

# Duffing-van der Pol 系统的随机分岔<sup>1)</sup>

李 爽<sup>2)</sup> 徐 伟 李瑞红

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

**摘要** 应用广义胞映射图论方法 (GCMD) 研究了在谐和激励与随机噪声共同作用下的 Duffing-van der Pol 系统的随机分岔现象. 系统参数选择在多个吸引子与混沌鞍共存的范围内. 研究发现, 随着随机激励强度的增大, 该系统存在两种分岔现象: 一种为随机吸引子与吸引域边界上的鞍碰撞, 此时随机吸引子突然消失; 另一种为随机吸引子与吸引域内部的鞍碰撞, 此时随机吸引子突然增大. 研究证实, 当随机激励强度达到某一临界值时, 该系统还会发生 D-分岔 (基于 Lyapunov 指数符号的改变而定义), 此类分岔点不同于上述基于系统拓扑性质改变所得的分岔点.

**关键词** 随机分岔, 广义胞映射, D-分岔, 混沌鞍, 最大 Lyapunov 指数

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)03-0429-04

## 引 言

由于参数的改变而引起的系统定性性态突然变化的现象, 称为分岔. 人们对确定性系统分岔的研究已有多年, 积累了许多成果; 然而对随机系统分岔的研究目前仍处于初级阶段<sup>[1]</sup>, 只有少量严格的一般性定理与准则. 目前为止, 随机分岔主要分为两大类: 一类是根据系统最大 Lyapunov 指数符号的变化来定义, 称为 D-分岔; 另一类是基于稳态概率密度形状 (峰的个数、位置及形状) 的改变来定义, 称为 P-分岔. 由于在计算 Lyapunov 指数时, 要求满足乘法遍历性定理, 对于许多系统来说这一点很难验证甚至无法满足, 因此仅能进行局部研究. 另一方面, Arnold<sup>[1]</sup>, Meunier<sup>[2]</sup> 研究表明, 对于一类系统, 稳态概率密度的形状变化与随机干扰的变化联系并不密切, 因此这种基于稳态概率密度形状变化的分岔定义有时很难说明在噪声干扰下系统是否发生了真正的、有意义的变化. 鉴于上述讨论中存在的困难和问题, 徐伟等<sup>[3]</sup> 提出以系统的随机吸引子 (或随机鞍) 形态 (大小、尺寸等) 的突然变化来表征系统拓扑性质的变化, 用来描绘随机系统的分岔现象. 本文基于这一定义对 Duffing-van der Pol 方程进行了随机分岔分析. 首先, 利用广义胞映射图论方法研究该系统在一定参数范围内的全局分岔特性,

发现了系统的混沌鞍, 通过对不稳定的解 (鞍) 的追踪, 揭示了随机吸引子形态突然改变, 即产生随机分岔的机理. 最后, 对系统的 D-分岔进行了研究, 证实所得的分岔点与基于系统拓扑性质改变所得的分岔点不同.

## 1 瞬态行为的分析与广义胞映射方法

系统的运动行为包括稳态行为与瞬态行为. 通常人们关心的是稳态行为, 例如, 确定吸引子的空间位置、个数等, 而对瞬态行为却并不关心; 事实上, 非线性系统的瞬态过渡行为往往比稳态时更丰富、更复杂, 在一些场合如经济学模型中瞬态行为的研究要比稳态行为的研究更具实际意义<sup>[4]</sup>. Grebogi 等<sup>[5]</sup> 对映射系统瞬态混沌的研究使人们意识到瞬态运动的重要性, 系统吸引子的演化往往是由于吸引子与不稳定解集的碰撞引起的. 许多学者对此也进行过研究. 最近, 洪灵等<sup>[6]</sup> 对激变现象的研究也证实瞬态行为对系统动力学性态的演化具有重要意义. 对系统进行全局瞬态分析较有效的方法是广义胞映射方法, 该方法的显著优点是除了能获得系统的吸引子、吸引域、边界外, 还能获得系统的不稳定解集. 由于可以确定系统的不稳定解集, 从而能够揭示分岔产生的真正原因. 本文的胞映射算法来自

2005-05-27 收到第 1 稿, 2005-12-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10472091, 10332030), 陕西省自然科学基金 (2003A03) 及西北工业大学创业种子基金 (Z200572) 资助项目.

