

斜拉桥索力优化的强次可行序列二次规划法

陶 海^{*,1)} 沈祥福[†]

^{*}(同济大学桥梁工程系, 上海 200092)

[†](鹤岗市交通局公路处, 黑龙江, 鹤岗 154001)

摘要 提出了一种斜拉桥索力优化的实用方法 - 强次可行序列二次规划法. 该方法通过建立斜拉桥索力优化的非线性规划模型, 以主梁和索塔的弯曲应变能为目标函数, 斜拉索的索力为设计变量, 结构应力和索力为约束条件, 计入大跨度斜拉桥各种几何非线性因素的影响, 采用强次可行序列二次规划算法进行优化求解, 确定斜拉桥成桥合理状态的索力. 运用该方法对某斜拉桥进行索力优化, 结果表明该方法简单、有效.

关键词 斜拉桥, 索力优化, 序列二次规划法, 几何非线性, 约束条件

中图分类号: U448.27 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)03-0381-04

引 言

斜拉桥是一个由索、塔、梁 3 种基本构件组成的组合结构体系, 斜拉桥的结构体系一旦确定, 其成桥受力状态主要由斜拉索的索力决定, 因此斜拉桥成桥恒载索力合理与否将直接关系到结构的可靠性与适用性, 确定成桥恒载索力成为斜拉桥设计中的一个至关重要的环节. 由于索力具有可调性, 可以通过调整索力来改变结构的受力状态, 因此, 采用优化计算方法, 总能找到一组索力, 它能使结构体系在确定性荷载作用下, 某种反映受力性能的指标达到最优, 这组索力对应的成桥状态就是对应目标下的成桥合理状态^[1]. 求解这组最优索力, 就是斜拉桥成桥合理状态的索力优化.

现有斜拉桥索力优化方法大多以叠加原理为基础, 只适用于线性结构, 而斜拉桥属比较柔的组合体系, 有较明显的几何非线性问题, 例如拉索的垂度效应、大位移以及梁柱效应等非线性因素, 因此, 探索一套新的能够计入非线性因素的斜拉桥索力优化方法尤为重要. 针对以上问题, 本文探索运用强次可行序列二次规划优化算法进行索力优化, 以主梁和索塔的弯曲应变能为目标函数, 斜拉索的索力为设计变量, 结构应力和索力等为约束条件, 建立可计入大跨度斜拉桥各种几何非线性因素的影响的非线性规划模型, 采用强次可行序列二次规划法进行求解, 用以确定斜拉桥成桥合理状态的索力.

1 强次可行序列二次规划法

序列二次规划 (SQP) 方法是 20 世纪 80~90 年代发展起来的一种最优化方法, 它是研究非线性约束最优化快速收敛算法的十分有效的工具^[2]. 其中, 强次可行 SQP 算法^[3], 是简金宝等学者近几年提出的一个不仅全局收敛、而且在适当条件下为超线性与二次收敛的新型 SQP 算法. 该算法的初始点可以任取、无需使用任何效益函数作线性搜索、一旦某个迭代点可行, 以后的迭代点自动可行、迭代点列的可行性不断增加. 借助广义投影技术, 该算法每次迭代解一个总有可行解的二次规划以确定主搜索方向, 或用广义投影技巧计算辅助搜索方向, 该辅助方向是一种新的强次可行下降方向. 然后采用曲线搜索与直线搜索相结合的办法确定步长.

不等式约束优化问题为

$$\min c_0(\mathbf{x}) \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } c_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in I = 1, 2, \dots, m \quad (1b)$$

其中, $c_0(\mathbf{x})$ 为目标函数, \mathbf{x} 为优化设计变量, $c_i(\mathbf{x})$ 为状态变量的约束函数.

对于当前迭代点 $\mathbf{x}^{(k)} \in R^n$, 引进以下记号和定义

$$\left. \begin{aligned} I_k^- &= I(\mathbf{x}^{(k)}) = \{i \in I | c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0\} \\ I_k^+ &= I^+(\mathbf{x}^{(k)}) = \{i \in I | c_i(\mathbf{x}^{(k)}) > 0\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2005-04-15 收到第 1 稿, 2005-08-18 收到修改稿.

