

基于 Boussinesq 方程的波浪模型¹⁾

马小舟²⁾ 董国海 滕 斌

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 从欧拉方程出发, 提供了另一种推导完全非线性 Boussinesq 方程的方法, 并对方程的线性色散关系和线性变浅率进行了改进. 改进后方程的线性色散关系达到了一阶 Stokes 波色散关系的 Padé[4,4] 近似, 在相对水深达 1.0 的强色散波浪时仍保持较高的准确性, 并且方程的非线性和线性变浅率都得到了不同程度的改善. 方程的水平一维形式用预估 - 校正的有限差分格式求解, 建立了一个适合较强非线性波浪的 Boussinesq 波浪数值模型. 作为验证, 模拟了波浪在潜堤上的传播变形, 计算结果和实验数据的比较发现两者符合良好.

关键词 Boussinesq 模型, 色散关系, 波浪变形, 浅水, 表面水波

中图分类号: O353.2 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)06-0760-07

引 言

在设计海岸建筑物时常需要确定当地的波浪参数, 但通常测量得到只是深海的波浪参数. 因此, 准确模拟波浪从深水传到浅水时的变化长期以来一直是工程师和科学家们的目标之一. 随着计算机技术的发展, Boussinesq 方程逐渐成为众多描述波浪在浅水区变形的一个比较理想的模型. Boussinesq 方程经过一个半世纪多的发展, 现在已经发展成一类方程. 这些方程中都有两个重要参数, 即 ε 和 μ^2 . ε 是波幅和水深的比值, 用来度量波浪的非线性, 而 μ^2 是水深和波长比值的平方, 用来度量波浪的色散性. 经典形式的 Boussinesq 方程在 ε 和 μ^2 同量阶的假定下只适用于模拟弱非线性和弱色散性的波浪, 这显然不能满足实际的需要. 因为波浪在从深水传向浅水的过程中, 随着水深的减小波浪的非线性将逐渐加强, 同时会出现波长较短的高阶谐波, 这样经典 Boussinesq 方程对于非线性较强的波浪以及波长较短或者水深较大的波浪的模拟会出现相当大的误差.

对于经典 Boussinesq 方程的改进主要是从两方面着手: 一是在推导过程中保留更多高阶项, 如 Madsen 等^[1], Goobi^[2] 和 Goobi 等^[3] 都提出了一系列精确到 $O(\mu^4)$ 的高阶 Boussinesq 方程; 另一个方法是在经典方程中人为引入一些色散项, 用于改进方程的

色散精度, 如 Madsen 等^[4], Nwogu^[5], Schäffer 等^[6] 与 Zou^[7] 等. Wei 等^[8] 首先不再假设 $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2)$ 提出了一套 Boussinesq 方程, 保留了所有 $O(\mu^2)$ 量阶的非线性项, 但是方程的色散精度仍是一阶 Stokes 波频散关系的 Padé[2,2] 近似. Gobbi 等^[3] 将此方法推广, 提出了一套精确到 $O(\mu^4)$ 的 Boussinesq 方程, 保留了所有 $O(\mu^4)$ 量阶的非线性项, 方程的非线性特性得到了大幅度提高, 方程频散精度也提高到一阶 Stokes 波频散关系的 Padé [4,4] 近似. Agnon 等^[8,9] 通过满足海底和自由水面的边界条件并联合 Laplace 方程的近似级数解得到了一组由 6 个耦合的方程组成的 Boussinesq 方程, 它可以保证相同量阶的线性和非线性特性. 吴耀祖^[10] 回顾了近年来水波问题的发展并介绍了一个可以模拟非定常, 三维全非线性、全频散的重力波在可变深度水中的传播, 该模型通过求解 Laplace 方程的级数解将三维问题简化为二维问题, 通过选取级数的截断位置可以得到不同精度的方程. 这些改进都使得方程的精度得到了不同程度的提高, 扩大了它们的应用范围. 但同时应该注意到, 高阶的方程含有高阶导数项或者增加了未知数的个数, 这些都增加了方程求解的难度.