2) E-mail: lishuang@mail.nwpu.edu.cn

Hsu 提出的广义胞映射图论分析方法 [7].

2 谐和激励和有界噪声共同作用的 Duffing-van der Pol 系统 [1]

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \alpha x - \beta x^3 - \varepsilon(1 - x^2 - y^2)y + f \cos(\omega t) + \xi(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里  $\alpha = 1, \beta = 5, \varepsilon = 0.4, f = 0.11, \omega = 1. \xi(t) = \mu \sin(\Omega t + \sigma B(t) + \gamma), \Omega = 1, \sigma = 1, \gamma$  为  $[0, 2\pi)$  之间均匀分布的随机变量,  $B(t)$  是标准 Wiener 过程. 下面应用 GCMD 方法研究参数  $\mu$  的变化对系统全局分岔特性的影响.

构造广义胞映射动力系统, 取 Poincaré 截面  $\Sigma = \{(x, y, \theta) | \theta = 2n\pi/\omega\}$  及感兴趣的区域  $D = \{-0.7 \leq x \leq 0.7, -0.4 \leq y \leq 0.4\}$ . 在区域  $D$  内的状态胞称为正规胞, 取  $150 \times 150$  个正规胞,  $D$  以外的区域定义为陷胞, 因此状态胞的总数目  $N = 150 \times 150 + 1$ . 对于  $D$  内的每个胞, 取  $5 \times 5$  个均匀分布的内点, 每个内点随机模拟 50 次.

当  $\mu = 0.0$  时, 即只存在谐和激励时, 应用 GCMD 方法分析结果见图 1, 此时有两个永久自循环集 (用符号 “•” 表示), 它们相应于系统 (1) 的两个吸引子, 都是周期一的, 左边的称为吸引子 I, 右边的称为吸引子 II. 有两个单驻址瞬胞集, 相应于两吸引子的吸引域, 一个多驻址瞬胞集, 相应于吸引域间的边界, 边界上停留着瞬态自循环集 (用符号 “□” 表示), 是系统的混沌鞍. 随着参数  $\mu$  的增大, 吸引子及边界上的鞍都增大, 而吸引域缩小. 当  $\mu = 0.010$  时, 吸引子 II 与边界上的鞍靠近并发生碰撞见图 2, 当  $\mu = 0.011$  时该吸引子连同其吸引域突然消失, 相空间中原来吸引子的位置成为此时鞍的一部分, 吸引子个数由两个降为一个, 如图 3 所示. 由于吸引子的性质突然改变, 即由稳定集变为不稳定集, 因此系统此时发生了一次随机分岔. 随着参数  $\mu$  的继续增大, 吸引子 I 与鞍都增大, 它们相互接近, 在  $\mu = 0.015$  时, 吸引子与鞍发生碰撞, 见图 4. 当  $\mu = 0.016$  时吸引子突然增大, 原来的鞍与吸引子合并形成巨大的吸引子, 如图 5. 由于原来的鞍变为了吸引子, 导致吸引子的几何空间体积突然增大, 使吸引子的形态发生了突变, 因此此时发生了第二次随机分岔.  $\mu$  再增大, 吸引子逐渐扩散, 图 6 给出了  $\mu = 0.050$  时的全局图.

