

环形液池内中等 Pr 数流体的浮力-热毛细对流¹⁾

彭 岚^{*,2)} 李友荣^{*} 曾丹苓^{*} 今石宣之[†]

^{*}(重庆大学动力工程学院, 重庆 400044)

[†](日本九州大学先导物质化学研究所)

摘要 为了了解水平温度梯度作用时环形液池内的浮力-热毛细对流特性, 利用有限差分法进行了非稳态三维数值模拟, 环形液池外壁被加热, 半径为 40 mm, 内壁被冷却, 半径为 20 mm, 液池深度为 3~17 mm, 液池内流体为 0.65cSt 的硅油, 其 Pr 数为 6.7. 模拟结果表明, 当水平温度梯度较小时, 流动为轴对称稳态流动, 随着温度梯度的增加, 流动将会失去其稳定性, 在浅的液池内 ($d = 3$ mm), 转化成三维振荡流动, 在深的液池内 ($d \geq 6$ mm), 转化成三维稳定流动; 模拟计算的临界温差及表面温度分布图像与实验结果基本吻合.

关键词 数值模拟, 浮力-热毛细对流, 轮型, 硅油, 环形液池

中图分类号: O363.2, TK124 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2005)03-0266-06

引 言

在熔体晶体生长过程中, 对流体运动的了解是至关重要的, 一般说来, 希望得到性能均匀的晶体材料, 但是, 如果熔体的运动是非稳定的, 则晶体的均匀性就会受到破坏^[1]. 引起熔体运动的主要原因是浮力和热毛细力, 当沿自由表面的温差超过某一临界值后, 熔体的运动将会变为非稳定的振荡运动. 在过去的几十年中, 浮力-热毛细对流已引起了学者们的注意, 许多理论分析、实验研究和数值模拟工作已完成^[2,3], 结果证实了浮力-热毛细对流的转变以及多种流动结构类型的存在. 最近, Schwabe 等^[4~6]报道了一系列环形液池内热毛细对流和浮力-热毛细对流的实验结果, 在这些实验中, 液池外壁被加热, 半径为 40 mm, 内壁被冷却, 半径为 20 mm, 液池深度 d 为 2.5~20 mm, 流体为 0.65cSt 的硅油, 实验结果表明, 在小的水平温差下, 流动为稳态的多胞流动, 随着温差的增大, 流动将会失去其稳定性, 首先转化成热流体波, 当温差再增加时, 将会出现更加复杂的振荡流动. 与此同时, 在 Schwabe 实验条件下微重力 (μ - G) 时的三维^[7,8]和二维^[9,10]热毛细对流的数值模拟也已经完成, 结果证实了流动转变及各种振荡流型的存在, 然而, 当考虑重力影响时 (1 - G) 环形液池内中等 Pr 数

流体的浮力-热毛细对流的数值模拟还未见报道, 为此, 本文进行了一系列的数值模拟, 模拟条件与 Schwabe 等的实验条件基本相同.

1 物理数学模型

1.1 基本假设和控制方程

物理模型如图 1 所示, 环形液池内径为 $r_i = 20$ mm, 外径为 $r_o = 40$ mm, 深度为 $d = 3 \sim 17$ mm, 流体为 0.65cSt 硅油, 底部为固壁, 而顶部为不变形的自由边界, 底部和顶部均绝热, 内、外壁分别维持恒温 T_C 和 T_H ($T_H > T_C$). 为简化起见, 假定 1) 硅油为不可压缩流体, 除表面张力外, 满足 Boussinesq 近似; 2) 流体流速较低, 流动为层流; 3) 在顶部自由表面考虑热毛细力的作用, 而在所有固壁满足无

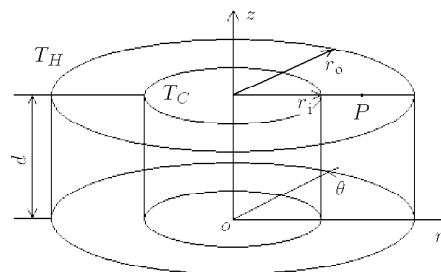


图 1 物理模型

Fig.1 Physical model

2004-08-04 收到第 1 稿, 2005-02-25 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50476042).

