

# 估算裂纹应力强度因子的新方法<sup>1)</sup>

吴志学<sup>2)</sup>

(扬州大学机械工程学院, 扬州 225009)

**摘要** 根据裂纹形状与裂纹尖端应力强度因子分布之间的固有关系, 在线弹性断裂力学条件下, 提出了一种按已知 I 型裂纹应力强度因子分布规律求裂纹形状及相应应力强度因子的无梯度迭代法. 通过有限厚度、有限宽度板穿透裂纹和表面裂纹的数值模拟实例验证了所提出方法的有效性和实用性, 并对不同应力强度因子分布规律对裂纹形状以及相应的应力强度因子大小的影响进行了分析和讨论. 所提出的方法有助于提高实际扩展裂纹应力强度因子的估算精度以及更合理地预测疲劳裂纹形状演化.

**关键词** 应力强度因子, 线弹性断裂力学, 表面裂纹, 穿透裂纹, 三维有限元分析

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)03-0414-07

## 引 言

在断裂力学的工程应用中, 应力强度因子 (SIF) 是一个对于结构的安全评定、寿命估算、失效分析和材料的断裂韧性测量等都非常重要的力学参量. 一般情况下, 只要裂纹形状已知, 其应力强度因子可以通过多种方法估算得到, 虽然对一般结构中的裂纹问题必须借助数值方法 (主要是指各种有限单元法和边界元法) 才能解决. 实际上, 对于简单裂纹形状 (如半椭圆形或半圆形裂纹) 已有许多经验公式可供使用, 如适用于表面裂纹的 Newman 和 Raju 解<sup>[1]</sup>. 对于按已知裂纹形状确定 SIF 的方法, 本文称之为“裂纹形状法”. 如果实际裂纹形状为已知, 或者假设的裂纹形状与实际裂纹形状相吻合, 裂纹形状法将极大地简化 SIF 计算以及裂纹扩展预测. 裂纹形状法以及相应取得的 SIF 解已经被广泛应用于含裂纹结构的断裂评估和疲劳寿命估算等方面<sup>[2,3]</sup>.

对于可能含裂纹的工程结构的断裂强度和寿命估算等问题, 应用裂纹形状法首先要解决裂纹形状检测或预测问题. 一般情况下, 受测试手段限制, 准确的裂纹形状通常并不容易获得. 这时就必须用假设的裂纹形状来描述实际裂纹, 从理论观点来看, 这样势必造成误差, 并且由于这一误差的存在, 采用高精度的针对假设裂纹形状的 SIF 解来估算实际裂纹的 SIF 将变得没有实际意义. 为了克服裂纹形状法

的不足, 很多学者曾采用多种数值方法对裂纹形状演化进行模拟, 如基于能量释放率<sup>[4]</sup>、三维权函数理论<sup>[5]</sup>和扩展有限单元法<sup>[6]</sup>等. Lin 和 Smith<sup>[7~9]</sup>采用一种多自由度数值法对表面疲劳裂纹形状演化进行了模拟, 并就裂纹形状和 SIF 分布与假设半椭圆形状的裂纹结果进行了比较分析. 他们发现, 在某些情况下, 扩展裂纹形状及其相应的 SIF 与假设形状裂纹的结果之间较大的偏差. 显然, 除了合理的裂纹扩展增量的计算方法以外, 数值模拟法要求必须已知初始裂纹形状, 并且模拟结果强烈依赖于初始裂纹形状.

裂纹形状与裂纹尖端 SIF 分布之间存在固有的一一对应关系 (载荷条件一定的情况下). 对于实际扩展裂纹, 在线弹性断裂力学条件下, 由于裂纹形状、裂纹扩展速率和 SIF 之间的相互作用关系, 在很多情况下, 裂纹尖端的 SIF 分布可能比裂纹形状表现出更明显的规律性, 或者说, 统一描述裂纹尖端的 SIF 分布可能比描述裂纹形状更容易. 例如, 表面疲劳裂纹扩展中“择优扩展路径”的存在性<sup>[2,3]</sup>就是这一规律性作用的结果<sup>[9]</sup>. 如果采用某种方法能够确定裂纹尖端 SIF 分布规律并按照这一规律直接求出裂纹形状及其相应的 SIF, 这将有助于提高实际扩展裂纹 SIF 的估算精度以及更合理地预测疲劳裂纹形状演化. 为此, 本文将建立一种根据已知 I 型裂纹 SIF 分布规律求裂纹形状及相应 SIF 的无梯度迭

2005-04-20 收到第 1 稿, 2006-02-27 收到修改稿.

