

基于平面偶应力 -Reissner/Mindlin 板比拟的 偶应力有限元¹⁾

黄若煜· 吴长春· 钟万勰[†]

^{*}(上海交通大学建工学院, 上海 200240)

[†](大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 偶应力理论的有限元列式面临本质性的 C^1 连续性困难. 平面偶应力理论和 Reissner/Mindlin 板弯曲理论之间的比拟关系表明这两个理论系统的有限元的同一性, 而 R/M 板有限元并不存在 C^1 连续性困难. 因此, 研究将 R/M 板单元转化为具有一般位移自由度的平面偶应力单元的一般方法. 根据这一方法, 将典型的 8 节点 Serendipity 型 R/M 板单元 Q8S 转化为一个 4 节点 12 自由度的四边形平面偶应力单元, 数值结果表明该单元具有良好的精度和收敛性.

关键词 比拟, 偶应力, Reissner/Mindlin 板弯曲, C^1 连续性, 有限元

引 言

在经典三维弹性理论中, 变形体的构型空间是欧氏空间 R^3 . 根据 Voigt^[1] 及 Cosserat^[2] 的开拓性工作, 以及之后 Mindlin^[3], Toupin^[4], Koiter^[5] 和 Green^[6] 等人的大力发展, 从经典弹性理论发展出偶应力理论、微极理论、广义连续介质理论等诸多新型弹性理论. 从几何学的观点看, 这些新型弹性理论的本质是将变形体的构型空间推广到维数更多的流形 $R^3 \times \mathcal{M}$, 这里 \mathcal{M} 是某个流形^[7]. 在偶应力理论中, \mathcal{M} 是二维单位球面流形 S^2 . 因为其构型空间 $R^3 \times S^2$ 具有简洁的几何意义及相对较少的维数, 偶应力理论得到了较为广泛的研究.

在平面问题中, 偶应力理论的构型空间退化为 $R^2 \times S^1$. S^1 是一维单位圆流形, 表征质点面内旋转. 然而旋转量 $\omega_z \in S^1$ 并不独立, 这是因为这种旋转是固结在质点上的刚性旋转, 因此完全由经典平面弹性理论的旋转公式所确定, 即 $\omega_z = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}$, $\mathbf{u} \in R^2$, $\tilde{\mathbf{n}}$ 为 R^2 平面右手系法向量. 相应地, 旋转引起的偶曲率应变也可以由面内位移 \mathbf{u} 来计算, 容易推知它们与 \mathbf{u} 的二阶导数有关. 从有限元观点看, 这就带来了本质性的 C^1 连续性困难, 正如同薄板弯曲问题一样.

为克服这一困难, Simo^[8] 提出位移 \mathbf{u} 和旋转量 ω_z 分别独立插值再用 Lagrange 乘子强加约束的

观点, 但没有给出具体的有限元实施. Hermann^[9] 研究了混合元列式方法. 吴长春等^[10,11] 提出偶应力问题的杂交元和非协调元方法. 总的看来, 偶应力理论的有限元研究还有待深入.

在平面偶应力理论和 Reissner/Mindlin 板弯曲理论之间的比拟关系由余寿文^[12], Wood^[13] 在 20 世纪 80 年代后期指出, 钟万勰等^[14] 近期又在新的观点下重新给予论述. 余寿文着重讨论了方程的比拟关系; Wood 则从有限元的角度研究对比拟关系的应用, 按照类似 de Veubeke 的平衡元方法, 他给出以应力函数为自由度的余能单元, 显然不便于应用.

R/M 板弯曲有限元没有 C^1 连续性困难, 而且已经积累了非常丰富的成果. 研究如何根据比拟关系将 R/M 板单元转化为平面偶应力单元是有意义的. 根据比拟关系, 对任一以位移为自由度的 R/M 板单元, 一定可以同构地给出以应力函数为自由度的对应平面偶应力单元. 问题的关键在于如何适当地将以应力函数为自由度的平面偶应力余能单元转化为以位移为自由度的位移法单元. 本文给出了将 R/M 板单元转化为平面偶应力位移法单元的一个一般方法, 应用这一方法, 本文将典型的 8 节点 24 自由度 Serendipity 型 R/M 板单元 Q8S 转化为一个 4 节点 12 自由度的四边形平面偶应力单元, 数值结果表明该单元具有良好的精度和收敛性.

2003-05-31 收到第 1 稿, 2003-10-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10172078).

