

压电材料平面裂纹尖端场的杂交应力有限元分析¹⁾

周 勇 王鑫伟

(南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

摘要 基于复势理论和杂交变分原理建立了一种适用于力电耦合分析的杂交应力有限元模型, 给出了建立刚度矩阵的主要公式和推导过程, 单元内的位移场和应力场采用满足平衡方程的复变函数级数解, 假设的复变函数级数解事先精确满足裂纹的无应力和电位移法向分量为零的条件, 单元外边界的位移场假设按抛物线变化, 单元的刚度矩阵采用 Gauss 积分的方法得出. 通过对力电耦合裂尖场的数值计算验证了程序的正确性和单元的有效性, 同时也用所得结果校验了理论解.

关键词 压电材料, 裂纹, 杂交有限元, 数值计算方法, 复变函数

引 言

压电介质的损伤和断裂是固体力学的重要课题, 随着压电介质在智能结构中日益广泛地应用, 国际上越来越多的学者对其损伤和断裂行为也越来越关注, 中国在压电材料的损伤和断裂特性等领域已取得了高水平的理论研究成果^[1].

但是, 解析解仅能对简单问题给出, 复杂问题仍不得不借助于各种数值方法来解决, 而有限元法是目前最常用的方法. Kumar 和 Singh^[2] 采用 8 节点平面等参元并结合裂尖奇异元分析了双边缺口试件在裂纹尖端的应力分布, 但是没有能得出合理的裂尖场的 $1/r$ 奇异性. 最近, 杨晓翔等^[3] 利用刚度微分法分析了应力强度因子, 刘鸣等^[4] 建立了一个适用于机电耦合分析的优化杂交元, 邓其林等^[5] 采用复势函数方法和有限元法分析了压电材料椭圆切口的问题, 指出了 Sosa^[6] 文章中的一些数值计算错误. 总之, 这一方面的数值方法研究与解析方法相比还是十分有限, 而常规的有限元法分析这类问题效率也不高.

鉴于杂交元在特殊问题中应力分析的优势, 这里将复势函数方法^[6] 和杂交元方法^[7] 引入到平面压电介质机电耦合奇异性问题的分析, 建立了特殊的 8 节点有限单元. 对 I 型力电耦合裂尖场的数值计算和分析显示出新建立单元的高效和可靠, 同时发现了 Sosa^[8] 给出的部分计算结果的一些错误.

1 基本理论和公式

压电介质的能量泛函可表示为^[9]

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_{\Omega} [u_{i,j}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}s_{ijkl}^D\sigma_{ij}\sigma_{kl} - u_i f_i + \varphi_{,i} D_i + \\ & \frac{1}{2}\beta_{ij}^{\sigma} D_i D_j + \varphi q_b - g_{kij}\sigma_{ij} D_k] dv + \\ & \int_{S_u} (\tilde{u}_i - u_i)\sigma_{ij} n_j ds + \int_{S_{\varphi}} (\tilde{\varphi} - \varphi) D_j n_j ds - \\ & \int_{S_{\sigma}} u_i \tilde{T}_i ds + \int_{S_w} \varphi \tilde{q}_s ds \end{aligned} \quad (1)$$

式中 Ω 是板占的区域; S 是板的边界; $s_{ijkl}^D, \beta_{ij}^{\sigma}, g_{kij}$ 分别是零电位移时材料的柔度张量, 零应力时材料的介电隔离率张量和压电系数张量; $u_i, \sigma_{ij}, \varphi, D_i$ 分别是位移矢量, 应力张量, 电势和电位移矢量; f_i, q_b 分别是体力和体电荷矢量. $S_u, S_{\sigma}, S_{\varphi}, S_w$ 分别是给定位移、面力、电势和法向电位移边界. $\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{T}_i$ 和 \tilde{q}_s 在边界处定义.

令 $\sigma = S\beta, u = U\beta, \tilde{u} = Lq$, 则有 $t = R\beta$, 式中 β 是待定系数向量, q 是单元的节点位移向量. σ 和 u 在域 Ω 内假设, 且满足平衡方程和协调方程, t 是边界应力和电位移矢量, L 是由在单元边界处的形状函数确定的矩阵. 它们分别定义为

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{Bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\phi} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

2003-04-10 收到第 1 稿, 2003-10-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10072026, 50135030) 和国家教委博士点基金 (20020287003) 资助项目.

$$t = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \\ D_x n_x + D_y n_y \end{Bmatrix} \quad (2)'$$