2) E-mail: penglan@cqu.edu.cn

滑移条件. 分别将 r_0^2/ν , r_0 , ν/r_0 和 $\rho\nu^2/r_0^2$ (ν 为流体黏度, ρ 为密度) 作为控制方程系统的无量纲参考时间、长度、速度和压力, 则无量纲化后的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{V} + Gr \theta \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (3)$$

边界条件如下:

自由界面 ($Z = Z_d = d/r_0$, $0.5 < R < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

$$\frac{\partial V_r}{\partial Z} = Re \frac{\partial \theta}{\partial R}, \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial Z} = Re \frac{\partial \theta}{R \partial \theta}, \quad V_z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

底部 ($Z = 0$, $0.5 < R < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

$$V_r = V_\theta = V_z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (5)$$

内壁 ($R = 0.5$, $0 \leq Z \leq d/r_0$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

$$V_r = V_\theta = V_z = 0, \quad \theta = \theta_i = 0 \quad (6)$$

外壁 ($R = 1$, $0 \leq Z \leq d/r_0$, $0 \leq \theta < 2\pi$)

$$V_r = V_\theta = V_z = 0, \quad \theta = \theta_o = 1 \quad (7)$$

其中, \mathbf{V} 为无因次速度矢量, P 为无因次压力, $\theta = (T - T_C)/(T_H - T_C)$ 为无因次温度, τ 为无因次时间, R 和 Z 分别为无因次坐标, \mathbf{e}_z 为 Z 方向单位矢量. $Re = \gamma_T(T_H - T_C)r_0/(\mu\nu)$ 为毛细雷诺数, $Pr = \nu/a$ 为普朗特数, $Gr = \beta g(T_H - T_C)r_0^3/\nu^2$ 为格拉晓夫数, μ 为黏度, $\gamma_T = -\partial\gamma/\partial T$ 为表面张力温度系数, a 为热扩散率, β 为体积膨胀系数; 为了反映浮力的影响, 引入动力学 Bond 数, 其定义为浮力与表面张力之比, 即 $Bo = \rho g \beta d^2 / \gamma_T$. 20°C 时硅油的物性参数如表 1 所示.

表 1 20°C 时硅油的物性参数

Table 1 Physical properties of silicone oil at $t = 20^\circ\text{C}$

Symbol	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$\alpha/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$	$\nu/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$	$\gamma_T/(\text{Nm}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})$	β/K^{-1}
value	760	0.97×10^{-7}	0.65×10^{-6}	-8.0×10^{-5}	1.34×10^{-3}

1.2 数值方法

利用有限差分法对基本方程进行离散, 扩散项采用中心差分, 对流项采用二阶迎分, 压力 - 速度修正采用 SIMPLE 方法. 网格为 $62^r \times (22 - 42)^z \times 63^\theta$ 的非均匀网格, 无因次时间步长为 $(1 - 4) \times 10^{-6}$, 对应真实时间为 $(2 \sim 8) \times 10^{-3}\text{s}$, 在每个时间步长, 如果所有控制容积上的最大残差小于 10^{-7} , 则认为收敛条件满足. 程序的正确性及网格的收敛性已被大量的计算结果所证实 [8~10].

2 结果与讨论

2.1 稳态流动

当沿自由表面水平温差较小时, 环形液池内的流动为稳定的轴对称流动, 因此, 流场可用无因次流函数 ψ 表示, 其定义为

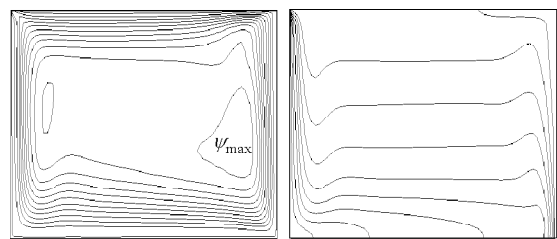
$$V_R = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad V_Z = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

图 2 给出了一组典型的稳态浮力 - 热毛细对流的等流函数线和等温线, 显然, 基本的稳态流动为单胞结构, 在自由表面, 流体从温度较高的外壁向温度较低的内壁流动, 而在底部固壁附近, 存在向外

壁的回流; 同时, 随着液池深度的增加, 流动加强, 相应的最大流函数增大; 与纯热毛细对流稳态流动过程相比 (文献 [8] 中图 2), 重力将使稳态流胞向下扩展, 并充满整个液池. 由于流体的运动, 在内、外壁附近将会出现热边界层, 在边界层内, 温度梯度较大, 相反, 在流道中部, 温度梯度较小, 而且, 随着流道深度的增加, 热边界层变得更加重要, 当深