1) 教育部留学回国人员科研启动基金和江苏省教育厅自然科学基金资助项目 (04KJB460166).

2) E-mail: Zhixue.wu@yahoo.com

代法，并讨论采用不同分布规律可能产生的影响。关于扩展裂纹尖端 SIF 分布规律的具体确定问题将另外阐述。

### 1 SIF 分布规律的定义

以图 1 所示的不同形状的表面裂纹为例来说明扩展裂纹尖端 SIF 分布规律的含义。当表面裂纹深度  $a$  一定时，不同形状的裂纹，其裂纹尖端的 SIF 分布是不相同的。即使当表面裂纹深度  $a$  和表面长度  $c$  都给定时也是如此。显然，对于任意形状的裂纹，裂纹尖端不同位置点的 SIF 是不相同的，裂纹尖端 SIF 分布可用以裂纹尖端位置为自变量的函数来描述。设表面裂纹位于  $x-y$  平面内，则裂纹尖端任意点的坐标必须满足裂纹尖端曲线方程，所以裂纹尖端 SIF 分布只能是表示裂纹尖端位置的单变量函数。不失一般性，可以选择任何可能的参数  $\chi$  作为 SIF 分布函数  $K(\chi)$  的自变量，如表示裂纹尖端任意点在裂纹线上相对位置的参量  $s/S$  ( $s$  为任意点  $M$  距参考点  $A$  的线长， $S$  为裂纹线总长) 或参数角  $\theta$ ，见图 1。为简化 SIF 分布规律的描述，有必要将 SIF 进行无量纲化处理，使得裂纹尖端的 SIF 分布只与裂纹几何有关而与载荷大小无关。选取裂纹最深点  $A$  作为参考点 (可以选择裂纹尖端任意一点作为参考点，如表面点  $C$  或任意位置点  $M$ )，用该点的 SIF 将  $K(\chi)$  进行无量纲化处理，得到以  $k(\chi) = K(\chi)/K(A)$  表示的裂纹尖端无量纲化 SIF 分布，本文称之为 SIF 分布函数。

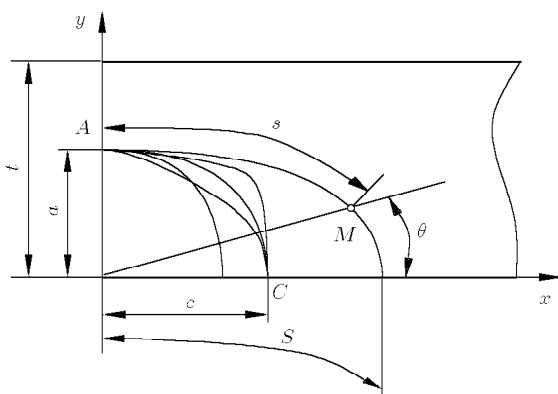


图 1 不同形状表面裂纹 (沿  $y$  轴对称)

Fig.1 Arbitrary surface cracks ( $y$  symmetry)

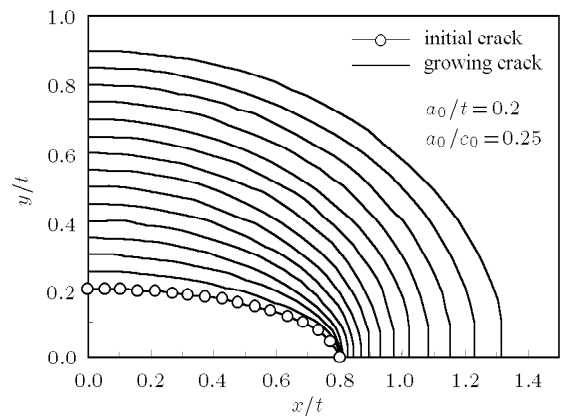
显而易见，如同假设裂纹形状应尽可能符合实际裂纹形状一样，SIF 分布函数应尽可能准确地描述裂纹尖端的 SIF 分布规律。扩展裂纹尖端 SIF 分布规律可以通过实验法或数值模拟法来确定。笔者