本文首先将 Nwogu^[5] 的方法推广, 从欧拉方程出发推导一组精确到 $O(\mu^2, \varepsilon^3 \mu^2)$ 的 Boussinesq 方

2005-03-31 收到第 1 稿, 2005-10-26 收到修改稿.

1) 新世纪优秀人才支持计划资助项目 (NCET-04-0267).

2) E-mail: maxzh@student.dlut.edu.cn

程, 接着对方程的色散特性进行了改进, 使其色散精度达到了一阶 Stokes 波色散精度的 Padé[4, 4] 近似. 用有限差分法求解了水平一维方程并模拟了水槽中波浪在潜堤上的传播变形, 并将计算结果与实验数据进行了比较.

1 数学模型

1.1 控制方程

引入三维直角 $x'y'z'$ 坐标系, 其中 $x'y'$ 平面位于静水面上, z' 竖直向上. 考虑一波浪场为自由面 $z' = \eta'(x', y', t')$ 和海底 $z' = -h'(x', y')$ 所包围, 波浪场中的特征水深、特征波长和特征波幅分别为 h_0 , l_0 和 a_0 并定义以下无量纲量

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x'}{l_0}, \quad y = \frac{y'}{l_0}, \quad z = \frac{z'}{h_0}, \quad t = \frac{\sqrt{gh_0}}{l_0} t' \\ \eta &= \frac{\eta'}{a_0}, \quad h = \frac{h'}{h_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho g a_0} \\ \mathbf{u} &= \frac{h_0}{a_0 \sqrt{gh_0}} \mathbf{u}', \quad w = \frac{h_0^2}{a_0 l_0 \sqrt{gh_0}} w' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}' \equiv (u', v')$ 和 w' 分别为水平方向速度矢量和竖向速度分量, g 是重力加速度, ρ 为密度, p' 为自由面压力, “'” 表示有量纲量. 这样, 理想不可压缩无黏性流体作无旋运动的无量纲形式的控制方程, 即欧拉方程可表示为

$$\mu^2 \mathbf{u}_t + \varepsilon \mu^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \varepsilon w \mathbf{u}_z + \mu^2 \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon w_t + \varepsilon^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) w + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} w w_z + \varepsilon p_z + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\mu^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + w_z = 0 \quad (4)$$

其中 $\varepsilon = a_0/h_0$ 和 $\mu^2 = (h_0/l_0)^2$ 两个参数分别用来度量波浪的色散和非线性, 下标表示对相应量的偏导数, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 为水平方向梯度向量. 水体运动的无旋条件由下式给出

$$u_y - v_x = 0, \quad \nabla w - \mathbf{u}_z = \mathbf{0} \quad (5)$$

并且在自由面和海底必须满足以下边界条件

$$p = 0, \quad z = \varepsilon \eta \quad (6)$$

$$w = \mu^2 \eta_t + \varepsilon \mu^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta, \quad z = \varepsilon \eta \quad (7)$$

$$w = -\mu^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) h, \quad z = -h \quad (8)$$

Boussinesq 方程推导的一个首要目标就是将上述的三维问题转化为二维问题. 为此, 对连续方程 (4) 从海底 $-h$ 到波面 $\varepsilon \eta$ 积分并利用自由表面条

件 (6) 和条件 (7) 将连续方程转化为

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{M} = \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \mathbf{u} dz \quad (9)$$

其中 \mathbf{M} 为质量通量.

对动量方程 (3) 从任意水深 z 到波面 $\varepsilon \eta$ 积分可得压强

$$p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\varepsilon \eta} w dz + \varepsilon \nabla \cdot \int_z^{\varepsilon \eta} \mathbf{u} w dz - \frac{\varepsilon}{\mu^2} w^2 \quad (10)$$

对连续方程 (4) 从海底 $-h$ 到任意水深 z 积分可得垂向速度

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \mathbf{u} dz \right) \quad (11)$$

将式 (10) 和式 (11) 代入水平方向的欧拉方程 (2) 并联合方程 (9) 可以得到一组只包含 3 个未知量 $((u, v), \eta)$ 的方程. 所得到的方程由于没做任何简化, 对于各阶 ε 和 μ^2 都是准确的, 但是因为水平速度 \mathbf{u} 沿水深的变化未知并不能求解. 为了得到水平速度的近似表达式将 \mathbf{u} 在任意水深 z_α 作 Taylor 展开

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha + (z - z_\alpha) \mathbf{u}_z|_{z=z_\alpha} + \frac{1}{2} (z - z_\alpha)^2 \mathbf{u}_{zz}|_{z=z_\alpha} + \dots \quad (12)$$

其中 $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}(x, y, z_\alpha, t)$ 为任意水深处的水平速度.