(a) $Z_d = 0.075$, $\psi_{\max} = 1.59$, $Re = 10^4$



(b) $Z_d = 0.425$, $\psi_{\max} = 2.32$, $Re = 10^4$

图 2 稳态流动时的等流函数线 (左侧) 和等温线 (右侧), $\delta\psi = 0.2$, $\delta\theta = 0.1$

Fig.2 The stream function (left) and isotherms (right), $\delta\psi = 0.2$, $\delta\theta = 0.1$

$\delta\psi = 0.2$, $\delta\theta = 0.1$

度超过 6 mm ($Z_d = 0.15$) 时, 在流道中部几乎没有温度降, 所有的温度降都发生在热边界层内. 由于薄的热边界层的存在, 在冷、热壁附近, 温度梯度较大, 因此, 对应的表面径向速度也较大, 一般来说, 最大表面径向速度总是位于内壁附近; 由于自由表面流体以一个较大的速度冲刷冷壁, 因此, 当其在底部附近回流时, 将会使内部流体的温度低于自由表面流体的温度.

2.2 流动转变的临界条件

当水平温差超过某一临界值时, 稳态的浮力 - 热毛细对流将会失去其稳定性, 此时, 任何微小的三维扰动都会被放大, 最终转化成各种三维流动, 图 3(a) 给出了在监视点 P 处 ($R = 0.75, Z = 1, \theta = 0$) 周向速度的生长放大过程. 当液池较浅时, 例如 $d = 3$ mm ($Z_d = 0.075$), 则任何微小的周向速度都会被振荡式放大, 最终形成振荡的三维流动, 相反, 当液池较深时, 例如 $d = 11$ mm ($Z_d = 0.275$), 则周向速度逐步单调放大, 并最终形成稳定的三维流动. 无论哪种三维流动, 在自由表面 $R = 0.75$ 处周向速度沿周向的分布都是不均匀的, 其速度不均匀性的最大幅度 A 被定义为

$$A = \max_k \left| V_{\theta,k}(r_i, d, \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{\theta,k}(r_i, d, \theta) d\theta \right|$$

当液层厚度一定时, 周向速度的波动幅度会随沿自由界面水平温差的增加而增大, 如图 3(b) 所示, 显然, 在近临界点附近, 周向速度的波动幅度随温差呈线性变化, 因此, 可以采用线性外推法确定流动转变过程的临界条件, 即认为 $A = 0$ 时的温差为临界温差. 根据上述方法确定的临界温差如图 3(c) 所示, 图中也同时给出了 Schwabe 等^[5] 的实验结果和 μ - G 下热毛细对流临界温差的计算结果, 由此可见, 当 $d = 11$ mm ($Z_d = 0.275$) 和 17 mm ($Z_d = 0.425$) 时,

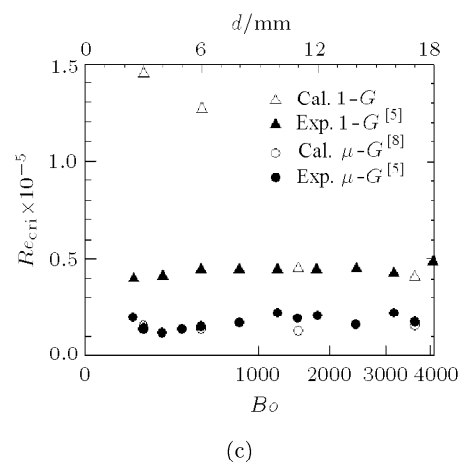
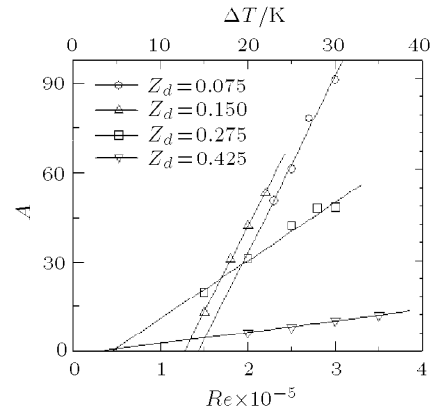
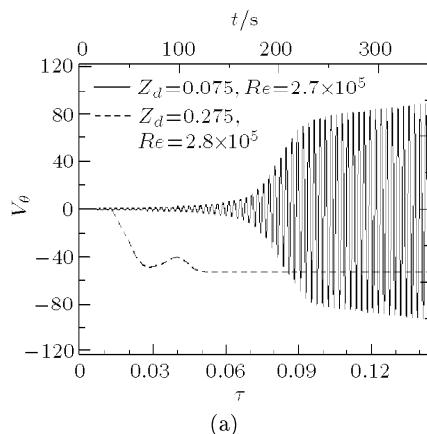