曾采用多自由度数值法对拉伸疲劳载荷下的表面裂纹扩展过程进行了模拟。图 2 给出了模拟结果的一个实例。其中，假设疲劳裂纹扩展速率在所有点都满足 Paris 公式<sup>[10]</sup>，并且考虑了裂纹闭合影响。由于本文重点是讨论根据已知的 SIF 分布规律求裂纹形状的方法问题，关于数值模拟法的细节将另外阐述。根据数值模拟结果，建议裂纹尖端 SIF 分布用如下函数近似描述

$$k(\chi) = K(\chi)/K(A) = c_1 + c_2\chi^n \quad (n \neq 0)$$

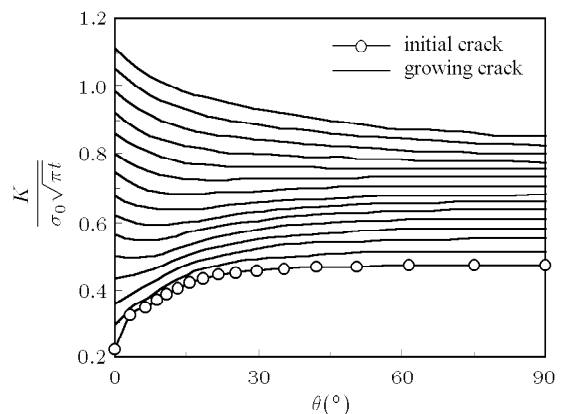
其中， $\chi = s/S$ 。由边界条件  $k(0) = 1$  和  $k(1) = K(C)/K(A)$ ， $k(\chi)$  的详细表达式为

$$k(\chi) = K(\chi)/K(A) = 1 + [K(C)/K(A) - 1]\chi^n \quad (1)$$



(a) 裂纹形状

(a) Crack shape



(b) SIF 分布

(b) SIF distribution

图 2 拉伸疲劳载荷下的半椭圆形表面裂纹扩展示例

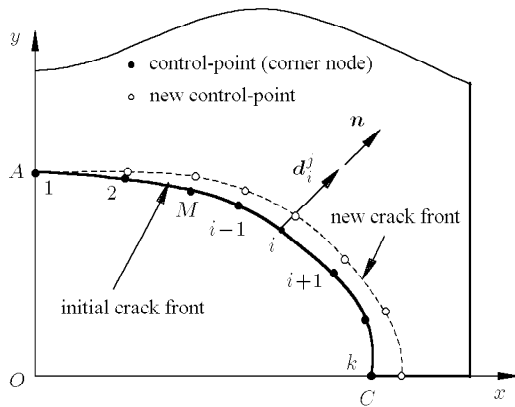
Fig.2 Fatigue shape development of initially semi-elliptical surface crack under tension

显然,  $K(C)/K(A) = 1$  相当于 SIF(Iso- $K_I$ ) 裂纹情况. 在后面的示例与分析中, 式 (1) 将作为已知的 SIF 分布函数并讨论待定参数  $K(C)/K(A)$  和  $n$  对裂纹形状以及相应的 SIF 的影响.

当已知  $k(x)$  和表面裂纹某一尺寸 (裂纹深度  $a$  或表面长度  $c$ ) 时, 应用下面描述的无梯度迭代法就可以唯一确定满足  $k(x)$  的裂纹形状及相应的 SIF.

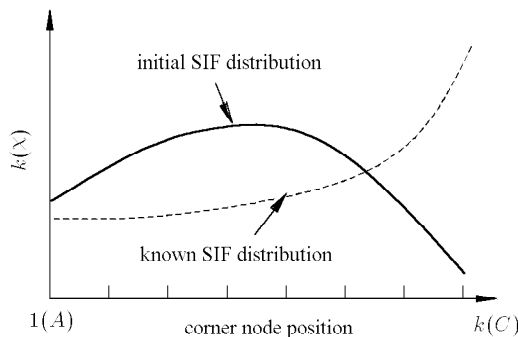
### 2 无梯度迭代法

受远场 I- 型载荷作用的三维体内具有任意形状的裂纹位于  $x$ - $y$  坐标平面内, 如图 3(a) 所示. 该裂纹尖端采用由若干控制点定义的三次样条函数曲线来描述. 这样, 裂纹形状及相应的 SIF 分布的调整可以通过改变控制点位置来实现. 待分析裂纹尖端必须有一点为固定点, 该点实际上给出了裂纹位置或广义的裂纹长度, 如裂纹深度或表面长度. 假设裂纹尖端的 SIF 分布函数  $k(x)$  ( $x$  为任何可能的变量)



(a) 裂纹几何与符号意义

(a) Geometry and notation of a crack shape



(b) 裂纹尖端应力强度因子分布

(b) SIF distribution around crack front

图 3 无梯度迭代法原理

Fig.3 Explanation of the iterative method

为已知, 并且图 3 中 A 点为固定点.