1 R/M 板弯曲理论与平面偶应力理论的比拟关系

R/M 板弯曲理论与平面偶应力的比拟关系表明两个系统的同构关系，即一个系统的任一变量或方程都必定可以在另一个系统中找到与之对应的变量或方程。表 1 给出了基本的比拟关系，更详细的论述可参见文献 [14]。

表 1 R/M 板弯曲与平面偶应力的比拟关系

Table 1 The analogy between R/M plate bending and plane couple-stress theory

Reissner/Mindlin plate bending	Plane couple - stress theory
moment functions ϕ_x, ϕ_y	displacements u, v
deflection and rotations	stress functions
w, ψ_x, ψ_y	p, φ_x, φ_y
moments	strains
$\mathbf{M} = \{M_y \ M_x \ 2M_{xy}\}^T$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy}\}^T$
shear forces	micro-curvatures
$\mathbf{Q} = \{Q_x \ Q_y\}^T$	$\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_{yz} \ -\kappa_{xz}\}^T$
curvatures s_x, s_y, s_{xy}, s_y	stresses $\sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \sigma_x$
$\mathbf{s} = \{s_y \ s_x \ (s_{yx} + s_{xy})/2\}^T$	$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ (\tau_{xy} + \tau_{yx})/2\}^T$
shear strains	couple stresses
$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_x \ \gamma_y\}^T$	$\mathbf{M}_z = \{-m_{yz} \ m_{xz}\}^T$
curvatures-rotations relations	stresses-stress functions relations
$s_x = \partial\phi_x/\partial x$	$\sigma_y = \partial\varphi_x/\partial x$
$s_{yx} = -\partial\psi_x/\partial y$	$\tau_{xy} = -\partial\varphi_x/\partial y$
$s_{xy} = -\partial\psi_y/\partial x$	$\tau_{yx} = -\partial\varphi_y/\partial x$
$s_y = \partial\psi_y/\partial y$	$\sigma_x = \partial\varphi_y/\partial y$
shear strains-deflection and rotations relations	couple stresses-stress functions relations
$\gamma_x = \partial w/\partial x - \psi_x$	$-m_{yz} = \partial p/\partial x - \varphi_x$
$\gamma_y = \partial w/\partial y - \psi_y$	$m_{xz} = \partial p/\partial y - \varphi_y$
moments-moment functions relations	strains-displacements relations
$M_y = \partial\phi_x/\partial x$	$\varepsilon_x = \partial u/\partial x$
$M_x = \partial\phi_y/\partial y$	$\varepsilon_y = \partial v/\partial y$
$2M_{xy} = \partial\phi_x/\partial y + \partial\phi_y/\partial x$	$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$
shear forces-moment functions relations	micro-curvatures-displacements relations
$Q_x = \partial\phi_\omega/\partial y$	$\kappa_{yz} = \partial\omega_z/\partial y$
$Q_y = -\partial\phi_\omega/\partial x$	$-\kappa_{xz} = -\partial\omega_z/\partial x$
$\phi_\omega = (\partial\phi_y/\partial x - \partial\phi_x/\partial y)/2$	$\omega_z = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2$
equilibrium equations	compatibility equations
compatibility equations	equilibrium equations
constitutive relations	constitutive relations
$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{s}, \mathbf{Q} = \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C}\mathbf{M}_z$
minimum potential energy principle	minimum complementary energy principle
H-R variational principle	pro H-R variational principle
H-W variational principle	pro H-W variational principle

从表 1 中可以清楚地看出，只要对变量以及弹性模量进行一一对应的变换就可以从其中的一个系统变换到另一个系统，因此可以推断对任一 R/M 板单元必定存在与之同构的平面偶应力单元，而且如果这个 R/M 板单元的自由度是位移和转动，则同构的平面偶应力单元具有应力函数自由度。

根据这一观察可以知道，应用比拟关系构造平面偶应力单元的过程，或者说将 R/M 板单元转化为平面偶应力单元的过程应当分为两步：第一步是构造同构的单元，对选定的一个 R/M 板单元，在平面偶应力系统内按与之比拟的方式进行有限元列式，得到的同构单元具有应力函数自由度，可称为初级单元；第二步是将初级单元转化为具有通常位移自由度的平面偶应力单元。显然，第一步是简单明了的，第二步则需要深入探讨。

本文选择典型的 8 节点 Serendipity 型 R/M 板单元 Q8S^[15] 作为转化对象。以之为实例，下面将给出将 R/M 板单元转化为平面偶应力单元的一般方法。

2 基于 R/M 板 Q8S 元的平面偶应力有限元列式

按通常约定，(x, y) 是以形心为原点的单元局部物理坐标系；(ξ, η) 是参考面坐标系。两个坐标系之间有简单的变换关系

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{I=1}^4 \frac{(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)}{4} x_I \\ y &= \sum_{I=1}^4 \frac{(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)}{4} y_I \\ \xi &= \{-1, 1, 1, -1\}, \quad \eta = \{-1, -1, 1, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

指标集 {I|I = 1, 2, 3, 4} 表示 4 个角节点。

现在对平面偶应力的应力函数作如下插值

$$\left. \begin{aligned} p &= \{1 \ x \ y \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2\} \mathbf{a}_p \\ \mathbf{a}_p &= \{a_{p1}, \dots, a_{p8}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \{1 \ x \ y \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2\} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_x &= \{a_{x1}, \dots, a_{x8}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y &= \{1 \ x \ y \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2\} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_y &= \{a_{y1}, \dots, a_{y8}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_x$ 和 \mathbf{a}_y 是广义参数向量。从式 (1) 看 x, y 包含了 ξ, η 的线性组合，所以上面的混合坐标插值是合

理的. 将 4 个角节点和 4 个边线中点的坐标值依次代入式 (2)~ 式 (4) 得到节点应力函数向量

$$\varphi = \{p_i \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi}\}, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5)$$

与广义参数向量的变换关系

$$\varphi = T\mathbf{a} \text{ 或 } \mathbf{a} = T^{-1}\varphi, \quad \mathbf{a} = \{a_p^T \ a_x^T \ a_y^T\}^T \quad (6)$$

T 是线性变换阵.