1)E-mail: wilson.t@163.com

$$\varphi_k = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) = \max\{0, c_i(\mathbf{x}^{(k)}) | i \in I\} = \max\{0, c_i(\mathbf{x}^{(k)}) | i \in I_k^+\} \quad (3)$$

$$D_i(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} c_i(\mathbf{x}^{(k)})^2, & i \in I_k^- \\ (\varphi(\mathbf{x}^{(k)}) - c_i(\mathbf{x}^{(k)}))^2, & i \in I_k^+ \end{cases} \quad (4)$$

$$I(\mathbf{x}^{(k)}) = \{i \in I | D_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0\} \quad (5)$$

从而不等式约束优化问题 (1) 可以转化为以下的二次规划

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \mathbf{d}^T \nabla c_0(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d} \\ \text{s.t.} \quad & c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{d}^T \nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0, \quad i \in I_k^- \\ & c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{d}^T \nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \varphi_k, \quad i \in I_k^+ \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, 矩阵 \mathbf{B}_k 为产生强次可行下降方向, \mathbf{d} 为迭代的主搜索方向. 这样二次规划问题 (6) 的解可以逼近原问题 (1) 的解.

显然, 二次规划问题 (6) 总有可行解 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, 计其最优化解为 $(\mathbf{d}_0^{(k)}, \lambda^{(k+1)})$. 令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}) &= (\nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)}), i \in I) \\ \mathbf{D}_k = \mathbf{D}(\mathbf{x}^{(k)}) &= \text{diag}(D_i(\mathbf{x}^{(k)}), i \in I) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}(\mathbf{x}^{(k)}) &= (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{P}(\mathbf{x}^{(k)}) &= \mathbf{E} - \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

二次规划的约束指标集为 L_k , $L_k = L(\mathbf{x}^{(k)}) = L_k^+ \cup L_k^-$, 其中, \mathbf{E} 是单位矩

$$L_k^- = L^-(\mathbf{x}^{(k)}) = \{i \in I_k^- | c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + [\nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)})]^T \mathbf{d}_0^{(k)}\} \quad (9)$$

$$L_k^+ = L^+(\mathbf{x}^{(k)}) = \{i \in I_k^+ | c_i(\mathbf{x}^{(k)}) + [\nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)})]^T \mathbf{d}_0^{(k)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)})\} \quad (10)$$

虽然在优化问题 (1) 的解 \mathbf{x}^* 的适当邻域内, 二次规划问题 (6) 一般有解, 但由于不要求 \mathbf{B}_k 正定, 所以优化问题 (1) 不一定总有有限解, 此时必须引进一个强次可行的辅助搜索方向 $q^{(k)}$

$$q^{(k)} = \rho_k^\theta [-\mathbf{P}_k \nabla c_0(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{Q}_k^T \mathbf{v}^{(k)}], \quad \theta > 0 \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_k = \rho(\mathbf{x}^{(k)}) &= \frac{\|\mathbf{P}_k \nabla c_0(\mathbf{x}^{(k)})\|^2 + \omega_k + \varphi(\mathbf{x}^{(k)})}{1 + |\mathbf{e}^T \boldsymbol{\pi}^{(k)}|} \\ \mathbf{v}_j^{(k)} &= \begin{cases} -1 - \rho_k, & \pi_j^{(k)} < 0 \\ D_j(\mathbf{x}^{(k)}) - \rho_k, & \pi_j^{(k)} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^{(k)} = (\pi_j^{(k)}, j \in I) &= -\mathbf{Q}_k \nabla c_0(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \omega_k = \omega(\mathbf{x}^{(k)}) &= \sum_{j \in I} \max\{-\pi_j^{(k)}, \pi_j^{(k)} D_j(\mathbf{x}^{(k)})\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由于矩阵 $(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + \mathbf{D}_k)$ 是正定的, 故以上定义有意义. 且当仅当 $\rho_k = 0$ 时, $\mathbf{x}^{(k)}$ 为优化问题 (1) 的最优化解. 而若 $(\mathbf{d}_0^{(k)}, \varphi_k) = (\mathbf{0}, 0)$, 则 $(\mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k+1)})$ 为优化问题 (1) 的最优化解. 具体迭代过程详见文献 [3], 这里不再赘述.

2 工程应用

2.1 桥梁概况

本文以某座斜拉桥为研究对象. 该桥属双塔双索面三跨预应力混凝土斜拉桥, 桥跨布置为 103m+240m+103m, 全长 446m, 总体布置如图 1 所示. 主塔是塔柱和上下横梁组成的门式框架结构, 斜拉索采用扇形布置, 每侧 19 对, 不设 0 号索, 主梁截面采用双实心边主梁形式, 为双向预应力混凝土结构.