考虑任意控制点  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ), 在第  $j$  次迭代该点的 SIF 值为  $K_i^j$ . 然而根据给定的  $k(x)$ , 该点“假想正确值”应当等于  $k(x_i) \cdot K_A^j$ . 那么, 在第  $j + 1$  次迭代应当调整控制点  $i$  的位置以便使  $K_i^{j+1} = k(x_i) \cdot K_A^{j+1}$ . 这里, 选控制点移动方向为该点的法线方向  $n$  (表面点 C 除外, 该点只能沿表面移动), 并作为一阶近似, 控制点移动量  $d_i^j$  正比于该点当前 SIF 值与“假想正确值”之相对差, 表示为

$$d_i^j = \frac{K_i^j - k(x_i) \cdot K_A^j}{\max\{K_i^j, k(x_i) \cdot K_A^j\}} \cdot s, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

式中,  $s$  为步长系数, 根据试算结果确定. 在迭代中, 为加速收敛过程, 在保证收敛的前提下应尽可能选用较大的  $s$  值. 根据式 (2) 逐个调整所有控制点之后, 沿新裂纹尖端的 SIF 分布更趋近于  $k(x)$ ; 重复这一过程, 直至裂纹尖端的 SIF 分布按给定的精度要求满足  $k(x)$ , 见图 3(b).

事实上, 上述迭代法与求解最小应力集中系数的仿生优化原理 [11~13] 非常相近, 只是在具体的逻辑和算法上有些不同.

本文采用的 SIF 计算方法 (见下一节) 只能直接得到单元角点位置的 SIF 值, 为避免额外的插值计算, 本方法将裂纹尖端单元角点虚拟为控制点. 根据式 (2) 得到的新控制点仅用来产生新的裂纹尖端, 见图 3(a). 新裂纹尖端单元角点由自编的单元划分程序自动产生, 并成为下一次迭代的虚拟控制点. 另外, 本文采用如下性能指标  $P_1$  来监测迭代收敛过程

$$P_1 = \max \left\{ \frac{|K_i - k(x_i) \cdot K(A)|}{\max\{K_i, k(x_i) \cdot K(A)\}} \right\} \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, k$

通过设定  $P_1$  的许用值  $\tau$  来控制解的精度并以此作为迭代结束的判据. 例如, 对于 Iso- $K_I$  情况, 当  $\tau = 0.01$  时, 表示裂纹尖端 SIF 值的非均匀误差被控制在 1% 以内.

### 3 示例与分析

采用 1/4 节点位移法计算 SIF [14,15]

$$K = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r_{(1/4)}}} u_{z(1/4)} \quad (4)$$

式中， $E' = E$ (平面应力) 或  $E' = E/(1 - \nu^2)$  (平面应变)； $r_{(1/4)}$  和  $u_{z(1/4)}$  分别为 1/4 节点到裂纹尖端距离和该点位移； $E$  和  $\nu$  分别为杨氏模量和泊松比。由于自由表面影响厚度非常小<sup>[16]</sup>，实际计算时，只将表面点作为平面应力状态，其它内部所有点作为平面应变状态。

全部有限元模型均采用 20 节点六面体单元，围绕裂纹尖端采用奇异单元 (塌陷六面体)。材料常数为：杨氏模量  $E = 210 \text{ GPa}$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ ，设定  $\tau \leq 0.005$ 。有限元分析采用通用结构分析软件包 ANSYS 6.1。

### 3.1 中心穿透裂纹

图 4(a) 给出了有限厚度和宽度的中心穿透裂纹板几何和边界条件。几何尺寸： $W = 3, a/W = 0.24, H/W = 1, B/W = 0.5$ 。根据对称条件，只对 1/8 板进行有限元分析，单元网格划分见图 4(b)。裂纹尖端中点  $A$  选为固定点；假设裂纹尖端 SIF 分布满足