单元中的应力场是

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & -\frac{1}{2}\partial/\partial y & -\frac{1}{2}\partial/\partial x \\ \partial/\partial x & -1 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_a^* \mathbf{a} \quad (7)$$

这里

$$\mathbf{B}_a^* = [\hat{\mathbf{B}}_{5 \times 3} \ \tilde{\mathbf{B}}_{5 \times 21}] \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\tilde{\mathbf{B}} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & b_x^T & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & b_y^T \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}b_y^T & \vdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}b_x^T \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_x^T & \vdots & -1 & -x & -y & -N_h^T & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_y^T & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -x & -y & -N_h^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{N}_h^T = \{\xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \xi^2\eta \ \xi\eta^2\} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} b_x^T \\ b_y^T \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} \mathbf{N}_h^T \quad (12)$$

利用 Jacobi 矩阵 \mathbf{J} 可得

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} b_x^T \\ b_y^T \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 2\xi & \eta & 0 & 2\xi\eta & \eta^2 \\ 0 & \xi & 2\eta & \xi^2 & 2\xi\eta \end{bmatrix} \quad (14)$$

对 \mathbf{B}_a^* 实施列变换 \mathbf{S} 得到具有如下形式的矩阵 \mathbf{B}_a

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_a^* \mathbf{S} = [\mathbf{0}_{6 \times 3} \ \tilde{\mathbf{B}}_{6 \times 21}] \quad (15)$$

矩阵 \mathbf{S} 可以非常简单地经由对单位矩阵 $\mathbf{I}_{24 \times 24}$ 的修改得到, 即以数 1 替换 $\mathbf{I}_{24 \times 24}$ 中 (9,2) 和 (17,3) 两处的 0 元素就可以了.

如此得到单元应变余能及柔度阵为

$$U_e^c = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} (\sigma^T \mathbf{D} \sigma + M_z^T \mathbf{C} M_z) d\Omega_e = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{F} \varphi \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{T}\mathbf{S})^{-T} \text{diag}[\mathbf{0}_{6 \times 3}, \tilde{\mathbf{F}}_{21 \times 21}] (\mathbf{T}\mathbf{S})^{-1} \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \iint_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}^T \text{diag}[\mathbf{D}, \mathbf{C}] \tilde{\mathbf{B}} d\Omega_e \quad (18)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{4B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

这里 E 为杨氏模量; ν 为泊松比; B 为弯曲模量, 它依赖于剪切模量 G 及一个特征长度 l

$$B = l^2 G = l^2 E / 2(1 + \nu) \quad (20)$$

由于完全采用 3×3 的 Gauss 点积分, $\tilde{\mathbf{F}}$ 是对称正定阵. 至此, 按比拟于 Q8S 在位移空间上的列式方式, 已经在应力函数空间上列式得到平面偶应力的一个初级单元.

式 (16) 给出的平面偶应力初级单元是以节点应力函数向量 φ 为自由度的余能单元, 显然不便于实际应用, 应当将其转化为位移法单元. 应用 Legendre 变换可以将余能单元转化为势能单元. 方法是: 首先求出向量 φ 的对偶向量

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta} &= \frac{\partial U_c}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\vartheta} &= \{(\vartheta_{\omega_i} \ \vartheta_{x_i} \ \vartheta_{y_i}), \ i = 1, \dots, 8\}^T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

再对单元余能作 Legendre 变换得到单元势能为

$$U_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\vartheta} \quad (22)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{T}\mathbf{S})\text{diag}[0, \tilde{\mathbf{F}}^{-1}](\mathbf{T}\mathbf{S})^T \quad (23)$$

按照习惯, 对偶向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 可称为角卷向量^[16]. 根据对偶的原则, 角卷向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的意义应当是单元节点不协调向量, 而这种不协调是由位移引起的, 因此 $\boldsymbol{\vartheta}$ 必定可以由位移来表示. 为此假设存在某个具有简明几何意义的位移向量 \mathbf{d} 并有如下关系

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{d} \quad (24)$$

则从式 (22) 立即得到对应于位移向量 \mathbf{d} 的单元刚度阵

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \quad (25)$$

\mathbf{R} 就是最终位移法单元的刚度阵.