式中 n_x, n_y 分别是边界 Γ 的外法线与 x 轴和 y 轴之间的方向余弦。

引入这些记号后，式(1)可简化为

$$\begin{aligned} \Pi_h &= \beta^T \left(\int_{\Gamma} \mathbf{R}^T \mathbf{L} d\Gamma \right) \mathbf{q} - \left(\int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{L} d\Gamma \right) \mathbf{q} - \\ &\frac{1}{2} \beta^T \left(\int_{\Gamma} \mathbf{R}^T \mathbf{U} d\Gamma \right) \beta = \\ &\beta^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{P} - \frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta \end{aligned} \quad (3)$$

在单元一级对 β 进行静力凝聚，由 $\delta \Pi_h^c = 0$ 可得 $\mathbf{H} \beta - \mathbf{G} \mathbf{q} = 0$ ，由此可得 $\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q}$ 。这样，对单元有

$$\Pi_h^c = \mathbf{q}^T \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$ 是杂交应力单元的刚度矩阵。

2 正交各向异性压电板平面问题的复变函数解

Scosa^[6] 指出，对于正交异性压电板平面问题，其面内的应力和位移可用 3 个复变函数 $\phi_k(Z_k) (k=1, 2, 3)$ 表示，式中 $Z_k = x + \mu_k y$ ， μ_k 是特征方程(5)的根，即

$$\begin{aligned} &a_{11} \delta_{11} \mu^6 + (a_{11} \delta_{22} + 2a_{12} \delta_{11} + a_{33} \delta_{11} + \\ &b_{21}^2 + b_{13}^2 + 2b_{21} b_{13}) \mu^4 + (a_{22} \delta_{11} + 2a_{12} \delta_{22} + \\ &a_{33} \delta_{22} + 2b_{21} b_{22} + 2b_{22} b_{13}) \mu^2 + \\ &(a_{22} \delta_{22} + b_{22}^2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

为了简单起见，裂纹面上采用 D-P 条件，则有

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[\phi_1(Z_1) + \phi_2(Z_2) + \phi_3(Z_3)] &= 0 \\ \operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1(Z_1) + \mu_2 \phi_2(Z_2) + \mu_3 \phi_3(Z_3)] &= 0 \\ \operatorname{Re}[\lambda_1 \phi_1(Z_1) + \lambda_2 \phi_2(Z_2) + \lambda_3 \phi_3(Z_3)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

对于具有中心裂纹正交异性压电板，取坐标轴沿材料的主轴方向，坐标原点在裂纹中心，裂纹与 x 轴的夹角为 α ，裂纹长 $2a'$ ，如图 1 所示。则可取保角映射函数为

$$Z_j = \frac{a - i\mu_j b}{2} \xi_j + \frac{\bar{a} + i\mu_j \bar{b}}{2} \xi_j^{-1} \quad (j=1, 2) \quad (7)$$

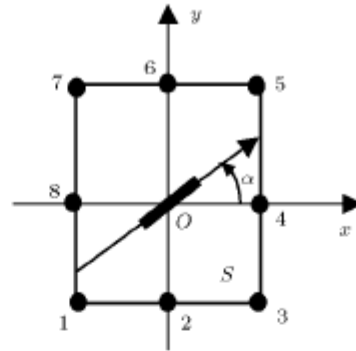


图 1 8 节点杂交应力元

Fig.1 An eight-node hybrid stress element

式中

$$a = a' \cos \alpha, \quad b = ia' \sin \alpha$$

而 Z_j 的反函数为

$$\xi_i = \frac{Z_j \pm \sqrt{Z_j^2 - (a - i\mu_j b)(\bar{a} + i\mu_j \bar{b})}}{a - i\mu_j b} \quad (8)$$

式中的正负号需根据具体情况而定，使物理域 S 上的裂纹的外部保角映射到 ξ_i 平面上单位圆的外部。含裂纹板内的应力场和位移场可假设为有限项级数

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi_1) &= \sum_{j=-N}^M A_j \xi_1^j \\ \phi_2(\xi_2) &= \sum_{j=-N}^M B_j \xi_2^j \\ \phi_3(\xi_3) &= \sum_{j=-N}^M C_j \xi_3^j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 M, N 是正整数，这里取 $M = N$ ； A_j, B_j, C_j 是待定复常数。对于条件(6)，则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

所以, A_j, B_j, C_j 中独立的待定复常系数的数目减少到原来的一半.

3 8 节点含裂纹杂交应力板单元

取单元局部坐标系的原点在裂纹的中心, 每个节点有 3 个自由度 u_i, v_i 和 φ_i , 则

$$q^T = [u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2, \dots, u_8, v_8, \varphi_8] \quad (11)$$

假设裂纹长为 $2a'$, 裂纹与 x 轴的夹角为 α , 裂纹面采用 D-P 条件, 8 节点单元如图 1 所示. 有了 3 个复变函数的表达式, 则正交各向异性压电板平面问题其面内的应力、电位移、位移和电势就可确定.

