忽略, 湍流普朗特数近似值与雷诺数有关; 当 Pr < 1.0 时, 湍流普朗特数随分子普朗特数变化较大, 例如对于液态金属的传热问题, 湍流普朗特数随分子普朗特数以及雷诺数的变化关系的预测, 就显得更为重要.

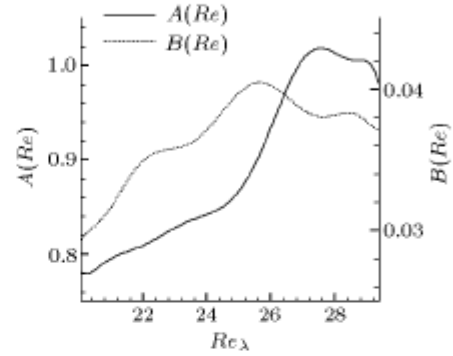


图 3 公式 (4) 的拟合系数 A, B

Fig.3 Best fitted coefficient A and B in Eq.(4)

2.2 标量湍流通量的谱分析

可以利用标量通量谱来说明 Pr_T-Pr 关系的机制. 槽道湍流场在流向和展向是均匀的, 考察标量通量流向一维谱 E_{νθ}(k_x), 它的积分是标量湍流通量

$$h = \int E_{\nu\theta}(k_x) dk_x \quad (6)$$

图 4 是不同分子普朗特数下, 标量通量随壁面距离的演化规律. 图 4 中可以明显地看到分子普朗特数愈小, 标量湍流通量愈小, 也就是说, 标量的湍流扩散系数愈小, 因此湍流普朗特数愈大.

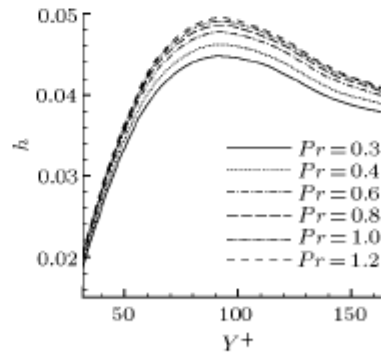


图 4 湍流槽道中标量通量

Fig.4 Scalar flux turbulent channel flow

还可以对标量湍流通量做定量的分析, 用摩擦速度 u_τ, 法向平均标量梯度 dθ/dy 和流向网格尺度 Δ_x 将标量通量进行无量纲化. 考察无量纲化标量通

量的倒数 H ，它和湍流扩散系数成反比，和湍流普朗特数成正比

$$H = u_r \Delta_x d\theta/dy/h \propto Pr_T \quad (7)$$

发现在对数区， H 和分子普朗特数的倒数有很好的线性关系 (见图 5)，也就是湍流普朗特数是分子普朗特数的倒数的线性函数。

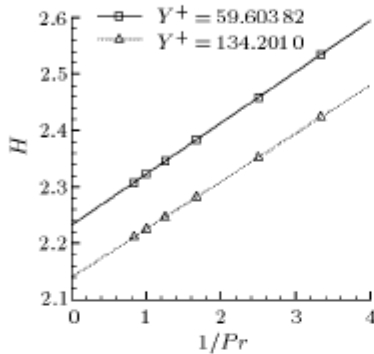


图 5 标量通量倒数与普朗特数的关系
Fig.5 H verse Pr

2.3 亚格子普朗特数

计算亚格子普朗特数时，应用动力模式计算亚格子涡黏系数和涡扩散系数，计算方法同文献 [3].

计算结果如图 6 所示，湍流亚格子普朗特数随 Y^+ 有明显变化；当 $Pr < 1$ 时，湍流亚格子普朗特数随分子普朗特数的增加而减小。图 7 更准确地给出对数区中 ($Y^+ > 30$) 亚格子普朗特数和分子普朗特数间的关系，可以看到湍流亚格子普朗特数随分子普朗特数的变化出现极值，极小值发生在分子 Pr 数为 1.0 附近。

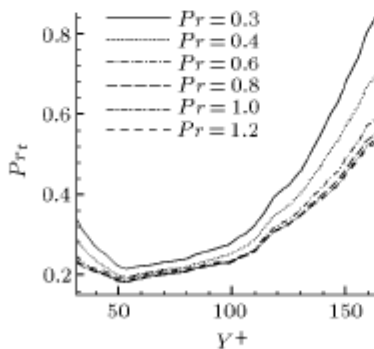


图 6 亚格子 Pr_t 数在槽道中的变化
Fig.6 Subgrid Prandtl number in turbulent channel flow

可以通过不可解标量脉动的能量输运方程来考察亚格子标量通量的行为

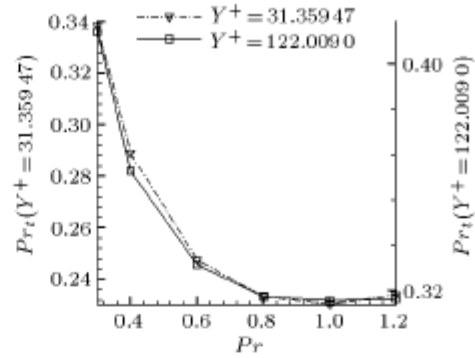


图 7 不同 Pr 数下的亚格子 Pr_t 数
Fig.7 Pr_t verse Pr in turbulent channel flow

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial^2 \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \kappa \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \theta' \frac{\partial (u_j \theta - \overline{u_j \theta})}{\partial x_j} \right\rangle \quad (8)$$