图 3 周向速度扰动的放大过程 (a)、临界温差的确定 (b) 以及临界温差计算结果的比较 (c)

Fig.3 Growth of the azimuthal velocity disturbance (a), determination of the critical temperature difference (b) and comparison of the simulation results and experimental results (c)

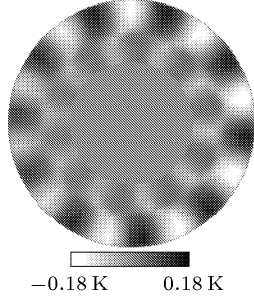
计算结果与实验值吻合较好, 而当 $d = 3$ mm ($Z_d = 0.075$) 和 6 mm ($Z_d = 0.15$) 时, 计算结果偏高; 同时, 数值计算结果也证实^[5], 与 μ - G 下热毛细对流临界温差相比, 浮力 - 热毛细对流的临界温差较高, 即重力的作用是使流动过程变得更加稳定, 流动转变过程将推迟.

2.3 三维振荡热毛细对流

对于 $d = 3$ mm ($Z_d = 0.075$) 的液层, 当温差超过临界温差时, 稳态的浮力 - 热毛细对流将会转变为振荡的浮力 - 热毛细对流. 图 4 给出了 $d = 3$ mm ($Z_d = 0.075$), $\Delta T = 27$ K ($Re = 2.7 \times 10^5$) 条件下的数值模拟结果, 包括表面温度波动分布 (左侧上部)、在 $R = 0.75$ 处表面温度的时间 - 空间分布 (即 STD 图, 左侧下部) 和在 $\theta = 0$ 截面上一个周期内的温度波动 (右侧). 其中, 温度波动定义为

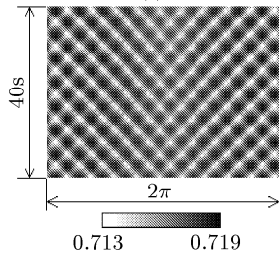
$$\delta T(R, \theta, Z, t) = T(R, \theta, Z, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(R, \theta, Z, t) d\theta$$

当表面径向温差超过临界值时，在自由表面上将会出现许多沿周向运动的轮型。当温差低于 27 K



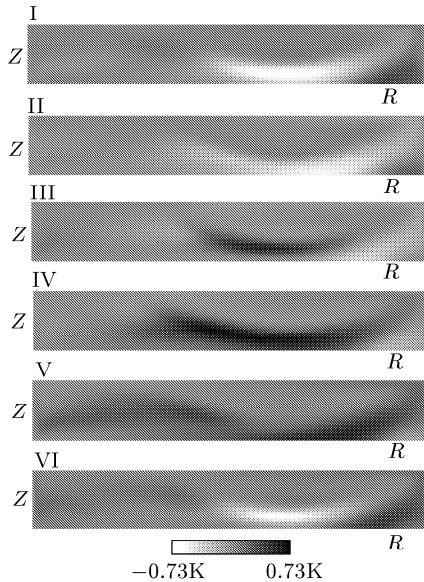
(a) 自由表面温度波动幅度

(a) The oscillation amplitude of temperature at free surface



(b) 自由表面 $R = 0.75$ 处 STD 图

(b) STD at free surface and $R=0.75$



(c) $\theta = 0$ 截面在一个周期内的温度波动

(c) The temperature disturbance at $\theta = 0$ within one period

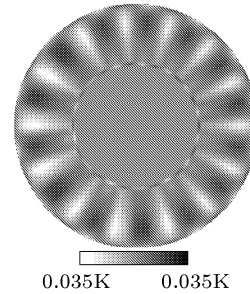
图 4 $Z_d=0.075$, $Re = 2.7 \times 10^5$ 时的振荡三维流动