通过分析, 式 (9) 中对于 $j = 0$ 的项不产生应力和电位移, 所以可以不用, 对于 8 节点单元, 取 $M = N = 4$. 矩阵 L 的确定方法有 2 种: 方法 1 是每条边上的位移按抛物线变化; 方法 2 是每条边上的位移是分段线性变化的 [10]. 根据杂交变分原理可以建立起含中心裂纹压电材料 8 节点杂交应力有限单元.

4 算例与讨论

为了检验单元的可行性和正确性, 采用本文建立的 8 节点单元 (每条边上的位移按抛物线变化) 对文献 [8] 中有已知解的 3 个例子进行了计算, 即在极化方向分别受远场拉伸应力、远场电位移、远场拉伸应力和电位移组合载荷作用. 为了模拟无穷大中心裂纹板的情况, 单元的长和宽取 100 个单位, 裂纹长取 2 个单位, $\alpha = 0$, 采用的压电材料参数来自文献 [6], 计算中仅采用一个单元. 对于受远场拉伸应力载荷情况, 有限元计算的裂尖场分布形式与 Sosa [8] 的结果完全一致. 为了节省篇幅, 本文没有给出这部分的计算结果.

为了便于与文献中已有结果进行比较, 验证应力角分布的正确性和 $1/r$ 阶奇异性, 计算时采用了距裂纹尖端距离为 7×10^{-4} 单位的围道上的应力和电位移的角分布, 将计算结果同时乘以 $2r/a$ 来归一化. 但是, 对于这两种载荷情况, 有限元计算的结果一般要比文献 [8] 中给出的结果大些. 为了检验有限元计算的结果的正确性, 对 Sosa [8] 的理论公式编制了程序重新进行了计算, 发现重新计算的理论与本文的有限元结果十分吻合. 图 2 给出了远场电位移载荷作用下应力的角分布曲线, 图 3 给出了组合载荷下的环向应力的角分布曲线, 图中 $k = D_\infty/\sigma_\infty$ 是远场电位移载荷和应力载荷之比. 可以看出这些

应力的角分布曲线与采用 Sosa [8] 的理论重新计算的结果基本一致 (图中用实线表示). 图 3 中两组曲线 (一组是本文的有限元结果, 另一组是采用 Sosa [8] 的理论公式重新计算的结果) 基本重合, 说明了本文发展的有限元在力电耦合裂尖场的数值计算中的优越性和可靠性. 这也说明了 Sosa 在文献 [8] 中给出的这部分计算结果不正确. 例如, 图 2 中的径向应力的最小值本文是 -12.54 , 而文献 [8] 仅是 -9.0 左右, 另外, 图 2 中的其他应力的最大或最小值也有一定的差异; 图 3 中的应力最大和最小值本文分别为 2.2 和 -1.11 , 而文献 [8] 仅只有 1.8 和 -0.7 左右. 为了清楚起见, 图 4 给出了组合载荷下的环向应力的角分布的两种理论计算结果的比较, Sosa [8] 的结果用符号表示, 而采用 Sosa [8] 的理论公式重新计算的结果用实线表示, 可以看出, 两者之间有一定的差别.

刘鸣等 [4] 采用 646 个机电耦合优化杂交单元来模拟 $1/4$ 板, 分析了板在远场电位移和组合载荷作用这两种情况, 得到与文献 [8] 相类似的结果. 由于板的宽度为 4 个单位, 裂纹长为 2 个单位, 属于有