3 矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 和向量 \mathbf{d} 的推导

现在的关键问题是如何确定 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 \mathbf{d} . 这一问题的实质是角卷向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的辨识和表示. 应用比拟关系可以方便地实现这一目的, 以下论述之.

表 2 指出了角卷向量在 R/M 板单元中的比拟量是节点力和力矩向量, 这一点是容易推知的: 因为根据表 1 和单元列式已经知道节点应力函数向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 R/M 板单元的节点位移和转动向量 \mathbf{w} 互为比拟量, 而角卷向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 和节点力和力矩向量 \mathbf{f} 分别是它们的对偶向量, 因此自然也构成比拟关系. 这一重要比拟关系表明: 角卷向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 可以模拟 R/M 板单元中节点力和力矩向量 \mathbf{f} 的生成方式来生成. 为此, 有必要讨论向量 \mathbf{f} 的生成方式.

表 2 节点向量比拟关系

Table 2 The analogy between nodal vectors of finite elements

R/M plate bending element	Plane couple-stress element
vector of nodal deflection and rotations	vector of nodal values of stress functions
$\mathbf{w} = \{(w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi}), \ i = 1, \dots, 8\}^T$	$\boldsymbol{\varphi}$
vector of nodal shear force and moments	rolling vector
$\mathbf{f} = \{(Q_i \ M_{xi} \ M_{yi}), \ i = 1, \dots, 8\}^T$	$\boldsymbol{\vartheta}$

一个 R/M 板单元, 如果其收敛性是肯定的, 则在有限元分片检验原则的意义下收敛到满足齐次平衡方程的低阶基本解 (部分或全部零本征解), 这是与平面偶应力协调方程相对应的. 因此, 这里简单假设所研究的 R/M 板单元处在满足齐次平衡方程的状态, 而从这一假设出发所获得的结论与收敛性将不会有冲突.

既然单元内部已经满足平衡微分方程, 剩下的就是单元边界上的平衡. 有限元以节点力和力矩平衡代替逐点应力平衡, 因此需要把单元边界应力按某种方式堆集 (lump) 到节点上. 因为 Q8S 元是协调元, 在其单元边界上的应力堆集按通常的功等价方式进行就可以了. 为获得单元节点力和力矩, 应当先推导出单元边界合力与合力矩的计算公式.

如图 1 所示, 直线段 \vec{ij} 为单元的一条边, 其上有以中点 k 为原点的局部坐标系 (n, s) . 需要计算从原点到任意 \bar{s} 点的合力与合力矩. 务必注意切力不仅对 \bar{s} 点的合力有贡献, 而且对合力矩也有贡献.

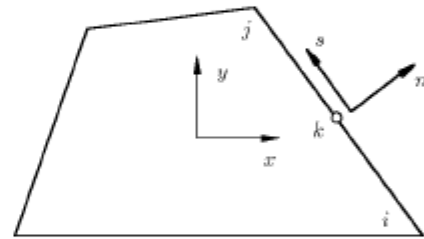


图 1 单元及边线坐标系

Fig.1 The coordinate systems of element and its edge

由域内 y 坐标正向的力矩平衡方程, 作如下面积分

$$\begin{aligned} S_y &= \iint_{\Omega_e} \left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x \right) d\Omega_e = \\ &= \iint_{\Omega_e} \left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_{xy} + \int_0^y Q_x dy \right) \right) d\Omega_e \end{aligned} \quad (26)$$

注意到这里的内力场满足齐次平衡方程, 因此可以用表 1 中的弯矩函数表示该内力场. 将表 1 中的弯矩-弯矩函数关系和切力-弯矩函数关系代入式 (26) 并应用 Green 公式得到

$$S_y = \oint_{\partial\Omega_e} \left\{ -\frac{\partial\phi_y}{\partial y} \frac{\partial\phi_y}{\partial x} - \phi_{\omega}(0) \right\}^T \cdot \mathbf{n} ds \quad (27)$$

外法向向量 \mathbf{n} 为

$$\mathbf{n} = \{\partial y / \partial s \quad -\partial x / \partial s\}^T \quad (28)$$

代入式 (27) 得到

$$S_y = \oint_{\partial\Omega_n} \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_y + \phi_\omega(0)x) ds \quad (29)$$

同理由域内 x 坐标正向的力矩平衡方程得到

$$S_x = \oint_{\partial\Omega_n} \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_x - \phi_\omega(0)y) ds \quad (30)$$

由式 (30), 式 (29) 就得到从原点到 \bar{s} 点的 x 和 y 方向合力矩的计算公式

$$\hat{M}_x(\bar{s}) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_x - \phi_\omega(0)y) ds \quad (31)$$

$$\hat{M}_y(\bar{s}) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_y + \phi_\omega(0)x) ds \quad (32)$$

当只考虑 \vec{ij} 边时, 坐标系 (n, s) 是固定的, 可以计算 n 和 s 方向的合力矩, 这只要对式 (31), 式 (32) 进行坐标转换就可得到

$$\hat{M}_n(\bar{s}) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_n - \phi_\omega(0)s) ds \quad (33)$$

$$\hat{M}_s(\bar{s}) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_s) ds \quad (34)$$