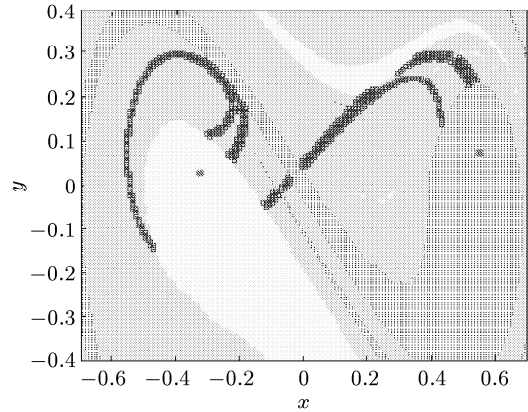


图 1 系统在  $\mu = 0.0$  时的吸引子、吸引域和鞍

Fig.1 The attractors, basins of attractors and the saddle for the system with  $\mu = 0.0$

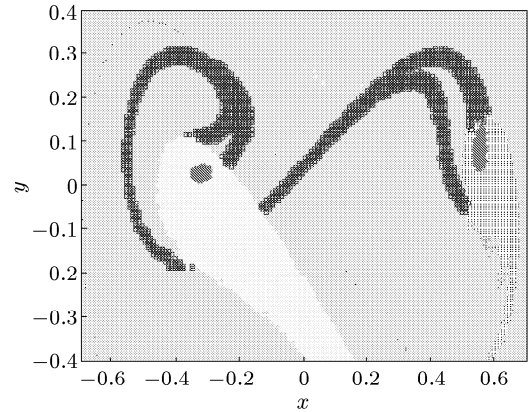


图 2 系统在  $\mu = 0.010$  时的吸引子、吸引域和鞍

Fig.2 The attractors, basins of attractors and the saddle for the system with  $\mu = 0.010$

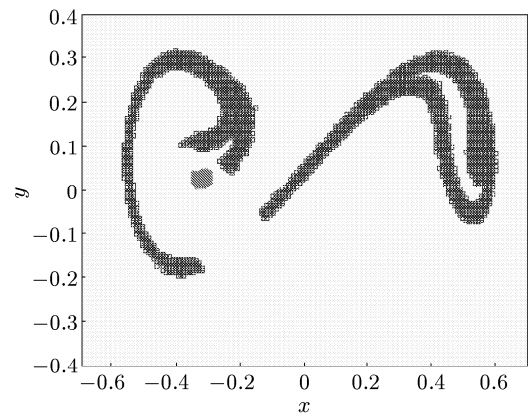


图 3 系统在  $\mu = 0.011$  时的吸引子、吸引域和鞍

Fig.3 The attractor, basin of attractor and the saddle for the system with  $\mu = 0.011$

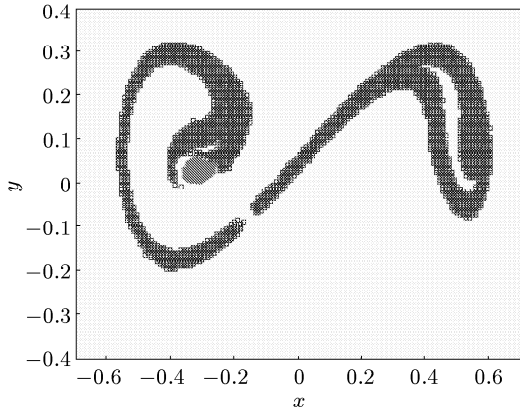


图 4 系统在  $\mu = 0.015$  时的吸引子、吸引域和鞍

Fig.4 The attractor, basin of attractor and the saddle for the system with  $\mu = 0.015$