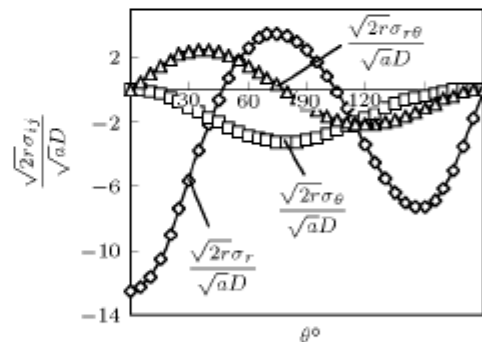


图 2 远场电位移载荷应力分布图

Fig.2 Stress distributions under far field electric loading

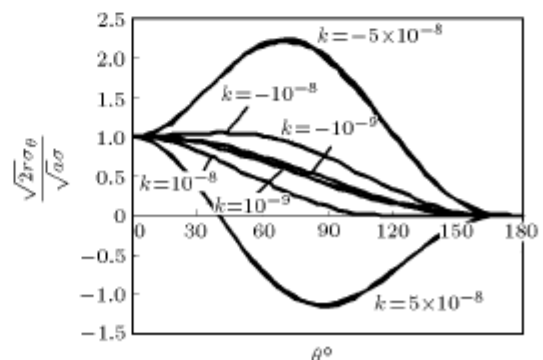


图 3 组合加载环向应力分布图

Fig.3 Stress distributions under combined loadings

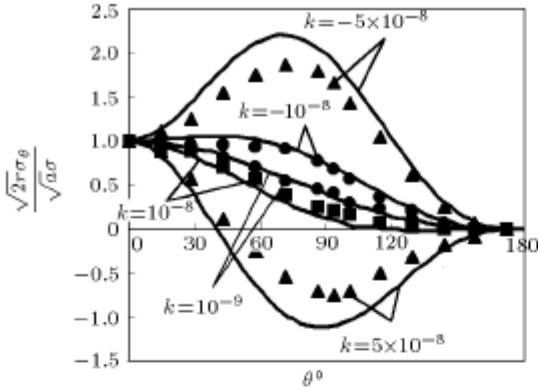


图 4 组合加载环向应力分布的比较
Fig.4 Comparisons of stress distributions under combined loadings

限宽度板, 所以采用 Brown 修正因子 1.18 来进行修正以与无限大板的精确解进行比较. 而本文仅用一个单元给出的结果就比文献 [4] 中采用 646 个普通单元的结果精度要高.

邓其林等 [5] 首先发现了 Sosa 文献 [6] 中的部分计算错误, 我们采用含椭圆孔正交异性材料 8 节点单元也对该问题进行了分析, 计算时板的宽度与圆的半径之比为 50, 得到了与邓其林等 [5] 完全相同的结果 [11]. 图 5~ 图 7 分别给出了中心含圆孔的正交各向异性材料无限大压电板受到远场电位移载荷作用的结果 [11]. 可以看出, 本文给出的结果 (图中用空心符号表示) 与文献 [5] 的解析解十分吻合 (图中用实线表示), 再次验证了文献 [5] 指出的 Sosa [6] 给出的数值结果 (图中用实心符号表示) 不正确的结论. 需指出的是, 我们对 Sosa [6] 的理论结果编制了程序重新进行计算, 发现重新计算的理论与邓其林等 [5] 的理论结果十分吻合.

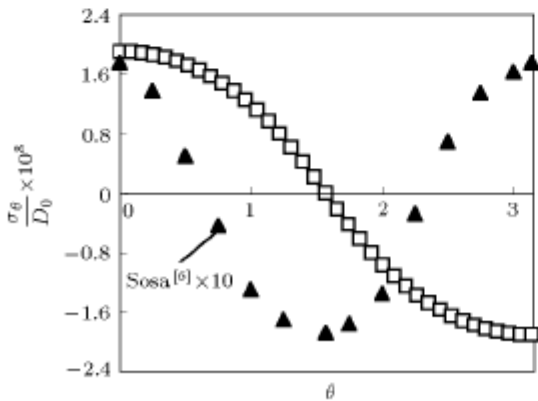


图 5 远场电位移载荷下 \$D_{\theta}\$ 分布图
Fig.5 \$D_{\theta}\$ distributions under far field electric loading

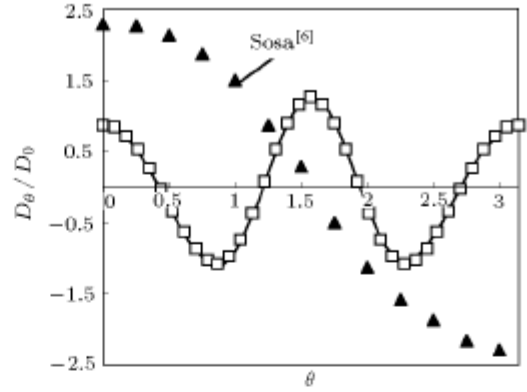


图 6 远场电位移载荷下 \$\sigma_{\theta}\$ 分布图
Fig.6 \$\sigma_{\theta}\$ distributions under far field electric loading

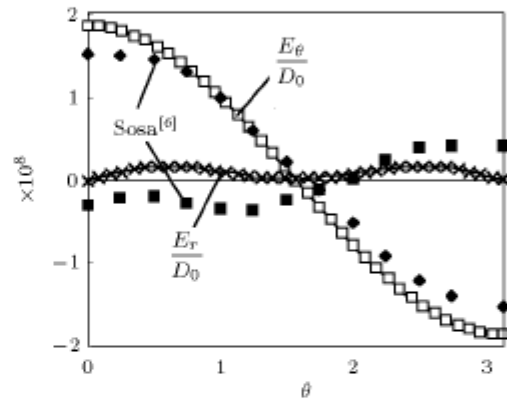


图 7 远场电位移载荷下 \$E\$ 场分布图
Fig.7 \$E\$ distributions under far field electric loading