另外, 根据表 1 知道切力的分布是

$$Q_n = \partial\phi_\omega/\partial s \quad (35)$$

因此 \bar{s} 点的合力为

$$\hat{Q}(\bar{s}) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} (\phi_\omega) ds \quad (36)$$

式 (33), 式 (34), 式 (36) 给出了在局部坐标系 (n, s) 上计算合力和合力矩的公式. 根据有限元功等价应力堆集的方法得到 \vec{ij} 边贡献给节点 $l \in \{i, k, j\}$ 的力和力矩为

$$Q_l = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (\phi_\omega) N_l ds \quad (37)$$

$$M_{nl} = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_n - \phi_\omega(0)s) N_l ds \quad (38)$$

$$M_{sl} = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (-\phi_s) N_l ds \quad (39)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \left(s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) \right) \left(s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) - 1 \right) / 2 \\ N_k &= 1 - \left(s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) \right)^2 \\ N_j &= \left(s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) \right) \left(s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) + 1 \right) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

L_{ij} 是 \vec{ij} 边的长度.

现在 R/M 板单元节点力和力矩的计算式已得到, 对于偶应力单元, 根据比拟关系从式 (37)~式 (39) 立即得到 \vec{ij} 边贡献给节点 $l \in \{i, k, j\}$ 的角卷矢量 $\vartheta_l = \{\vartheta_{\omega l} \ \vartheta_{nl} \ \vartheta_{sl}\}^T$ 为

$$\vartheta_{\omega l} = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (\omega_z) N_l ds \quad (41)$$

$$\vartheta_{nl} = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (-u_n - \omega_z(0)s) N_l ds \quad (42)$$

$$\vartheta_{sl} = \int_i^j \frac{\partial}{\partial s} (-u_s) N_l ds \quad (43)$$

关于这类积分式的计算, 在文献 [17] 中已经有了充分的讨论, 直接应用其结果得到 \vec{ij} 边对角卷向量 ϑ 的贡献是

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_i \\ \vartheta_k \\ \vartheta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J} & -4\hat{J} \\ \mathbf{0} & 8\hat{J} \\ -\hat{J} & -4\hat{J} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}} + \omega_z(0)\mathbf{r} \quad (44)$$

其中

$$\hat{J} = \text{diag}[1, -1, -1] \quad (45)$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \{\tilde{\omega}_z \ \tilde{u}_n \ \tilde{u}_s \ \tilde{\omega}_z \ \tilde{u}_n \ \tilde{u}_s\}^T \quad (46)$$

$$\mathbf{r} = \left\{ 0 \ -L_{ij}/6 \ 0 \ 0 \ -2L_{ij}/3 \ 0 \ 0 \ -L_{ij}/6 \ 0 \right\}^T \quad (47)$$

式 (46) 中的符号 $\tilde{*}$ 和 $\tilde{*}$ 分别表示

$$\tilde{*} = \frac{1}{L_{ij}} \int_i^j * ds, \quad \tilde{*} = \frac{1}{L_{ij}^2} \int_i^j * s ds \quad (48)$$

式 (44) 已经给出以广义位移 $\tilde{\mathbf{d}}$ 表示的角卷向量表达式, 但 $\tilde{\mathbf{d}}$ 中各分量是积分意义下的广义位移, 应用起来还不方便, 最好能以节点位移和旋转代替之. 注意到 $\tilde{\mathbf{d}}$ 具有 6 个独立分量, 为得到适定的位移系统, 也应当以 6 个独立节点位移和旋转分量表示之, 为此作如下插值

$$\omega_z = \frac{\left(1 - s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) \right)}{2} \omega_{zi} + \frac{\left(1 - s / \left(\frac{L_{ij}}{2} \right) \right)}{2} \omega_{zj} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
 u_n &= \left(2\left(\frac{s}{L_{ij}}\right)^3 - \left(\frac{3s}{2L_{ij}}\right) + \frac{1}{2}\right)u_{ni} - \\
 &\quad \left(2\left(\frac{s}{L_{ij}}\right)^3 - \left(\frac{3s}{2L_{ij}}\right) - \frac{1}{2}\right)u_{nj} - \\
 &\quad \left(\frac{s^3}{L_{ij}^2} - \frac{s}{4} - \frac{s^2 - \left(\frac{L_{ij}}{2}\right)^2}{2L_{ij}}\right)\omega_{zi} - \\
 &\quad \left(\frac{s^3}{L_{ij}^2} - \frac{s}{4} + \frac{s^2 - \left(\frac{L_{ij}}{2}\right)^2}{2L_{ij}}\right)\omega_{zj} \quad (50) \\
 u_s &= \frac{\left(1 - s/\left(\frac{L_{ij}}{2}\right)\right)}{2}u_{si} + \frac{\left(1 - s/\left(\frac{L_{ij}}{2}\right)\right)}{2}u_{sj} \quad (51)
 \end{aligned}$$