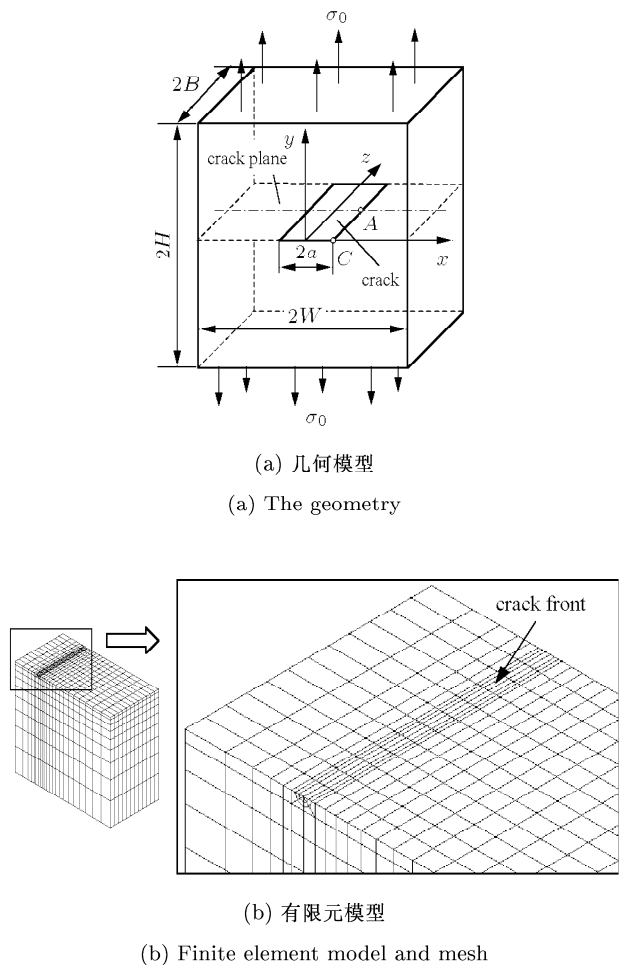


图 4 中心穿透裂纹

Fig.4 Center cracked tension specimen

式 (1)，其中  $\chi = z/B$ 。为考察待定参数  $K(C)/K(A)$  的影响，设定  $n = 10, K(C)/K(A)$  分别等于 1, 1.11 和 1.25，其中  $K(C)/K(A) = 1$  对应于 Iso- $K_I$  情况。

图 5(a)，图 5(b) 分别给出了满足假设 SIF 分布函数的裂纹形状和对应的 SIF 的模拟结果。作为比较，将直线裂纹结果以及文献 [16] 报道的结果也示于图中。将本文计算的直线裂纹结果与文献 [16] 的结果相比较，可以看出本文采用的 SIF 计算方法具有相当好的精度。即使是在表面点，采用 1/4 节点位移法也能获得合理的结果 (裂纹尖端与表面相交角为  $90^\circ$  且  $\nu = 0.3$  时，裂纹尖端位于表面点附近的奇异性指数不再等于  $-1/2$ ；理论上，表面点的 SIF 应为零，详细分析请参见文献 [16,17])。

由图 5 可以看出，不同的 SIF 分布函数对裂纹形状的影响是非常明显的。对于中心穿透裂纹试件，

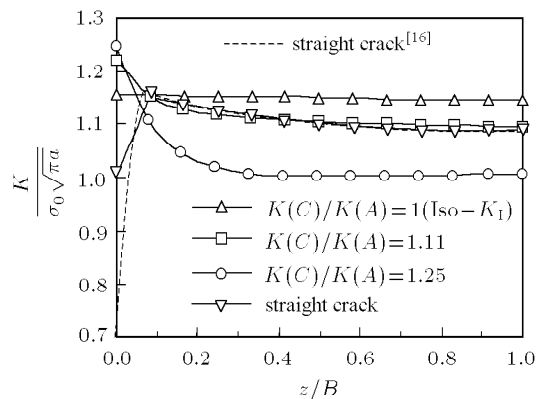
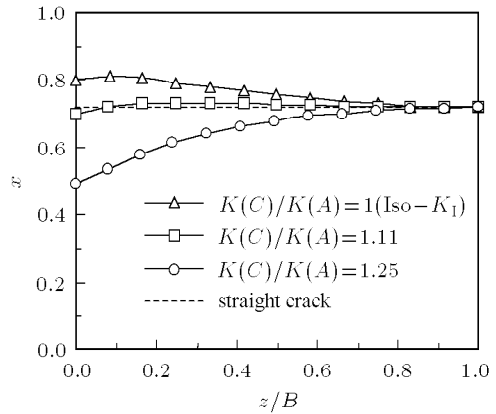