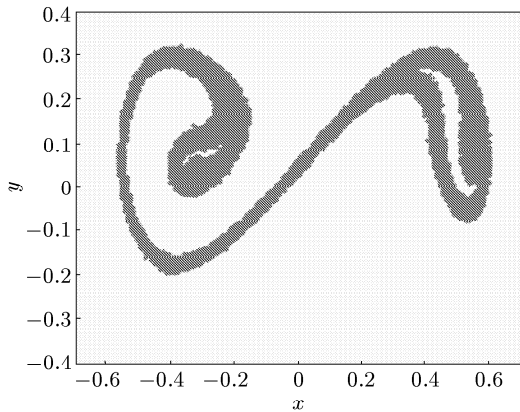


图 5 系统在  $\mu = 0.016$  时的吸引子、吸引域

Fig.5 The attractor and basin of attractor for the system with  $\mu = 0.016$

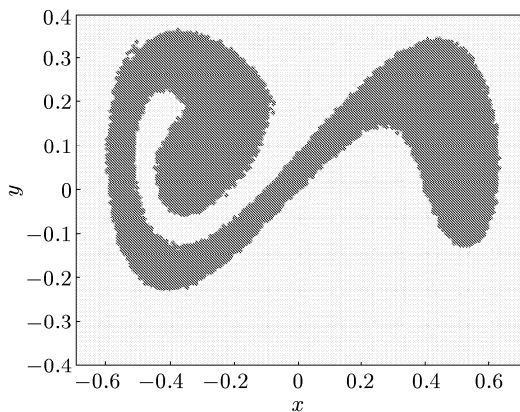


图 6 系统在  $\mu = 0.050$  时的吸引子、吸引域

Fig.6 The attractor and basin of attractor for the system with  $\mu = 0.050$

### 3 D-分岔

D-分岔是根据系统最大 Lyapunov 指数符号的

改变来定义的. 取初值  $x(0) = 0.0047, y(0) = 0.061$ , 采用 Wolf 的算法计算系统最大 Lyapunov 指数随参数  $\mu$  的变化曲线如图 7. 从图 7 可知当  $\mu < \mu_c = 0.050$  时, Lyapunov 指数  $\lambda$  始终为负, 当  $\mu \geq \mu_c$  时,  $\lambda$  值变为正. 因此系统在参数  $\mu = \mu_c$  处发生了 D-分岔. 另一方面, 根据图 5 与图 6 可以看出, 在参数  $\mu$  由 0.016 到 0.050 的变化过程中, 系统的拓扑性质并没有发生变化, 只是吸引子在原来的位置附近增大了体积, 但在这一过程中最大 Lyapunov 指数却由负变为正, 系统出现了混沌运动. 这表明, 基于拓扑性质的突然改变所得的分岔点与基于 Lyapunov 指数符号变化所得的分岔点, 两者并不相同.

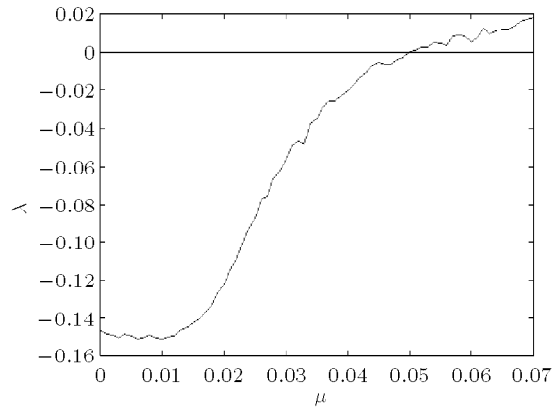
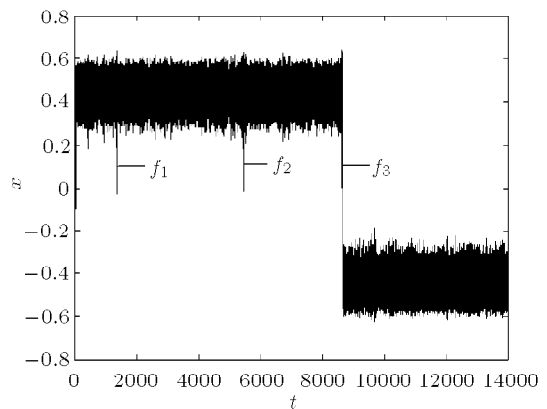


图 7 最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  随噪声强度  $\mu$  变化曲线

Fig.7 Top Lyapunov exponent  $\lambda$  versus noise intensity  $\mu$

图 5 中的吸引子形状很像确定性系统中的混沌吸引子, 然而 Lyapunov 指数为负, 是一种非混沌吸引子. 为分析这一点考察  $\mu = 0.016$  及  $\mu = 0.050$  时的时间历程图见图 8. 由图 8(a) 可以看到在  $\mu = 0.016$