将式 (11) 代入无旋条件可得

$$\mathbf{u}_z|_{z=z_\alpha} = -\mu^2 [\nabla (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \nabla h + \int_{z_\alpha}^z \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) dz] \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (12) 有

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \mu^2 (z - z_\alpha) [\nabla (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \nabla h + \int_{z_\alpha}^z \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) dz] + O(\mu^4) \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (11) 得垂向水质点速度

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot [(z - z_\alpha) \mathbf{u}_\alpha] + O(\mu^4) \quad (15)$$

将方程 (15) 代入无旋条件 (5) 并从水底 $-h$ 到任意水深 z 积分有

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \mu^2 \frac{z^2 - z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \mu^2 (z - z_\alpha) \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] + O(\mu^4) \quad (16)$$

将式 (15) 和式 (16) 带入式 (10) 积分得到

$$p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} - \mu^2(\varepsilon\eta - z)[\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] - \mu^2 \frac{\varepsilon^2 \eta^2 - z^2}{2} [\varepsilon(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}] - \varepsilon \mu^2 (\varepsilon\eta - z)(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha) + O(\mu^4) \quad (17)$$

将水质点速度 w, \mathbf{u} 和压力 p 的近似表达式 (15)~(17) 代入方程水平动量方程 (2) 经过计算保留到 $O(\mu^2)$, 但不再假设 $O(\mu^2)$ 和 $O(\varepsilon)$ 同量阶而保留所有 $O(\mu^2)$ 量阶的非线性项可得

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + \nabla \eta + \varepsilon(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \mu^2(\mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2 + \varepsilon^3 \mathbf{A}_3) = O(\mu^4) \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \nabla \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) + z_\alpha [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] \right\} \\ \mathbf{A}_1 &= \nabla \left\{ -\eta [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] + z_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \left[\frac{1}{2} z_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha) \right] + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)]^2 \right\} \\ \mathbf{A}_2 &= \nabla \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) - \eta (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] + \eta [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} \\ \mathbf{A}_3 &= \nabla \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

方程 (18) 和 (19) 的推导过程与 Nwogu^[5] 相比并没有对水平动量方程沿水深进行积分, 但是含有垂向变量 z 的项自动消失, 这个特性使得推导过程得到了简化.

将水平速度 \mathbf{u} 的表达式代入质量守恒方程 (9) 得 M 的表达式

$$M = (h + \varepsilon\eta) \left\{ \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 \left[z_\alpha - \frac{1}{2} (\varepsilon\eta + h) \right] \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] + \mu^2 \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (\varepsilon^2 \eta^2 - \varepsilon\eta h + h^2) \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} \quad (20)$$

这样就得到了一组 Boussinesq 方程, 动量守恒方程 (18) 和 (19) 以及质量守恒方程 (9) 和 (20), 方程中保留了所有 $O(\mu^2)$ 量阶的非线性项. 这组方程与 Wei 等^[8] 所推导的方程相同, 如果只保留到 $O(\varepsilon, \mu^2)$ 量阶, 方程简化为 Nwogu^[5] 的方程.

1.2 方程色散特性的改进

上面得到的控制方程通过选择不同水深的 \mathbf{u} 最好可以得到近似到 Padé[2,2] 的色散关系. 为改善方程的色散特性, 下面应用 Schäffer 等^[6] 提出的方法

改进方程的色散关系和非线性特性. 为改进动量方程, 将算子 $(\alpha_2 - \alpha_1)\mu^2 h^2 \nabla(\nabla \cdot)$ 和 $-\alpha_2 \mu^2 h \nabla(\nabla \cdot h)$ 分别作用于方程 (18) 并将得到的结果保留到 $O(\mu^2)$ 再加入到方程 (18) 得到新的动量方程.

