

二维类桁架材料结构弹塑性分析¹⁾

刘 岭 阎 军 程耿东²⁾

(大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 类桁架材料所构成结构的弹塑性行为的精确建模分析保证非常耗时, 为了在保证精度的前提下提高此类问题的求解效率, 利用类桁架材料基本构件长细比较大的特点, 将材料单胞简化为桁架模型. 考虑到微单胞空间分布的周期性, 基于数值均匀化理论提出了类桁架材料结构的宏微观两级弹塑性求解格式. 原问题转化为宏观上一个非线性弹性连续体计算问题和微观上多个小规模桁架系统的弹塑性计算问题. 两个数值算例分别考虑了简单加载, 非单调加载, 规则宏观结构和具有非完整单胞的较复杂宏观结构等问题. 与实际结构计算结果在精度和时间等方面的比较验证了求解格式的有效性. 最后还探讨了算法的适用范围.

关键词 类桁架材料, 弹塑性计算, 多尺度分析, 数值均匀化

中图分类号: O344 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2007)01-0054-09

引 言

超轻材料对于减轻汽车、飞机、航天器等结构的重量, 提高产品性能有着关键性的作用, 因此一直是材料、力学、工程领域研究的热点. 其中, 图 1 所示的类桁架材料具有较优的力学性能, 较好的可设计性和多功能性, 具有广泛的应用前景^[1~3].

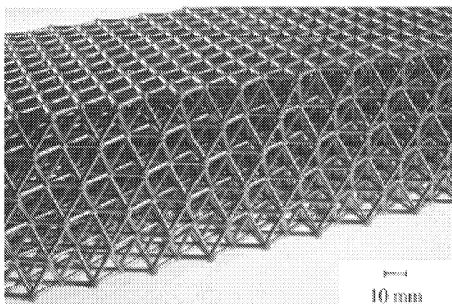


图 1 三维铝合金类桁架材料^[3]

Fig.1 Al-alloy truss-like material^[3]

对于具有周期性微单胞的材料, 线性分析可以通过预测材料等效性能, 将问题转化为等效连续体计算. 类桁架材料由于单个构件的长细比较大, 可简化为桁架模型. Wallach 等^[3]对比了杆模型和梁模型, 误差仅有 1.4%. 阎军等^[4]研究了类桁架材料

的等效弹性模量预测问题.

类桁架材料应用于实际工程中时, 面临的荷载环境多样, 材料构件很有可能进入塑性. 如果对每根构件都进行精确计算, 材料单胞的空间致密性将导致建模和计算上非常大的工作量. 此时, 利用微单胞空间周期分布的特点, 构建宏微观多尺度的计算模型, 能在保证一定计算精度的要求下, 获得较高的求解效率. Ladeveze^[5]提出了类似子结构的弹塑性两级分析方法, 但效率不高. Ghosh^[6]对于具有随机分布夹杂的材料, 基于 Voronoi Cell 有限元提出了多级分析算法; Fish^[7]针对纤维增强材料提出了基于特征应变的弹塑性分析算法, 对于一般单胞不具有普适性. Terada 和 Kikuchi 认为采用此类与数学均匀化结合的方法只是弹性问题使用增量形式后的推广, 有很好的形式但是未必能获得可接受的结果^[8], 他们对于连续体单胞提出了基于数值均匀化的弹塑性算法^[8], 讨论了其并行实现^[9].

本文针对由类桁架材料构成的结构, 将单胞简化为桁架模型, 并且提出了宏微观两级弹塑性求解格式. 数值结果表明, 此方法能够在保证精度的前提下有效提高问题的求解效率. 本文最后还讨论了方法的适用范围.

2005-08-22 收到第 1 稿, 2006-05-11 收到修改稿.

1) 973 项目 (2006CB601205), 国家自然科学基金重点项目 (10332010) 及创新群体计划 (10421002) 资助.

2) E-mail: chenggd@dlut.edu.cn

1 基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性分析

图 2 所示的非均质结构，基于数值均匀化的弹塑性求解方法将问题分为两级：宏观尺度计算等效连续体结构，参考系为 x_1-x_2 ；微观尺度计算材料代表体元，参考系为 y_1-y_2 。