Fig.4 Oscillatory three-dimensional flow at $Z_d=0.075$ and $Re = 2.7 \times 10^5$

($Re = 2.7 \times 10^5$) 时，运动的轮型数为 10，其起源于 $\theta = \pi$ 处，然后沿两条路径向着 $\theta = 0$ 处运动，一个是沿顺时针方向，另一个是沿逆时针方向；当温差增大到 30 K ($Re = 3.0 \times 10^5$) 时，运动的轮型数下降为 9，其起源于 $\theta = 5^\circ$ 处，然后沿两条路径向着 $\theta = 185^\circ$ 处运动。从径向来看，如图 4(c) 所示，在 $\theta = 0$ 截面上，温度波动起源于液池中部靠近热壁区域，然后分别向内壁和外壁运动，因此，在自由表面温度波动图上 (图 4(a))，存在一个明显的分界线，即浮力的存在将改变三维振荡流动的流型。另一方面，通过对在监视点 P 处温度波动进行的 FFT 频谱分析发现，在所计算范围内 ($\Delta T \leq 30$ K)，温度波动都只有一个主频，且其值与温差无关，为 $f = 0.176$ Hz；相反，在 μ -G 情况下，当温差小于 5 K ($Re = 0.5 \times 10^5$) 时，热毛细对流在 P 点处温度波动频率几乎不变，而在 5 K 附近，主频将会突然增加，当温差超过 5 K 后，主频随温差逐渐增加 [8]。

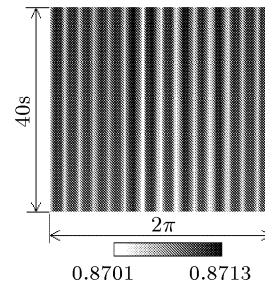
2.4 三维稳定热毛细对流

对于厚度超过 6 mm 的液层，当温差超过临界温差时，稳态的轴对称浮力 - 热毛细对流将会变为三维稳定流动，图 5 给出了 $d = 11$ mm ($Z_d = 0.475$)，



(a) 自由表面温度波动幅度

(a) The oscillation amplitude of temperature at free surface



(b) 自由表面 $R=0.75$ 处 STD 图

(b) STD at free surface and $R=0.75$

图 5 $Z_d = 0.275$, $Re = 2.8 \times 10^5$ 时的稳定三维流动

Fig.5 The stationary three-dimensional flow at $Z_d=0.275$ and $Re = 2.8 \times 10^5$

$\Delta T = 28 \text{ K}$ ($Re = 2.8 \times 10^5$) 条件下的数值模拟结果, 包括表面温度波动分布 (左侧) 和在 $R = 0.75$ 处表面温度的时间 - 空间分布 (右侧), 在这种情况下, 表面稳定的轮数为 14; 三维稳定流型的出现是由于两个完全对称的、沿相反方向运动的热流体波相互叠加的结果, 此时, 在 θ 方向会出现多对逆向旋转的轴向滚胞, 其中心轴与温度梯度的方向相同^[4,5]. 同时计算发现, 表面轮数随沿自由表面的温差增大而减少, 随液池深度的增加而增多, 此结论与已有的实验结果^[11] 是完全一致的. 图 6 给出了相近温差条件下计算表面温度波动与实验结果^[4] 的比较结果, 显然, 表面温度波动的型式基本相同, 但计算出的轮数略高于实验结果.

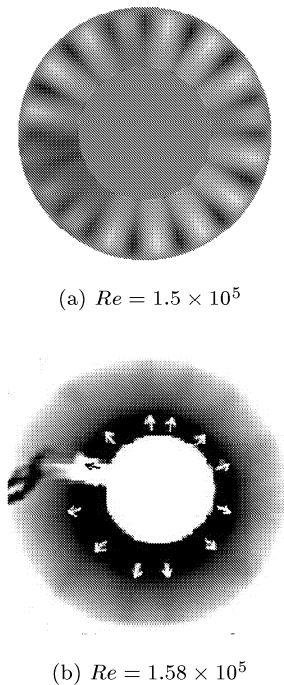


图 6 $Z_d = 0.425$ 时稳态三维流动表面的轮型计算结果 (a) 与实验结果 (b) 的比较

Fig.6 Comparison of the simulation result (a) and experimental result (b) for the stationary three-dimensional flow at $Z_d = 0.425$