(a)  $\mu = 0.016$

图 8 时间历程图

Fig.8 Time history

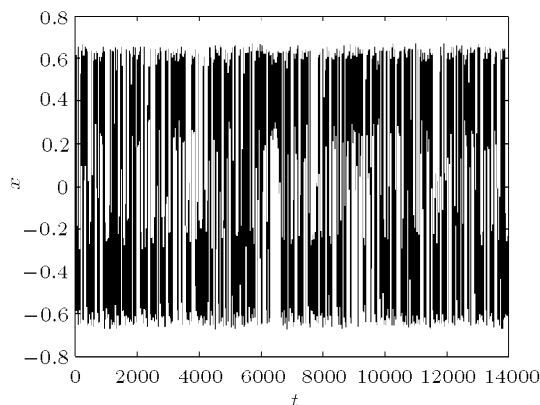
(b)  $\mu = 0.050$ 

图 8 时间历程图 (续)

Fig.8 Time history (continued)

时尽管时间历程中会存在一些不规则运动  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 但系统大部分时间处于两种运动上, 不规则运动的时间很短, 由于 Lyapunov 指数反映的是系统在相空间中长时间扩张与收缩的平均效果, 因此此时系统 Lyapunov 指数为负; 随着  $\mu$  的增大, 不规则运动程度增强, 由图 8(b) 可以看出此时时间历程没有规律, 一直为不规则运动, 这就使得系统的最大 Lyapunov 指数为正. 这表明随机力作用下的非线性系统具有与确定性系统不同的特性.

#### 4 结 论

对于谐和激励与随机噪声共同作用的 Duffing-

van der Pol 方程, 讨论了全局随机分岔现象. 研究表明, 随着随机激励强度增大且通过一临界值时, 其中一个吸引子与边界上的鞍发生碰撞, 该吸引子连同它的吸引域突然消失; 当随机激励强度通过另一临界值时, 另一个吸引子与鞍在吸引域内碰撞, 这时鞍突然消失, 吸引子突然增大. 研究结果也证实, 当参数继续增大, 系统还将发生 D-分岔, 这种分岔所得的分岔点与基于系统拓扑性质改变所得的分岔点不同.

#### 参 考 文 献

- 1 Arnold L. Random Dynamical Systems. Springer, 1998
- 2 Meunier C, Verga AD. Noise and bifurcation. *J Statist Phys*, 1988, 50: 345~375
- 3 Xu Wei, He Qun, et al. Stochastic bifurcation in Duffing system subject to harmonic excitation and in presence of random noise. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39: 1473~1479
- 4 Lorenz HW, Nusse HE. Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 13: 957~965
- 5 Grebogi C, Ott E, Yorke JA. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, 1983, 7: 181~200
- 6 Hong Ling, Xu Jianxue. A chaotic crisis between chaotic saddle and attractor in forced Duffing oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, 9: 313~329
- 7 Hsu CS. Global analysis of dynamical systems using posets and digraphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(4): 1085~1118

### STOCHASTIC BIFURCATION IN A DUFFING-VAN DER POL SYSTEM<sup>1)</sup>

Li Shuang<sup>2)</sup> Xu Wei Li Ruihong

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** Stochastic bifurcation of a Duffing-van der Pol system subject to a deterministic harmonic excitation and bounded noise is studied by using the generalized cell mapping method with diagraphes. System parameters are chosen in the range of two co-existing attractors and a chaotic saddle, during their evolution. It is found that stochastic bifurcation mostly occurs when a stochastic attractor collides with a stochastic saddle. In our study, two kinds of discontinuous bifurcations are found according to the abrupt increase or disappearance of the attractor when it collides with the saddle in the basin interior or on the boundary. Our study also reveals that the bifurcation value is different from that of D-bifurcation which is defined by the change of the sign of the top Lyapunov exponent.

**Key words** stochastic bifurcation, the generalized cell mapping, D-bifurcation, chaotic saddle, top Lyapunov exponent

Received 27 May 2005, revised 28 December 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472091,10332030), Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2003A03) and Graduate Starting Seed Fund of Northwestern Polytechnical University (Z200572).

2) E-mail: lishuang@mail.nwpu.edu.cn