改进连续方程的方法与改进动量方程相类似, 将算子 $(\beta_2 - \beta_1)\mu^2 \nabla \cdot (h^2 \nabla)$ 和 $-\beta_2 \mu^2 \nabla^2 (h^2)$ 分别作用于方程 (9) 后将得到的结果保留到 $O(\mu^2)$ 再加入到方程 (9) 得到新的质量方程. 将改进后的方程利用式 (1) 所定义的量改写为有量纲形式并省略掉“”得

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + g \nabla \eta + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{0} \quad (22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= (h + \eta) \left\{ \mathbf{u}_\alpha + \left(z_\alpha - \frac{1}{2} (\eta + h) \right) \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] + \left(\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (\eta^2 - \eta h + h^2) \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} + (\beta_2 - \beta_1) h^2 \nabla [\eta_t + \nabla \cdot ((h + \eta) \mathbf{u}_\alpha)] - \beta_2 \nabla \{ h^2 [\eta_t + \nabla \cdot ((h + \eta) \mathbf{u}_\alpha)] \} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) h^2 \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) - \alpha_2 g h \nabla [\nabla \cdot (h \nabla \eta)] + (\alpha_2 - \alpha_1) g h^2 \nabla (\nabla^2 \eta) + (z_\alpha - \alpha_2 h) \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] \\ \mathbf{A}_1 &= \nabla \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)]^2 - \eta [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] + z_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \left[\frac{1}{2} z_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha) \right] \right\} + \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) h^2 \nabla [\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}_\alpha^2)] - \frac{1}{2} \alpha_2 h \nabla [\nabla \cdot (h \nabla \mathbf{u}_\alpha^2)] \\ \mathbf{A}_2 &= \nabla \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) - \eta (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] + \eta [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} \\ \mathbf{A}_3 &= \nabla \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对上述方程进行 Fourier 分析, 即将 $\eta = \eta_0 \cos(\omega t - kx)$ 和 $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_{\alpha 0} \cos(\omega t - kx)$ 代入常水深中线性化的方程 (21) 和 (22) 中容易得到其线性色散关系为

$$\frac{\omega^2}{gk^2 h} = \frac{1 + p_1 (kh)^2 + p_2 (kh)^4}{1 + p_3 (kh)^2 + p_4 (kh)^4} \quad (25)$$

式中各系数为

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 + \beta_1 - \alpha - \frac{1}{3}, \quad p_2 = \alpha_1 \left(\beta_1 - \alpha - \frac{1}{3} \right) \\ p_3 &= \alpha_1 + \beta_1 - \alpha, \quad p_4 = \beta_1 (\alpha_1 - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 $\alpha = z_\alpha/h + (z_\alpha/h)^2$ 为取不同水位的参数。

方程中 5 个参数 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 和 β_2 待定, 其中 $(\alpha, \alpha_1, \beta_1)$ 用于改进线性色散关系, 而 (α_2, β_2) 用于优化线性变浅率. 将方程的色散关系 (25) 和一阶 Stokes 波的色散关系 $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ 的 Padé [4,4] 展开匹配, Madsen 等 [1] 共找到了 $(\alpha, \alpha_1, \beta_1)$ 的 4 组解, 经过比较他们推荐 $(\alpha, \alpha_1, \beta_1) = (-0.395, 0.0105, 0.0392)$. 这组解不仅可以使方程在不出现 $O(\mu^4)$ 量阶项的情况下保证其线性色散关系达到一阶 Stokes 波色散关系的 Padé [4,4] 近似, 还可以使方程得到较好的非线性特性. 在此基础上, 他们得到 $(\alpha_2, \beta_2) = (0.0215, 0.145)$, 改进了原方程的线性变浅特性. 图 1 给出了改进和未改进方程的相速度与一阶 Stokes 的相速度的比值随相对水深 kh 的变化, 可以看出改进后的方程的色散关系在 kh 接近 2π 时仍保持了较高的精度, 扩大了方程的应用范围, 这将在下面的数值模拟结果中得到验证.