将式 (49)~(51) 代入式 (46) 得到

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{T}_{\vec{ij}} \mathbf{d}_{\vec{ij}} \quad (52)$$

$$\mathbf{T}_{\vec{ij}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -L_{ij}/12 & 1/2 & 0 & L_{ij}/12 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\ L_{ij}/120 & -1/10 & 0 & L_{ij}/120 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{d}_{\vec{ij}} = \left\{ \omega_{zi} \quad u_{ni} \quad u_{si} \quad \omega_{zj} \quad u_{nj} \quad u_{sj} \right\}^T \quad (54)$$

将式 (52) 代入式 (44) 并以平均值代替 $\omega_z(0)$ 就得到最终的 (n, s) 坐标系上以角节点位移和旋转表示的角卷向量表达式

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_i \\ \vartheta_k \\ \vartheta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{J}} & -4\hat{\mathbf{J}} \\ \mathbf{0} & 8\hat{\mathbf{J}} \\ -\hat{\mathbf{J}} & -4\hat{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\vec{ij}} \mathbf{d}_{\vec{ij}} + \frac{\omega_{zi} + \omega_{zj}}{2} \mathbf{r} \quad (55)$$

表达式 (55) 经坐标变换化为单元局部坐标系 (x, y) 上的表达式后就可以组装到角卷向量 ϑ 中。当单元 4 条边对角卷向量的贡献都组装完毕，就得到了式 (24) 中矩阵 Φ 。而单元自由度 \mathbf{d} 就是

$$\mathbf{d} = \{(\omega_{zI} \quad u_I \quad v_I), I = 1, \dots, 4\}^T \quad (56)$$

值得指出的是，角卷向量 ϑ 是模拟齐次平衡状态的 R/M 板单元的节点力和力矩得到的，因此它也具有“自平衡”的性质，即各个节点角卷矢量的矢量和为零，以及当 \mathbf{d} 是刚体位移时 ϑ 为零向量，这些都是很容易验证的。

4 数值算例

算例 1 受单向等拉作用带圆孔方板的应力集中系数

在经典弹性理论中，受单向拉伸作用无限大平板的圆孔应力集中系数是 3.0。而在偶应力理论中，根据 Mindlin^[18] 的计算，应力集中系数显著降低了，只有当特征长度 l 趋于零时才获得经典解。

有限元计算以有限尺度的方板代替无限大平板。带圆孔方板的有关数据在图 2 中给出^[10]。根据对称性，只需计算 1/4 板即可。为充分考察单元的精度和稳定性、收敛性，这里分别应用了两个序列的网格，第 1 类网格的环向单元数与径向单元数比例为 2:3，第 2 类网格的环向单元数与径向单元数比例为 1:2。图 3 是单元划分示意图。表 3 和表 4 分别给出两个网格序列的数值结果，图 4 和图 5 分别给出相应的归一化解（即数值解 / 理论解）。数值结果显示：在所有情形数值解都是稳定收敛的；除了 $a/l = 1$ 时的收敛解偏大 5%~6% 之外，其它情形都获得了与理论解很好的一致。考虑到被转化的 R/M 板单元 Q8S 自身的性能，可以认为本文单元的精度和收敛性是令人满意的。

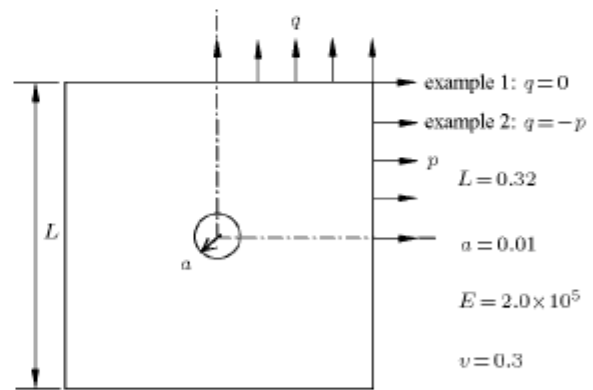


图 2 受单向等拉 / 等值拉压作用的带圆孔方板

Fig.2 Square plate with circular hole subjected to uniform distributed force

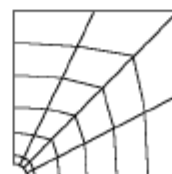


图 3 1/4 板的 4x6 网格划分

Fig.3 4x6 mesh on 1/4 plate

表 3 受单向等拉作用带圆孔方板的应力集中系数:
网格序列 1

Table 3 The stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching force: Meshes series 1

Mesh	a/l					
	1.0	2.0	3.0	5.0	10.0	100.0
4×6	1.939	1.968	2.004	2.065	2.084	1.871
6×9	2.085	2.243	2.366	2.530	2.680	2.352
8×12	2.120	2.309	2.455	2.653	2.867	2.450
12×18	2.151	2.342	2.493	2.697	2.950	2.707
16×24	2.168	2.350	2.494	2.687	2.932	2.850
20×30	2.170	2.351	2.490	2.673	2.903	2.938
exact	2.067	2.336	2.529	2.744	2.913	≈ 3.0