图 5 中心穿透裂纹板的裂纹形状和对应的 SIF 分布

Fig.5 The shape and the corresponding SIFs of through-thickness cracks

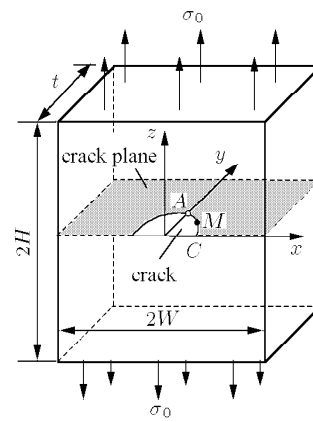
通常根据表面测量长度来定义裂纹长度并假设其为直裂纹来估算 SIF 值. 根据图 5 显示的结果可以得出如下定性结论: 1) 对于可能存在的不同 SIF 分布或裂纹形状 (对于疲劳裂纹, “可能存在的” 含义是指裂纹形状会受到诸如裂纹闭合、材料性能以及载荷偏差等因素影响), 裂纹表面长度并不一定能正确反映 SIF 大小; 2) 即使对于 Iso- $K_I$  裂纹, 其尖端也不是平直的, 甚至不能得出 “裂纹尖端越平直, SIF 分布越均匀” 的结论; 3) 比较 Iso- $K_I$  裂纹和直线裂纹, 虽然它们的最大 SIF 值几乎完全相等, 但裂纹形状和 SIF 分布的差别是明显的; 4) 比较  $K(C)/K(A) = 1.11$  裂纹和直线裂纹, 它们的形状差别非常小, 但 SIF 分布的差别非常明显, 这说明 SIF 对裂纹形状是非常敏感的; 5) 由于所采用的 SIF 分布函数是单调函数,  $K(C)/K(A)$  反映了裂纹尖端 SIF 分布的不均匀程度, 但  $K(C)/K(A)$  与最大 SIF 之间并不存在线性比例关系; 6) 由于对裂纹形状未施加任何约束, 所获得的裂纹尖端与表面相交角均大于  $90^\circ$ , 这与实验观测到的现象相符<sup>[18]</sup>, 表明本文提出的方法是有效的.

### 3.2 表面裂纹

含表面裂纹的有限厚度、有限宽度板的几何和边界条件见图 6. 几何参数:  $H/W = 1, t/W = 1/5, a/t = 0.5$ . 根据对称条件, 只对 1/4 板进行有限元分析, 单元网格划分见图 6(b). 裂纹最深点 A 设为固定点. 设裂纹尖端 SIF 分布满足式 (1), 其中  $\chi = s/S$  (见图 1).

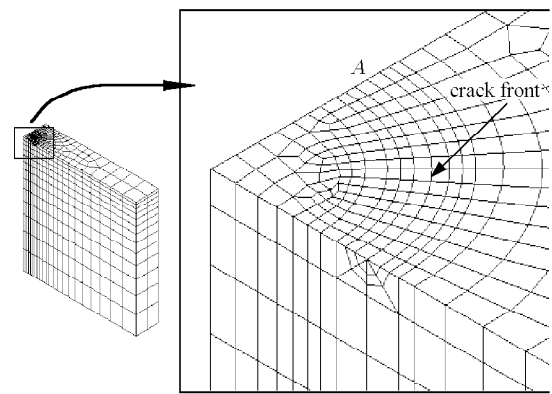
为进一步说明本文提出的方法与裂纹形状法的区别, 特假设  $a/c = 1$ . 这时, 表面裂纹具有确定的深度和表面长度. 裂纹形状法必须根据已知的两点假设某一裂纹形状, 如半椭圆形、抛物线形等, 然后求解 SIF. 本文方法的思想是: 过已知两点的裂纹当中, 只有一条满足已知的 SIF 分布规律, 可以通过迭代搜索将其得到, 同时也求出了 SIF. 由于裂纹形状与 SIF 分布之间的一一对应关系, 如果式 (1) 的两个待定参数都给定, 则相应的裂纹形状也是确定的, 但这样的裂纹未必过已知两点. 所以, 当已知裂纹上两点时, 只能设定式 (1) 中的一个待定参数, 另一个参数由最终结果自然得出. 为实现此目的, 只要对前面的迭代法稍加改动就可以. 例如, 根据式 (2), 如果在迭代过程中设定  $K(C)/K(A)$  总是等于  $K(C)^j/K(A)^j$ , 则 C 点位置将会保持不变, 这样就可以求出过已知两点并且满足已知的 SIF 分布规