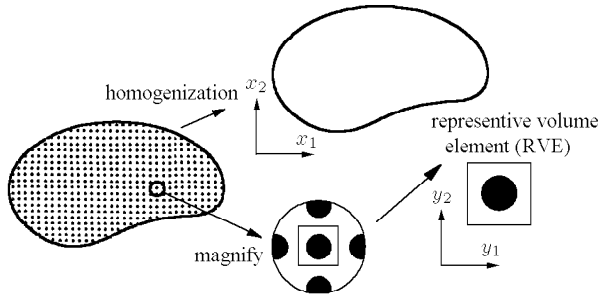


图 2 非均质材料构成的结构

Fig.2 A structure composed of heterogeneous material

这两级尺度之间通过定义宏观应力 Σ 和宏观应变 E 分别为微观应力 σ 和微观应变 ε 在代表体元 (RVE) 上的体积平均来建立联系

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma dy, \quad E = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon dy \quad (1)$$

这里 Y 是指微观计算的代表体元域， $|Y|$ 表示域面积。式 (1) 区别于数学均匀化中将物理量作小参数展开来建立宏微观联系的做法。将此式和一般弹塑性求解方程联立，可以得到两个尺度上非线性的问题。

1.1 宏观尺度

宏观结构在约束和荷载作用下的一个非线性弹塑性问题为

$$\int_{\Omega} \nabla_x \eta : \Sigma(x) dx = \int_{\Omega} \eta \cdot \bar{T} dx + \int_{\Gamma} \eta \cdot \bar{t} d\Gamma \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} T : (\text{sym}(\nabla_x U) - E(x)) dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} \Gamma : \left(\left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \phi(x, \varepsilon^e)}{\partial \varepsilon} dy \right] - \Sigma(x) \right) dx = 0 \quad (4)$$

主要物理量包括：宏观结构变形 U ，宏观应力 Σ ，宏观应变 E ，材料宏观等效模量 D ，体力 \bar{T} ，面力 \bar{t} ，弹性变形能 ϕ ；位移变分 η ，宏观应力变分 T ，宏观应变

变分 Γ 。材料在这个尺度上被等效为连续介质，可以采用常规连续体数值方法计算。但是，由于弹塑性问题的特点，等效材料模量 D (即 Σ 和 E 的关系) 在空间上是变化的，而且需要基于分析点 (有限元计算中取为宏观单元的高斯点) 处单胞的微观求解得到。宏观分析传递给微观分析的信息是分析点的当前宏观应变 E 。本文非线性求解采用 Newton-Raphson 迭代， i 是宏观迭代步指标，对应的物理量记为 \bullet^i 。

1.2 微观尺度

桁架微单胞在周期性边界条件及给定的宏观应变 E_i 下，单胞强制协同变形放松过程中的弹塑性问题为

$$\sum_{k=1}^N b_k^T \cdot \sigma_k^i = 0 \quad (5)$$

$$\varepsilon_k^i = E^i + b_k \cdot u_k^i \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_k^i = \frac{\partial \phi_k(x, \bar{\varepsilon}_k^i)}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad (7)$$

微观分析传递给宏观分析的信息是分析点处的当前宏观应力 Σ 和均匀化得到的当前材料等效模量 D 。主要物理量包括：各杆件杨氏模量 μ ，屈服应力 σ_Y ，位移 u ，应力 σ ，应变 ε ，杆向应力 $\bar{\sigma}$ ，杆向应变 $\bar{\varepsilon}$ ，杆向弹性应变 $\bar{\varepsilon}^e$ ；第 k ($k = 1, \dots, N$) 杆对应的物理量记为 \bullet_k ， N 为代表体元的杆件总数。

$$\{\bar{\sigma}_k, 0, 0\}^T = P_k \cdot \sigma_k \quad (8)$$

$$\{\bar{\varepsilon}_k, 0, 0\}^T = Q_k \cdot \varepsilon_k \quad (9)$$

式 (8) 和式 (9) 分别建立了杆向应力应变向二维总体坐标系的转化，其中

$$P_k = \begin{bmatrix} cc & ss & 2cs \\ ss & cc & -2cs \\ -cs & cs & cc - ss \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} cc & ss & cs \\ ss & cc & -cs \\ -2cs & 2cs & cc - ss \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{L_k} \cdot \begin{bmatrix} -c^3 & -c^2s & c^3 & c^2s \\ -cs^2 & -s^3 & cs^2 & s^3 \\ -2c^2s & -2cs^2 & 2c^2s & 2cs^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, θ 是杆件 k 和 y_1 坐标轴的夹角, L_k 表示杆件的长度.