式 (8) 最后一项是可解湍流向不可解湍流的能量输运，它正比于亚格子标量通量，并记为

$$Tr = \left\langle -\theta' \frac{\partial (u_j \theta - \overline{u_j \theta})}{\partial x_j} \right\rangle \quad (9)$$

图 8 表示不同壁面距离下，亚格子输运项随分子普朗特数变化规律，可以清晰地看到，极值出现在分子普朗特数为 1 附近。这与我们得到的湍流亚格子 Pr_t 数极值关系一致。即在槽道湍流的对数区以外，亚格子输运项在分子普朗特数为 1 附近有极值，是导致亚格子 Pr_t 数在 $Pr = 1.0$ 处出现极值的原因。

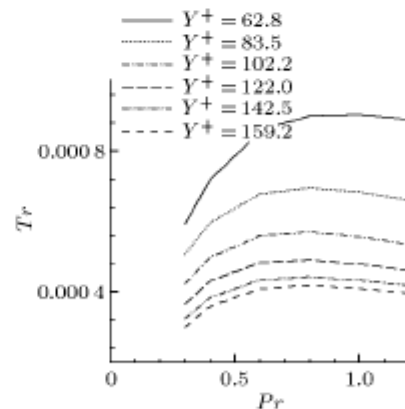


图 8 不同 Pr 数下亚格子输运项
Fig.8 Subgrid transport in turbulent channel flow at different Pr number

3 结论与讨论

本文研究了槽道湍流中分子普朗特数对湍流标

量输运的影响, 分析了不同分子普朗特数下雷诺平均普朗特数和亚格子普朗特数的变化规律及其原因。结果表明在槽道湍流的对数区内, 湍流雷诺平均普朗特数与分子普朗特数的倒数呈线性关系; 应用动力模式计算湍流亚格子普朗特数与分子普朗特数的关系较为复杂, 在分子普朗特数为 1 附近时, 湍流亚格子普朗特数出现极小值。标量通量谱随分子普朗特数的演化是湍流雷诺平均普朗特数演化的原因; 而标量亚格子动力学方程中输运项随 Pr 的变化是湍流亚格子普朗特数出现极值的原因。这是充分发展的湍流场中标量湍流输运的共同规律。

研究表明, 湍流标量输运和分子普朗特数有关, 当分子普朗特数大于 1 时, 标量的湍流输运以对流输运为主, 它和分子普朗特的依赖关系微弱。因此, 当分子普朗特数大于 1 时, 标量湍流输运可以采用常系数梯度模式, 即湍流普朗特数和亚格子普朗特数可近似为常数。当分子普朗特数小于 1 和远小于 1 时, 常系数湍流普朗特数的模型是不正确的, 需要专门研究, 这是需进一步研究的目标。

最后需要强调的是本文的结果只适用于充分发展的湍流。在槽道湍流中, $Y^+ > 30$ 为对数层, 流动表现出充分发展湍流的特征; 近壁区: $Y^+ < 5$ 为黏性底层, $5 < Y^+ < 30$ 为缓冲区, 近壁区的湍流雷诺数很小, 又有复杂的拟序结构和很强的间歇

性, 它们完全不同于充分发展湍流中的标量输运规律。标量湍流的近壁输运规律有待研究。

参 考 文 献

- 1 Warhaft Z. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, 32: 203~240
- 2 Lesieur M, Rogallo R. Large-eddy simulation of passive scalar diffusion in isotropic turbulence. *Physics Fluids A*, 1989, 1(4): 718~722
- 3 周海兵, 崔桂香, 张兆顺等. Pr 数对湍流被动标量输运的影响. 力学学报, 2002, 34(6): 847~855 (Zhou Haibing, Cui Guixiang, Zhang Zhaoshun, et al. The effect of transportation of passive scalar in the homogeneous turbulence with different molecular Prandtl numbers. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(6): 847~855 (in Chinese))
- 4 Karniadakis GE, Israeli M, Orszag SA. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 1991, 97: 414~443
- 5 Xu Chunxiao, Zhang Zhaoshun, den Toonder JMJ, et al. Origin of high kurtosis in the viscous sublayer: Direct numerical simulation and experiment. *Physics of Fluids*, 1996, 8: 7~10
- 6 Kawamura H, Abe H, Shingai K. DNS of turbulence and heat transport in a channel flow with different Reynolds and Prandtl numbers and boundary conditions. In: Nagano Y, Hanjalic K, Tsuji T eds. In: 3rd Int Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. AICHI SHVPPAN, Nagoya, Japan, 2000-04-02-06. 15~32

THE EFFECT OF MOLECULAR PRANDTL NUMBERS ON TRANSPORTATION OF PASSIVE SCALAR IN FULLY DEVELOPED TURBULENCE¹⁾

Zhou Haibing Cui Guixiang Xu Chunxiao Zhang Zhaoshun
(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract This paper studies the transportation of passive scalar in the turbulence with different molecular Prandtl numbers by direct numerical simulation. This paper provides sound evidence that the turbulence Prandtl number depends on molecular Prandtl number. In the logarithm law region, the turbulence Prandtl number Pr_T varies linearly with the reciprocal of molecular Prandtl number in Reynolds average. The relationship between subgrid-scale turbulence Prandtl number Pr_t and molecular Prandtl number is more complicated, the minimum Pr_t occurs at $Pr = 1.0$.

Key words turbulence, passive scalar, Pr number, Reynolds average, subgrid-scale model

Received 3 March 2003, revised 8 October 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272065), LIAMA and the Basic Research Foundation of Tsinghua University.