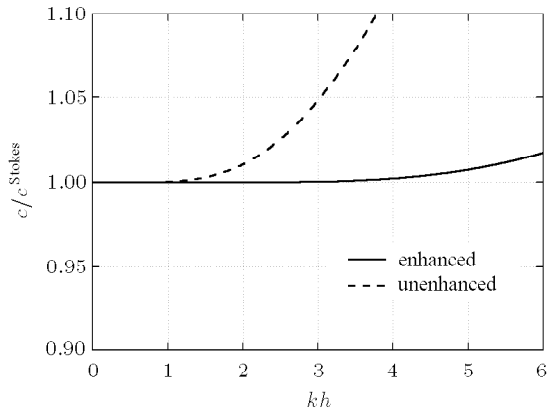


图 1 改进和未改进 Boussinesq 方程的相速度的比较

Fig.1 Comparisons of the phase celerities embedded in the enhanced and unenhanced Boussinesq equations

2 数值求解

对上述建立的控制方程用 Wei 等 [11] 提出的有限差分格式求解. 将方程中对时间导数的线性项移到方程等号的左端, 将其它项保留在等号的右端, 对等号左端的时间导数采用三阶 Adams-Bashforth 显式格式预估, 用 Adams-Moulton 四阶隐式格式校正. 对方程中关于空间的一阶和二阶导数分别采用 5 点

和 3 点中心差分格式, 边界附近的点分别用相应的偏心差分格式离散. 等号右端关于时间导数的非线性项在预估阶段和校正阶段分别采用 3 点和 4 点差分格式离散. 这样离散后方程的左端是下一时间步的未知量, 而方程的右端全部为上一时间步的已知量, 从而每个时间步形成两个关于 η 和 u_α 的两个线性方程组, 其中关于 η 的系数矩阵是一个带宽为 9 的常系数矩阵, 而关于 u_α 的系数矩阵是一个常系数三对角阵, 这两个矩阵均可以事先求出其逆阵, 在计算中快速求解 η 和 u_α . 在时间上的步进过程中, 每次校正后计算相邻两次的 η 和 u_α 的误差, 如果误差不满足要求则继续迭代, 否则开始下一时间步计算.

采用上述差分格式可以使得控制方程中所有非线性浅水方程项的截断误差为四阶, 而所有色散项的截断误差达到二阶, 这样可以保证截断误差小于方程中的所有浅水方程项, 从而得到高精度的数值解.

在计算中采用 Wei 等 [12] 提出的源函数法在计算域内造波. 对于改进后的 Boussinesq 方程经重新推导, 一波幅为 a_0 的正向入射的正弦波造波源函数幅值 D 传递函数的可表达为

$$D = 2a_0 \frac{2p_2gh^5k^6 + (p_1gh^3 - p_4h^4\omega^2)k^4 + \omega^2}{[1 - (\alpha - \alpha_1)k^2h^2]\omega k \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{k^2}{4\sigma}}} \quad (27)$$

其中 k 是波数, ω 是波浪的圆频率, σ 是决定计算域内造波源函数宽度的参数.

3 波浪在潜堤上的变形

为了验证上述数值模型及数值解的有效性, 作者将模拟波浪在潜堤上的变形并和实验数据进行对比.

波浪在潜堤上的变形是一个比较复杂的问题, 其中既含有波与波的相互作用还同时伴随着高阶谐波的产生, 波浪的能量将会从主频向高频传递. Beji 等 [13], Luth 等 [14] 以及 Ohyama 等 [15] 都先后用物理模型实验研究了波浪在潜堤上的变形, Dingamans [16] 和 Gobbi 等 [2] 先后也用 Boussinesq 方程模拟了这个过程. 事实上 Luth 等 [14] 和 Beji 等 [13] 所用的地形几乎完全相同, 只不过前者水槽和潜堤的几何尺寸是后者的两倍. 值得一提的是 Luth 等在水槽的末端采用主动吸收来避免波浪的反射, 并在整个实验中监测水槽中的二阶长波. 这里作者

选用 Luth 等^[14]的实验数据与本文的计算结果比较来验证模型的有效性. 为了和前人保持一致, 他们的实验地形将被等比例缩小两倍如图 2 所示, 图中同时给出了测点的位置, 其中 x 轴的坐标原点固定在造波板的平均位置.