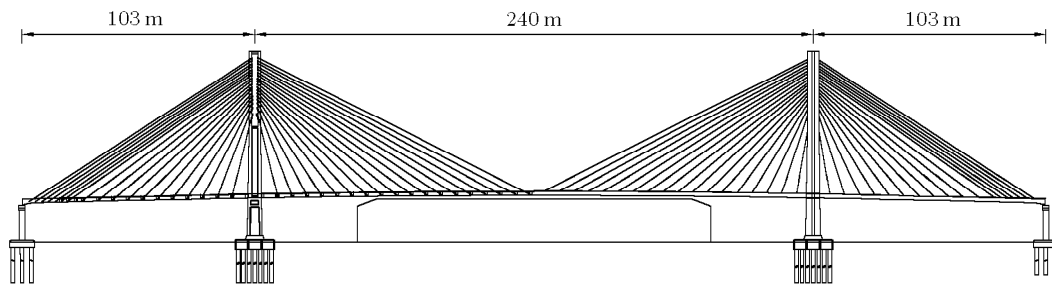


图 1 斜拉桥立面布置图

Fig.1 The general view of cable-stayed bridge

2.2 优化分析

采用非线性有限元程序对结构进行分析，计入大跨度斜拉桥各种几何非线性影响因素，如索的垂度效应，梁塔结构的梁柱效应以及大位移效应等。为提高计算效率，利用对称条件对结构进行简化，取结构的一半进行分析，索塔和主梁均采用高精度的组合梁单元来模拟，斜拉桥用索单元来模拟，具体优化分析过程如下：

建立规划模型与目标函数：采用强次可行 SQP 方法进行索力优化，建立非线性规划模型，将成桥状态下主梁和索塔的最小弯曲应变能为目标函数。其中，主梁与主塔的弯曲应变能为

$$U = \sum_{i=1}^n \int_s \frac{M_i^2(s)}{2E_i I_i} ds$$

式中， n 为主梁和主塔弯曲应变能计算构件数， I_i 为构件组合截面的抗弯惯性矩， M_i 为构件的弯矩， E_i 为材料的压弯弹性模量。

确定设计变量及其约束条件：将斜拉桥索力设置为设计变量。拉索索力在成桥状态及运营过程中，考虑到强度和疲劳问题，应约束索力的上下极限值。全桥共有 38 个设计变量，中跨和边跨拉索各 19 个。给设计变量施加的约束条件为

$$N_{down} \leq N_{Z1}, N_{Z2}, \dots, N_{Z19} \leq N_{up} \text{ (中跨索力)}$$

$$N_{down} \leq N_{B1}, N_{B2}, \dots, N_{B19} \leq N_{up} \text{ (边跨索力)}$$

确定状态变量及其约束条件：在斜拉桥索力优化计算过程中，为保证所有控制内力和位移达到设计要求，在确立目标函数的同时，必须通过施加附加约束条件达到总体与局部的最佳平衡。斜拉桥主梁控制截面的应力、主塔的应力均为欲约束的变量，因此将它们设置为状态变量，约束条件则为主梁截面的应力和主塔的应力所需满足规范要求的限值。

优化分析：基本思路为通过搜索计算，建立设计变量、状态变量与目标函数之间的函数关系，并求得目标函数的最小值。具体过程是，预先假设斜拉索的预张拉力为 0，然后采用强次可行 SQP 法进行最优化搜索计算，经过从头到尾反复试算与迭代，直到主塔与主梁的弯曲应变能为最小、满足收敛精度要求为止。

2.3 分析结果

经过最优化分析，得到了主梁和索塔的最小弯曲应变能为最小目标下的恒载索力，并与设计索力值进行比较，具体结果如图 2 所示，图中 B19~Z19 对应于从桥梁边跨到中跨跨中的各拉索。优化结果显示，单根最大恒载索力发生在边跨第 19 号索，为 5381.6 kN，最小恒载索力发生在中跨第 1 号索，为 1792.5 kN。可以看出，采用该最优化方法，考虑结构的几何非线性因素影响，在以结构最小弯曲应变能为最小的目标情况下，对索力进行优化成为可能，从而表明强次可行序列二次规划法用于斜拉桥的索