表 4 受单向等拉作用带圆孔方板的应力集中系数:
网格序列 2

Table 4 The stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching force: Meshes series 2

Mesh	a/l					
	1.0	2.0	3.0	5.0	10.0	100.0
4×8	1.963	2.035	2.111	2.204	2.206	1.926
6×12	2.119	2.273	2.403	2.578	2.736	2.340
8×16	2.162	2.345	2.492	2.690	2.903	2.471
10×20	2.182	2.372	2.525	2.729	2.963	2.630
14×28	2.197	2.389	2.541	2.742	2.979	2.807
18×36	2.202	2.389	2.538	2.734	2.962	2.912
exact	2.067	2.336	2.529	2.744	2.913	≈ 3.0

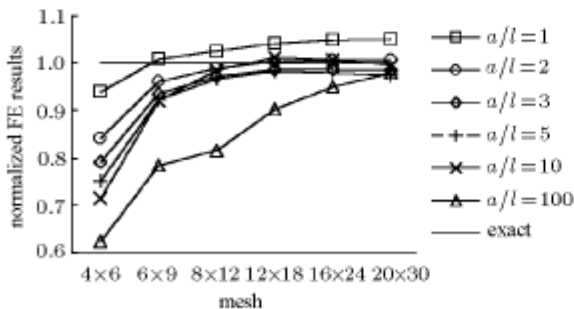


图 4 受单向等拉作用带圆孔方板的应力集中系数
归一化解: 网格序列 1

Fig.4 The normalized solutions of stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching force: Meshes series 1

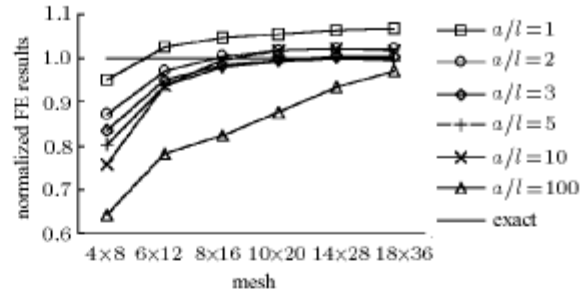


图 5 受单向等拉作用带圆孔方板的应力集中系数
归一化解: 网格序列 2

Fig.5 The normalized solutions of stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching force: Meshes series 2

算例 2 受等值拉压作用带圆孔方板的应力集中系数

这一问题的经典弹性理论解为 4.0 . 而在偶应力理论中, 当 a/l = 2.0 时理论解为 2.671 , 比经典解有明显降低.

同样对图 2 的方板进行计算, 表 5 和图 6 给出数值解和相应的归一化解. 从中可以得到与算例 1 相同的结论.

表 5 受等值拉压作用带圆孔方板的应力集中系数

Table 5 The stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching and compressive forces

Mesh series 1	4×6	6×9	8×12	12×18	16×24	20×30
FE results	1.407	2.122	2.364	2.535	2.589	2.609
Mesh series 2	4×8	6×12	8×16	10×20	14×28	18×36
FE results	1.702	2.257	2.465	2.561	2.637	2.658

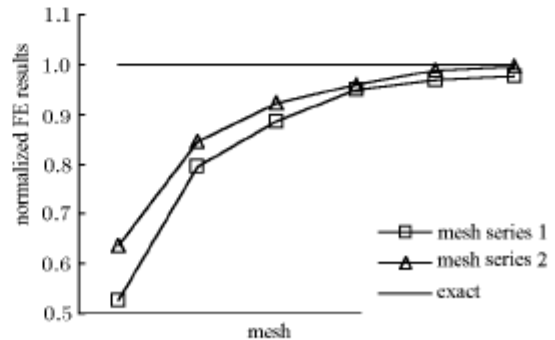


图 6 受等值拉压作用带圆孔方板的应力集中系数归一化解

Fig.6 The normalized solutions of stress concentration factor of plate with circular hole subjected to uniform stretching and compressive forces

5 结 论

应用平面偶应力理论与 R/M 板单元之间的比拟关系, 本文探讨了将 R/M 板单元转化为平面偶应力单元的一个一般方法, 并且应用这一方法将典型的 8 节点 24 自由度 Serendipity 型 R/M 板单元 Q8S 转化为一个 4 节点 12 自由度的偶应力单元, 数值结果表明该偶应力单元具有良好的精度和收敛性。