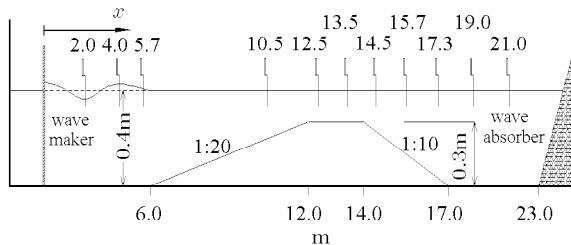


图 2 Luth 等^[14]实验布置及测点位置图

Fig.2 Sketch of experiment setup of Luth et al.^[14]

Luth 等在实验中共测量了 3 组正弦波在潜堤上的变形, 为简单起见, 本文只选取第 1 组进行模拟. 该组波浪在造波板处波幅 $a = 0.01$ m, 周期 $T = 2.02$ s. 计算时网格划分为 $\Delta x = 0.025$ m, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s, 造波源函数的宽度控制参数取 $\sigma = 1.0$.

图 3 给出了 x 为 10.5 m, 14.5 m, 19.0 m 和 21.0 m 共 4 个测点的测量值和数值模拟的比较. 从图 3 中可以看出, 在波浪到达坡顶之前, 改进和未改进方程模拟的结果相近. 但是在波浪下坡和堤后的水域中, 改进后的方程表现出了较高的精度. 从波浪在潜堤上的演化过程可知, 波浪在爬坡的过程中, 随着水深的减少由于非线性的变浅作用, 波浪的能量不断从主频传向高频, 波浪中的高阶谐波将不断增加, 波浪越来越陡, 波峰变尖变高, 波谷变宽变浅, 见图 3 中 $x = 10.5$ m 处波形. 这些高频波和原波浪一起以同一相速度传播. 当波浪到达潜堤的坡顶时, 水深变为常量, 波浪为适应这一变化, 将有部分约束高阶谐波被释放成为自由波. 在波浪的下坡过程中, 由于水深的不断增加, 更多原来与主频波浪以同一相速度传播的高阶谐波将被释放. 这样, 在堤顶之后的水槽中将出现几种不同波速传播的波浪, 使得水槽中的波形变得很复杂, 见图 3 中 $x = 21.0$ m 处波形. 这些释放的自由谐波与原波浪叠加后的波形取决于它们之间的相位差. 而要准确估计这些高频谐波无疑需要较高精度的色散关系. 未改进的方程由于色散关系只近似到 Padé[2,2], 因此当高阶谐波释放成为自由波时波面与实测值会出现明显误差.