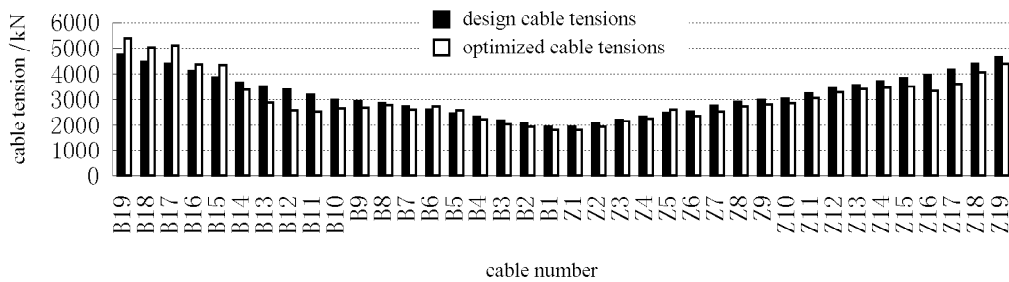


图 2 优化索力与设计索力对比图
Fig.2 The contrast between design cable tensions and optimized cable tensions

力优化是可行和有效的。

3 结 论

(1) 计算结果表明，采用强次可行 SQP 法求解有约束的最优化问题，计算量小，具有全局收敛性、强收敛性、超线性与二次收敛性等特点。该算法的初始点可以任取，无需使用任何效益函数作线性搜

索，避免使用复杂的罚函数和罚参数。该算法每次迭代解一个总有可行解的二次规划以确定主搜索方向，或用广义投影技巧计算一种强次可行下降方向为辅助搜索方向，采用曲线搜索与直线搜索相结合的办法确定步长，且仅需计算有限次，即可获得满意的解。

(2) 将强次可行 SQP 算法引入斜拉桥成桥合理

状态的索力优化是可行的, 结果也是合理的. 该方法可以考虑结构的非线性因素的影响, 可以计入斜拉桥调索过程中对索力、应力、弯矩等不同性态的约束, 适用于多单元、多工况、多设计变量的斜拉桥成桥合理状态的索力优化问题.

(3) 以斜拉桥主梁和索塔的弯曲应变能为目标函数进行索力优化, 能全面反映全桥结构对斜拉索索力的响应, 优化结果更为合理. 同时, 通过计算机程序可以很方便地实现, 可操作性较强, 实用可靠.

参 考 文 献

- 1 肖汝城, 项海帆. 斜拉桥索力优化及其工程应用. 计算力学学报, 1998, 15(1): 118~126 (Xiao Rucheng, Xiang Haifan. Optimization method of cable prestresses of cable-stayed bridges and its engineering applications. *Journal of Computational Mechanics*, 1998, 15(1): 118~126 (in Chinese))
- 2 徐成贤等. 近代优化方法. 北京: 科学出版社, 2002 (Xu Chengxian, et al. Modern Method of Optimization. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 3 简金宝. 不等式约束最优化超线性与二次收敛的强次可行 SQP 算法. 数学物理学报, 2001, 21(2): 268~277 (Jian Jinbao. A superlinearly and quadratically convergent SQP algorithm for inequality constrained optimization. *Journal of Acta Mathematica Scientia*, 2001, 21(2): 268~277 (in Chinese))

STRONGLY SUBFEASIBLE SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING METHOD OF CABLE TENSION OPTIMIZATION FOR CABLE-STAYED BRIDGES

Tao Hai^{*,1)} Shen Xiangfu[†]

^{*}(Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

[†](Department of Road Engineering, Hegang Municipal Communications Administrative Bureau, Hegang, Heilongjiang 154001, China)

Abstract A practical optimization method (strongly subfeasible sequential quadratic programming method) of cable tension optimization for cable-stayed bridges is presented, with a model for nonlinear optimization programming to obtain the force in cables of cable-stayed bridge, in which the bending strain energy of the beams and cable tower of the bridge is the objective function, and the cable forces are the design variable, the stress in the structure or the cable force is the constraint condition. In order to determine the prestressing force of the cables, the influence of various geometrical nonlinearities is considered, and the strongly subfeasible sequential quadratic programming method is used to solve the program. This method is used to obtain the set of optimal cable tensions of a cable-stayed bridge using the spatial nonlinear finite element program. The result of analysis shows that the method is effective.

Key words cable-stayed bridge, cable tension optimization, sequential quadratic programming method, geometrical nonlinearity, constrain condition