5 结束语

本文基于复势理论和杂交变分原理建立了一种含中心裂纹压电材料 8 节点杂交应力有限元. 算例的计算结果表明即使采用一个单元来求解, 所得到结果与理论解 [8] 和采用 646 个优化杂交元 [4] 的结果一致, 说明所建立的单元是十分有效的. 换言之, 本文发展的有限元法在力电耦合裂尖场的数值计算中有优越性和可靠性等优点.

参 考 文 献

- 1 陈增涛, 余寿文. 压电介质损伤、断裂力学研究的现状. 力学进展, 1999, 29(2): 187~196 (Chen Zengtao, Yu Shouwen. Current research on the damage and fracture mechanics of piezoelectric materials. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(2): 187~196(in Chinese))
- 2 Kumar S, Singh RN. Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings. *Acta Mater*, 1996, 44(1): 173~200
- 3 杨晓翔, 匡震邦. 刚度微分法计算压电材料平面断裂问题. 力学学报, 1997, 29(3): 314~322 (Yang Xiaoxiang, Kuang

- Zhenbang. The calculation of piezoelectric materials with a mixed mode crack. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(3): 314~322 (in Chinese))
- 4 刘鸣, 吴长春. 压电介质机电耦合裂尖场的杂交元数值分析. 科学通报, 1999, 44(6): 603~608 (Liu Ming, Wu Changchun. Hybrid finite element analyses of crack-tip mechanical-electrical coupling fields of piezoelectric materials. *Science Letters*, 1999, 44 (6): 603~608 (in Chinese))
- 5 邓其林, 王自强. 压电材料椭圆切口的力学分析. 力学学报, 2002, 34(1): 109~114 (Deng Qilin, Wang Tzuchiang. Mechanical analysis of piezoelectric materials with an elliptical hole. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(1): 109~114 (in Chinese))
- 6 Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defects. *Int J Solids Structures*, 1991, 28(4): 491~505
- 7 Pian THH. Derivation Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution. *AIAA J*, 1964, 2(7): 1333~1336
- 8 Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int J Solids Structures*, 1992, 29(21): 2613~2622
- 9 EerNisse EP. Variational method for electroelastic vibration analysis. *IEEE Trans J Sonics & Ultrasonics*, 1983, 14: 59~67
- 10 占华平, 王鑫伟, 周宏. 含椭圆孔正交异性材料八节点杂交应力有限元. 固体力学学报, 2003, 24(专辑): 128~132 (Zhan Huaping, Wang Xinwei, Zhou Hong. An eight-node hybrid stress element for orthotropic materials with an elliptical hole. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24 (special issue): 128~132 (in Chinese))
- 11 周勇, 王鑫伟, 郑世杰. 含椭圆切口压电材料的杂交应力有限元分析. 全国智能材料断裂与破坏学术会议, 天津, 2003 年 4 月 (Zhou Yong, Wang Xinwei, Zheng Shijie. Hybrid stress FE analysis of piezoelectric materials with an elliptical hole. National Congress on the Fracture and Damage of Smart Materials, Tianjin, April, 2003 (in Chinese))

ANALYSES OF CRACK-TIP FIELDS OF PLANE PIEZOELECTRIC MATERIALS BY THE HYBRID STRESS FINITE ELEMENT METHOD ¹⁾

Zhou Yong Wang Xinwei

(College of Aerospace Engineering, NUA, Nanjing 210016, China)

Abstract A hybrid stress finite element based on the complex potential theory and hybrid variational principle is proposed for mechanical-electrical coupling analyses. The formulations are given in detail in this paper. The complex series solutions satisfying the equilibrium equations and compatibility equations are chosen as the displacement and stress fields in the element domain. Assume that the series solutions satisfy exactly the traction free and the zero normal electrical displacement boundary conditions along the crack surface in advance. While the displacements along the element outer boundaries vary parabolically. The element stiffness matrix is then obtained by using the Gauss quadrature method. Numerical examples verify the accuracy of the program and the efficiency of the proposed element. Meanwhile, the theoretical results are verified by the finite element results.

Key words piezoelectric material, crack, hybrid stress finite element, numerical calculation, complex function

Received 10 April 2003, revised 28 October 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10072026, 50135030) and the Doctoral Program Foundation of China Education Commission (20020287003).