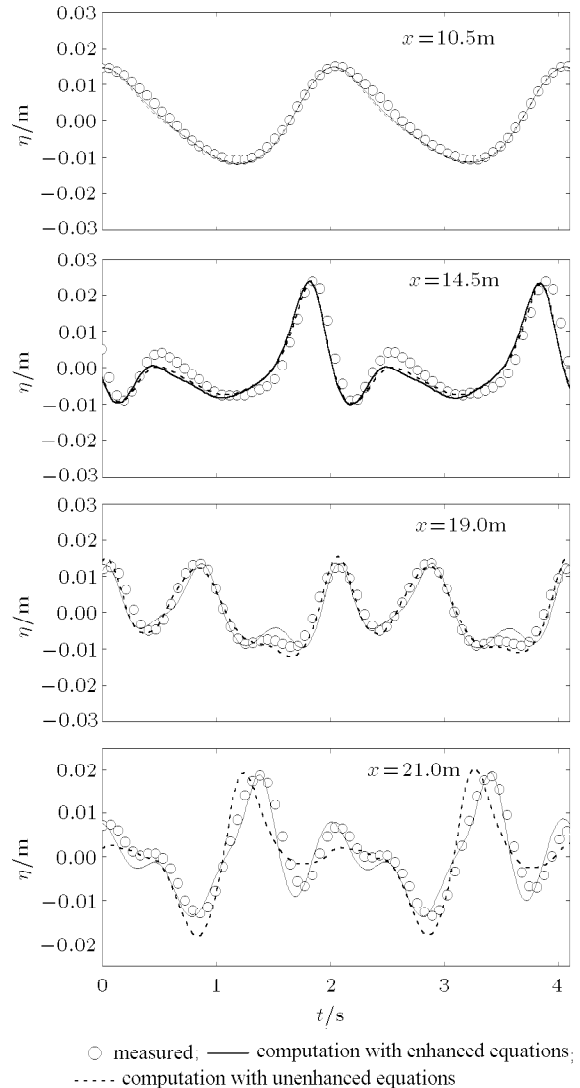


图 3 4 个测点波面升高数值计算结果的实测值的比较

Fig.3 Comparisons of free surface elevations at four stations with the experimental data

通过对水槽中不同位置波浪的 Fourier 分析, 可以更清楚地看出整个复杂的过程, 图 4 给出了各阶谐波的波幅在水槽中不同水深的变化过程. 从图 4 中可以看出, 主频所对应的波幅, 即一阶波幅在爬过潜堤后明显减少, 而高阶谐波的波幅得到迅速增长. 一阶和二阶自由谐波对应的 kh 分别为 0.67 和 1.7, 两组方程对一阶和二阶谐波成长的估计相似. 但是, 三阶和四阶自由谐波对应的 kh 分别达到了 3.6 和 6.3, 这样 Padé[2,2] 近似的色散关系已经不能准确估计波浪的色散特性. 从图 4 中可以看出未改进的方程明显过高估计了释放后的三阶和四阶自由谐波. 这说明对方程色散关系改进是有效和必要的.

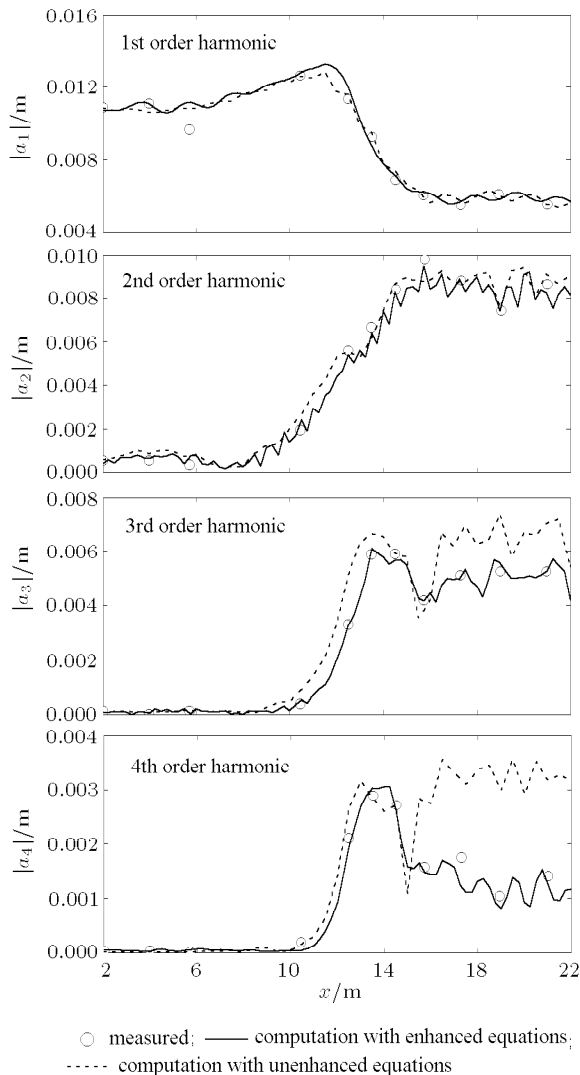


图 4 水槽中各阶谐波沿程变化的计算值和实测值的比较

Fig.4 Comparisons of the spatial variation of the harmonics with the experimental data