偶应力有限元的研究较之 R/M 板单元是远不充分的, 本文的研究意在探索应用比拟关系沟通两类问题的有限元, 从而为偶应力有限元的研究提供新的思路和方法。

参 考 文 献

- 1 Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1887. 34
- 2 Cosserat EF. Théorie des corps déformables. Paris: Herman, 1909
- 3 Mindlin RD, Tiesten HF. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, 11: 415~448
- 4 Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, 11: 385~414
- 5 Koiter WT. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. *Proc Royal Netherlands Acad Sci Series B*, 1964, LXV II: 17~44
- 6 Green AE, Rivlin RS. Multipolar continuum mechanics. *Arch Rational Mech Anal*, 1964, 17: 113~156
- 7 Marsden JE, Hughes T.J.R. Mathematical Foundations of Elasticity. New York: Dover, 1994
- 8 Simo JC, Fox DD, Hughes T.J.R. Formulation of finite elasticity with independent rotations. *Compt Meth Appl Mech Engng*, 1992, 95: 277~288
- 9 Hermann LR. Mixed finite elements for couple-stress analysis. In: Atluri SN, et al. eds. Hybrid and Mixed Finite Element Methods. New York: Wiley, 1983
- 10 吴长春, 李雷, 李子然. 计算工程科学中的杂交元方法. 见: 袁明武, 孙树立. 中国计算力学大会论文集. 中国计算力学大会, 广州: 2001, 北京: 北京大学出版社, 2001 (Wu Changchun, Li Lei, Li Ziran. Hybrid finite element method in computational engineering science. In: Yuan Mingwu, Sun Shuli eds, Computational Mechanics in Engineering and Science. Conference of Computational Mechanics of China, Guangzhou, 2001. Beijing: Peking University Press, 2001 (in Chinese))
- 11 李雷, 吴长春. 应变梯度偶应力理论中的杂交有限元方法研究. 固体力学学报, 2003, 24: 93~97 (Li Lei, Wu Changchun. A hybrid element formulation for materials with strain gradient effects. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 24: 93~97 (in Chinese))
- 12 Yu SW. On the analogues relating plane problem of couple-stress theory and Reissner's plate theory. *Z Angew Math Mech*, 1987, 67(4): 246~247
- 13 Wood RD. Finite element analysis of plane couple-stress problems using first order stress functions. *Int J Numer Meth Eng*, 1988, 26: 489~509
- 14 钟万勰等. Reissner 板弯曲与平面偶应力的模拟. 大连理工大学学报, 2002, 42(5): 519~521 (Zhong Wanxie et al. Analogy between Reissner plate bending and plane couple-stress. *J DUT*, 2002, 42(5): 519~521 (in Chinese))
- 15 Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method, Vol 2(Fifth edn). Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000
- 16 钟万勰, 姚伟岸. 板弯曲与平面弹性有限元的同一性. 计算力学学报, 1998, 15(1): 1~13 (Zhong Wanxie, Yao Weian. Similarity between finite elements in plane elasticity and plate bending. *Chinese J Computational Mechanics*, 1998, 15(1): 1~13 (in Chinese))
- 17 黄若煜, 郑长良, 钟万勰等. 基于膜板比拟理论的一个新的四边形薄板单元. 应用数学和力学, 2002, 3(3): 239~249 (Huang Ruoyu, Zheng Changliang, Zhong Wanxie, et al. A new quadrilateral thin plate element based on the membrane-plate similarity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(3): 239~249(in Chinese))
- 18 Mindlin RD. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exper Mech*, 1963, 3: 1~7

FINITE ELEMENT OF ELASTICITY WITH COUPLE-STRESS USING THE ANALOGY BETWEEN PLANE COUPLE-STRESS AND REISSNER/MINDLIN PLATE BENDING¹⁾

Huang Ruoyu* Wu Changchun* Zhong Wanxie[†]

**(School of Civil Engineering & Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)*

†(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract In order to include the effect of microstructure, the theory of elasticity with couple stress considers couple stress which does not appear in the classical elasticity theory. However, there exists a crucial C^1 continuity difficulty in the finite element formulation of elasticity with couple stress.

The analogy between plane elasticity with couple stress and Reissner/Mindlin plate bending provides an important way to avoid the C^1 continuity difficulty. According to the analogy, the C^1 continuity difficulty can be avoided naturally by the formulation in the space of stress functions, and the formulation can be analogous to the one of certain Reissner/Mindlin plate bending element in the space of transversal deflection and rotation.

The unsettled problem is how to transform the finite element with stress functions as degree of freedom (DOF) into the one with usual planar displacement and rotation as DOF. Using the analogy, the present work provides an effective and rigorous method to deal with this problem. The final finite element has two important characteristics. Firstly, the formulation in space of stress functions avoids C^1 continuity difficulty. Secondly, the discrete unknown DOF are usual displacement and rotation.

As an application of the present method, a finite element of plane couple stress with 12 DOF is transformed from the eight nodes serendipity Reissner/Mindlin plate bending element. Numerical results of typical problems show that the present element has satisfactory precision and convergence.

Key words analogy, couple-stress, Reissner/Mindlin plate bending, C^1 continuity, finite element

Received 31 May 2003, revised 13 October 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172078).