3 结 论

利用有限差分法对水平温度梯度作用时环形液池内的浮力 - 热毛细对流进行了三维数值模拟, 结果表明:

(1) 当水平温差较小时, 流动为稳态轴对称流

动, 随着温差的增加, 流动将会失去其稳定性, 转化成各种三维流动;

(2) 流动失稳的临界温差随液层厚度的增加而减小;

(3) 当液层厚度较小时, 流动为振荡对流, 其振荡频率与温差无关; 当液层厚度较厚时, 流动为稳定三维流动, 其表面轮数随温差增大而减少, 随深度增加而增多;

(4) 计算得到的临界温差和自由表面温度波动型式与已有实验结果基本吻合.

参 考 文 献

- Hurle DTJ. Thermo-hydrodynamic oscillation in liquid metals: the cause of impurities striations in melt-grown crystals. *J Phys Chem Solids*, 1967, 1: 659~669
- Levich HG, Krylov VS. Surface tension-driven phenomena. *Ann Rev Fluid Mech*, 1969, 1: 293~316
- Ostrach S. Low-gravity fluid flows. *Ann Rev Fluid Mech*, 1982, 14: 313~345
- Benz S, Schwabe D. The three-dimensional stationary instability in dynamic thermocapillary shallow cavities. *Experiments in Fluids*, 2001, 31: 409~416
- Schwabe D. Buoyant-thermocapillary and pure thermocapillary convective instabilities in Czochralski systems. *J Crystal Growth*, 2002, 237-239: 1849~1853
- Schwabe D, Zebib A, Sim BC. Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. I. Experiments under microgravity. *J Fluid Mech*, 2003, 491: 239~258
- Sim BC, Zebib A, Schwabe D. Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. II. Simulations. *J Fluid Mech*, 2003, 491: 259~274
- Li YR, Peng L, Akiyama Y, et al. Three-dimensional numerical simulation of thermocapillary flow of moderate Prandtl number fluid in annular pool. *J Crystal Growth*, 2003, 259: 374~387
- Li YR, Peng L, Wu SY, et al. Thermocapillary convection in a differentially heated annular pool for moderate Prandtl number fluid. *Int J Thermal Sciences*, 2004, 43: 587~593
- 李友荣, 彭岚, 吴双应等. 环形浅液池内中等 Pr 数流体的热毛细对流. *工程热物理学报*, 2004, 25(3): 484~486 (Li Yourong, Peng Lan, Wu Suangying, et al. Thermocapillary convection in a thin annular pool for moderate Prandtl number fluid. *J Engineering Thermophysics*, 2004, 25(3): 484~486 (in Chinese))
- Burguete J, Mukolobwiz N, Daviaud F, et al. Buoyant-thermocapillary instabilities in extended liquid layers subjected to a horizontal temperature gradient. *Phys Fluids*, 2001, 13: 2773~2787

BUOYANT-THERMOCAPILLARY CONVECTION OF MODERATE PRANDTL NUMBER FLUID IN AN ANNULAR POOL¹⁾

Peng Lan^{*,2)} Li Yourong^{*} Zeng Danling^{*} Imaishi Nobuyuki[†]

^{*}(College of Power Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

[†](Institute for Materials Chemistry and Engineering, Kyushu University, Japan)

Abstract In order to understand the nature of buoyant-thermocapillary convection in an annular pool with the outer heated container of radius $r_o = 40$ mm and the inner cooled cylinder of $r_i = 20$ mm, and an adjustable depth $d = 3 \sim 17$ mm, we conducted a series of unsteady three-dimensional numerical simulations with the finite difference method. The pool was filled with the 0.65cSt silicone oil (Prandtl number $Pr = 6.7$). Results show that a small temperature difference in the radial direction generates steady roll-cell buoyant-thermocapillary flow. With large temperature difference, the simulations can predict two types of flow instability. In a shallow pool ($d = 3$ mm), the hydrothermal wave characterized by curved spokes traveling in the azimuthal direction is dominant while in deep pools ($d \geq 6$ mm), the three-dimensional stationary instability appears. The critical conditions for the onset of the instability flows and the free surface temperature fluctuation are determined and compared with the experimental results.

Key words computer simulation, buoyant-thermocapillary convection, spoke pattern, silicon oil, annular pool

Received 4 August 2004, revised 25 February 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50476042).

2) E-mail: penglan@equ.edu.cn