4 结 论

本文对 Nwogu 的方法进行了扩展, 推导出了一组 Boussinesq 方程. 推导中不再假设 $O(\mu^2)$ 和 $O(\epsilon)$ 同量阶而保留了所有 $O(\mu^2)$ 量阶的非线性项. 为改善方程的色散等特性对方程的色散关系以及变浅率等特性进行了改良. 改进后的方程的水平一维形式用差分法求解并模拟了水槽中正弦波在潜堤上的变形, 通过数值计算结果和实验数据的比较可以看出近似到 $O(\mu^2, \epsilon^3\mu^2)$ 的低阶 Boussinesq 方程经过改

进表现出了较高的色散精度和非线性精度, 可以模拟波陡较大的波浪.

参 考 文 献

- 1 Madsen PA, Schäffer HA. Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: Derivation and analysis. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1998, 356: 3123~3184
- 2 Gobbi MF. A new Boussinesq-type model for surface water wave propagation. [PhD Thesis]. Delaware: University of Delaware, 1998
- 3 Gobbi MF, Kirby JT, Wei G. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. extension to $O(kh)^4$. *J Fluid Mech*, 2000, 405: 181~210
- 4 Madsen PA, Murray R, Sørensen OR. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Eng*, 1991, 15: 371~388
- 5 Nwogu O. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J Waterway, Port, Coastal Ocean Eng*, 1993, 119 (6): 618~638
- 6 Schäffer HA, Madsen PA. Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Eng*, 1995, 26: 1~15
- 7 Zou ZL. A new form of higher order Boussinesq equations. *Ocean Eng*, 2000, 27: 557~575
- 8 Wei G, Kirby JT, Grill ST, et al. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *J Fluid Mech*, 1995, 294: 71~92
- 9 Agnon Y, Madsen PA, Schaffer HA. A new approach to high-order Boussinesq models. *J Fluid Mech*, 1999, 399: 319~333
- 10 吴耀祖. 水波动力学研究进展. 力学进展, 2001, 31 (3): 327~343 (Wu Theodore Yaotsu. Advances in water wave mechanics. *Adv Mech*, 2001, 31 (3): 327~343 (in Chinese))
- 11 Wei G, Kirby JT. A time dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *J Waterway, Port, Coastal Ocean Eng*, 1995, 121 (5): 251~261
- 12 Wei G, Kirby JT, Sinha A. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. *Coastal Eng*, 1999, 36: 271~299
- 13 Beji S, Battjes JA. Experimental investigation of wave propagation over a bar. *Coastal Eng*, 1993, 19: 151~162
- 14 Luth HR, Klopman G, Kitou N. Kinematics of waves breaking partially on an offshore bar. Delft Hydraulics, 1994, Report H1573
- 15 Ohyama T, Kioka W, Tada A. Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves. *Coastal Eng*, 1995, 24: 297~313
- 16 Dingemans M. Water Waves Propagation over Uneven Bottoms. Singapore, World Scientific, 1997

A WAVE MODEL BASED ON THE BOUSSINESQ EQUATIONS¹⁾

Ma Xiaozhou²⁾ Dong Guohai Teng Bin

(*State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract An alternative method to derive a set of fully nonlinear Boussinesq equations up to the order of $O(\mu^2, \varepsilon^3 \mu^2)$ is presented. The linear dispersion relation and the shoaling gradient of the equations are improved by adding some dispersive terms. The linear dispersion relation of the enhanced equations is the Padé [4,4] expansion of the linear Stokes dispersion relation, the accuracy of which is acceptable even when the relative water depth is as large as 1.0. Its nonlinear property and shoaling gradient are also improved. The horizontal one-dimensional equations are solved with a predictor-corrector finite difference scheme and a fully nonlinear Boussinesq wave model is established, which enjoys high computational efficiency and reliability. The numerical model is verified by simulating the transformation of waves propagating over a submerged bar. The numerical results are verified against the laboratory experimental data, and their agreement is found to be very good.

Key words Boussinesq model, dispersion relation, wave transformation, shallow water, surface water wave

Received 31 March 2005, revised 26 October 2005.

1) The project supported by the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-04-0267).

2) E-mail: maxzh@student.dlut.edu.cn