律



(a) 几何模型

(a) The geometry



(b) 有限元模型

(b) Finite element model and mesh

图 6 表面裂纹

Fig.6 A surface crack under mode-I load

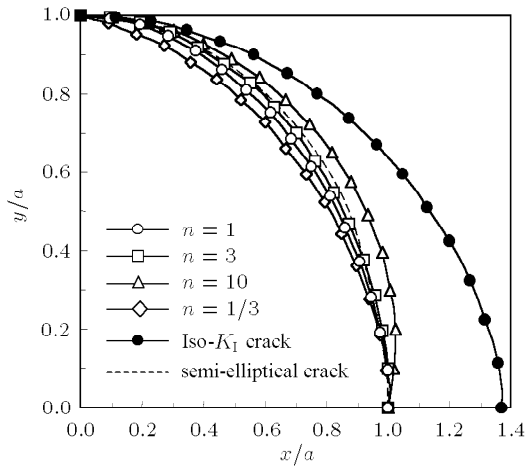
的裂纹.

图 7(a), 7(b) 分别给出了满足具有不同  $n$  值的 SIF 分布函数的裂纹形状和对应的 SIF 的数值结果. 作为比较, 图 7 中还给出了半椭圆形裂纹和 Iso- $K_I$  裂纹的结果. 考察图 7 可以得出如下结论.

(1) 比较半椭圆形裂纹的当前解和 Newman 等的经验公式解<sup>[1]</sup>, 两者在裂纹最深点和表面点附近非常接近, 这进一步说明 1/4 节点位移法计算 SIF 具有相当好的精度; 当前解中表面点的 SIF 突然下降 (理论解为零), 说明只将表面点作为平面应力状态处理是恰当的.

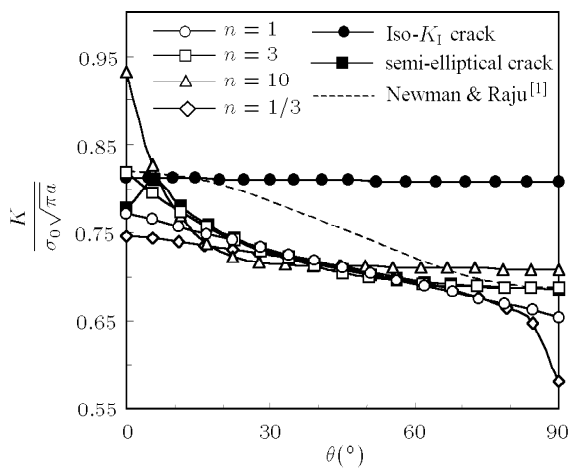
(2) Iso- $K_I$  裂纹与其它裂纹, 无论是形状还是 SIF 分布, 都相去甚远. 实际上, 在裂纹尖端两点已经确定的条件下去搜寻满足 Iso- $K_I$  的裂纹形状,

一般来说,是不可能的. 这一结论对于制备 Iso- $K_I$  裂纹试件是非常重要的.



(a) 裂纹形状

(a) Crack shape



(b) SIF 分布

(b) SIF distribution

图 7 含表面裂纹板的裂纹形状和对应的 SIF 模拟结果

Fig.7 The numerical results of surface cracks in tension plates

(3) 通常以裂纹深度尺寸  $a/t$  和纵横比  $a/c$  来描述表面裂纹形状<sup>[1~3]</sup>, 并以此为依据估算 SIF. 比较图 7 中这些具有相同外观尺寸但不同形状的裂纹, 它们的最大 SIF 值和 SIF 分布都有很大差别. 这一结果除了进一步说明了 SIF 对裂纹形状的敏感性以外, 还提醒: 应用本文提出的方法估算 SIF, 尽可能准确地描述裂纹尖端 SIF 分布是非常重要的.

(4) 由于对裂纹形状未施加任何约束, 与中心穿透裂纹结果一样, 所获得的表面裂纹尖端与表面相交角均大于  $90^\circ$ , 这与实验观测到的结果相吻合.

## 4 结束语

本文研究的内容实质上是线弹性断裂力学中裂纹问题的反问题: 如何根据已知的应力强度因子分布求裂纹形状. 需要指出的是, 本文提出的估算 SIF 方法并不能独立于裂纹形状法, 它可以看作是裂纹形状法的拓展, 因为只有已知裂纹形状才能计算 SIF. 有限厚度、有限宽度板穿透裂纹和表面裂纹的数值模拟实例表明了本文提出的按已知 I 型裂纹应力强度因子分布规律求裂纹形状的无梯度迭代法的有效性和实用性. 该方法最大优点是它的通用性, 由于对裂纹形状没有任何约束, 它特别适合于这样的情况: 统一描述裂纹形状困难或者误差较大但裂纹尖端应力强度因子分布规律比较明显. 另外, 原理简单并适用于通用有限元分析软件也是这一方法的主要优点. 希望这一方法将有助于提高扩展裂纹应力强度因子的估算精度及其更合理地预测裂纹形状演化.

## 参 考 文 献

- 1 Newman Jr JC, Raju IS. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack. *Engng Fracture Mech*, 1981, 15: 185~192
- 2 Hosseini A, Mahmoud MA. Evaluation of stress intensity factor and fatigue growth of surface cracks in tension plates. *Engng Fracture Mech*, 1985, 22: 957~974
- 3 Mahmoud MA, Hosseini A. Assessment of stress intensity factor and aspect ratio variability of surface cracks in bending plates. *Engng Fracture Mech*, 1986, 24: 207~221
- 4 Hwang CG, Ingraffea AR. Shape prediction and stability analysis of Mode-I planar cracks. *Engng Fract Mech*, 2004, 71: 1751~1777
- 5 Lazarus V. Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3D plane cracks under uniform remote tensile loading. *Int J Fracture*, 2003, 122: 23~46
- 6 Sukumar N, Chopp DL, Moran B. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engng Fracture Mech*, 2003, 70(1): 29~48
- 7 Lin XB, Smith RA. Finite element modeling of fatigue crack growth of surface cracked plates Part I: The numerical technique. *Engng Fract Mech*, 1999, 63: 503~522
- 8 Lin XB, Smith RA. Finite element modeling of fatigue crack growth of surface cracked plates Part II: Crack shape change. *Engng Fract Mech*, 1999, 63: 523~540
- 9 Lin XB, Smith RA. Finite element modeling of fatigue crack growth of surface cracked plates Part III: Stress intensity factor and fatigue crack growth life. *Engng Fract Mech*, 1999, 63: 541~556

- 10 Paris PC, Erdogan F. Critical analysis of crack propagation laws. *Trans ASME, Ser D, J Basic Engng*, 1963, 85: 528~534
- 11 Mattheck C, Burkhardt S. A new method of structural shape optimization based on biological growth. *Int J Fatigue*, 1990, 12: 185~190
- 12 Mattheck C. Design in Nature – Learning from Trees. New York: Springer, Berlin Heidelberg, 1998
- 13 Waldman W, Heller M, Chen GX. Optimal free-form shapes for shoulder fillets in flat plates under tension and bending. *Int J Fatigue*, 2001, 23: 509~523
- 14 Henshell RD, Shaw KG. Crack tip finite elements are unnecessary. *Int J Numer Meth Engng*, 1975, 9: 495~507
- 15 Barsoum RS. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int J Numer Meth Engng*, 1976, 10: 25~37
- 16 Agrawal AK, Kishore NN. A study of free surface effects on through cracks using BEM. *Engng Fract Mech*, 2001, 68: 1297~1316
- 17 Bažant ZP, Estenssoro LF. Surface singularity and crack propagation. *Int J Solids Struct*, 1979, 15: 405~426
- 18 Rolfe ST, Barsom JM. Fracture and Fatigue Control in Structures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977

## A NEW METHOD FOR EVALUATING STRESS INTENSITY FACTORS OF PLANAR CRACK IN 3-D SOLID <sup>1)</sup>

Wu Zhixue<sup>2)</sup>

(Mechanical Engineering College, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

**Abstract** According to the inherent relation between the crack shape and the stress intensity factor (SIF) distribution along the crack front, a gradientless iterative method is proposed for obtaining the shape and the corresponding SIF of mode-I planar crack with a given SIF distribution function under the condition of Linear Elastic Fracture Mechanics. Numerical examples for planar cracks in through-cracked and surface-cracked plates with limited thickness and width are presented to show the validity and practicability of the proposed method. The effects of various SIF distribution functions on the shape and the corresponding SIF of cracks are analyzed and discussed. The presented method is shown to be an effective alternative for the evaluation of SIFs and the prediction of shape evolution for growing cracks.

**Key words** stress intensity factor, linear elastic fracture mechanics, surface-crack, through-crack, 3-D finite element analysis

---

Received 20 April 2005, revised 27 February 2006.

1) The project supported by the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry and by the Science Foundation of Education Department of Jiangsu Province, China (04KJB460166).

2) E-mail: zhixue-wu@yahoo.com