微观非线性求解同样采用 Newton-Raphson 迭代, j 是微观 Newton-Raphson 迭代步指标, 给定 \mathbf{E}^i 下第 j 微观迭代步所对应的物理量记为 $\bullet^{i,j}$. 将式 (5) 作泰勒展开及整理

$$\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \sigma_k^{i,j+1} = \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \sigma_k^{i,j} + \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \frac{\partial \sigma_k^{i,j}}{\partial \varepsilon_k^{i,j}} \cdot \mathbf{b}_k \cdot \Delta \mathbf{u}_k^{i,j} = 0 \quad (13)$$

联合坐标转换式 (8) 和 (9) 可以得到

$$\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i,j} \cdot \mathbf{b}_k \cdot \Delta \mathbf{u}_k^{i,j} = - \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \sigma_k^{i,j} \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_k^{i,j} = \frac{\partial \sigma_k^{i,j}}{\partial \varepsilon_k^{i,j}} = \mu_k^{i,j} \cdot \begin{bmatrix} c^4 & c^2s^2 & c^3s \\ c^2s^2 & s^4 & cs^3 \\ c^3s & cs^3 & c^2s^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

由式 (5) 可知: 微观问题的终点实际上是微观结构的应力自平衡, 下面讨论这个问题的起始驱动.

式 (14) 中 $j = 0$ 时, $\mathbf{u}_k^{i,0} = 0$, 右端项

$$- \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \sigma_k^{i,0} = - \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i,0} \cdot (\mathbf{E}^i + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{u}_k^{i,0}) = - \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i-1} \cdot \mathbf{E}^i \quad (16)$$

其中 $\mathbf{d}_k^{i-1} = \mathbf{d}_k^{i,0}$ 是给定 \mathbf{E}^{i-1} 下微观迭代终点的模量值, 也是当前微观迭代的模量初始值.

式 (16) 代表了微观迭代的初始驱动力, 就是强迫微结构发生整体宏观应变 \mathbf{E}^i 时需要施加力的负值. 因此可以说, 宏观计算结果 \mathbf{E}^i 驱动了微观计算.

1.3 宏微观联系

联系宏微观的一个重要步骤是非均质材料在分析点 (高斯点) 上等效弹性模量求解. 一般列式可参

考阎军等的工作^[4], 简要步骤是: 首先求解一组 (平面问题是 3 个) 在周期性边界条件约束下, 作用单胞强制协同变形载荷的弹性问题

$$\left(\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^i \cdot \mathbf{b}_k \right) \cdot \chi = \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^i \quad (17)$$

结合周期性边界条件求解方程 (17), 代入下式求解等效弹性模量, A_k 是杆件面积

$$\mathbf{D}^i = \frac{\sum_k [(\mathbf{d}_k^i - \mathbf{d}_k^i \cdot \mathbf{b}_k \cdot \chi_k^i) \cdot L_k \cdot A_k]}{\sum_k (L_k \cdot A_k)} \quad (18)$$

基于宏微观两个尺度非线性问题的分解和联系, 整个问题的求解转化为宏观尺度上一个连续体的非线性弹性问题和微观尺度上一组定义在分析点上的小规模弹塑性问题. 这个过程尽管需要求解一个两层次的迭代, 但是效率仍然要比完全结构弹塑性分析高得多.

图 3 给出了整个求解过程的流程图, 空间采用有限元离散. 其中迭代终止时物理量记做 \bullet^{conv} ; 宏观计算相关量包括: 单元形函数 N , 结构反力 $\mathbf{F}^{\text{Reaction}}$, 初始宏观节点力向量 $\mathbf{F} = \int_{\Omega} N^T \cdot \bar{\mathbf{T}} dx + \int_{\Gamma} N^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma$, 总刚度矩阵 \mathbf{K} ; 微观杆系有限元计算相关量包括: 单元形函数 n , 节点力向量 f , 模量矩阵 d , 几何矩阵 b .

2 数值算例 I

考虑一个如图 4(a) 所示的悬臂梁, 梁长 $L = 1 \text{ m}$, 高 $b = 0.4 \text{ m}$. 计算对象是类桁架材料作为桁架简化后的模型, 单胞形式和各构件的面积尺寸如图 4(b) 所示. 由于均匀化方法基于单胞无限小的假设, 计算过程与单胞的实际尺寸无关, 因此这里单胞尺寸是无量纲的. 与此相区别的是, 如果考虑稳定性问题, 单胞尺寸及代表体元的选取将对结果产生影响. 杆件材料的本构模型设为双线性及随动强化模型, 弹性阶段模量 $E_e = 210 \text{ GPa}$, 塑性阶段模量 $E_p = 90 \text{ GPa}$, 屈服应力 $\sigma_Y = 0.6 \text{ GPa}$. 宏观结构采用四边形八节点单元离散, 网格划分见图 5, 网格数为 10×8 ; 微观部分采用杆单元.

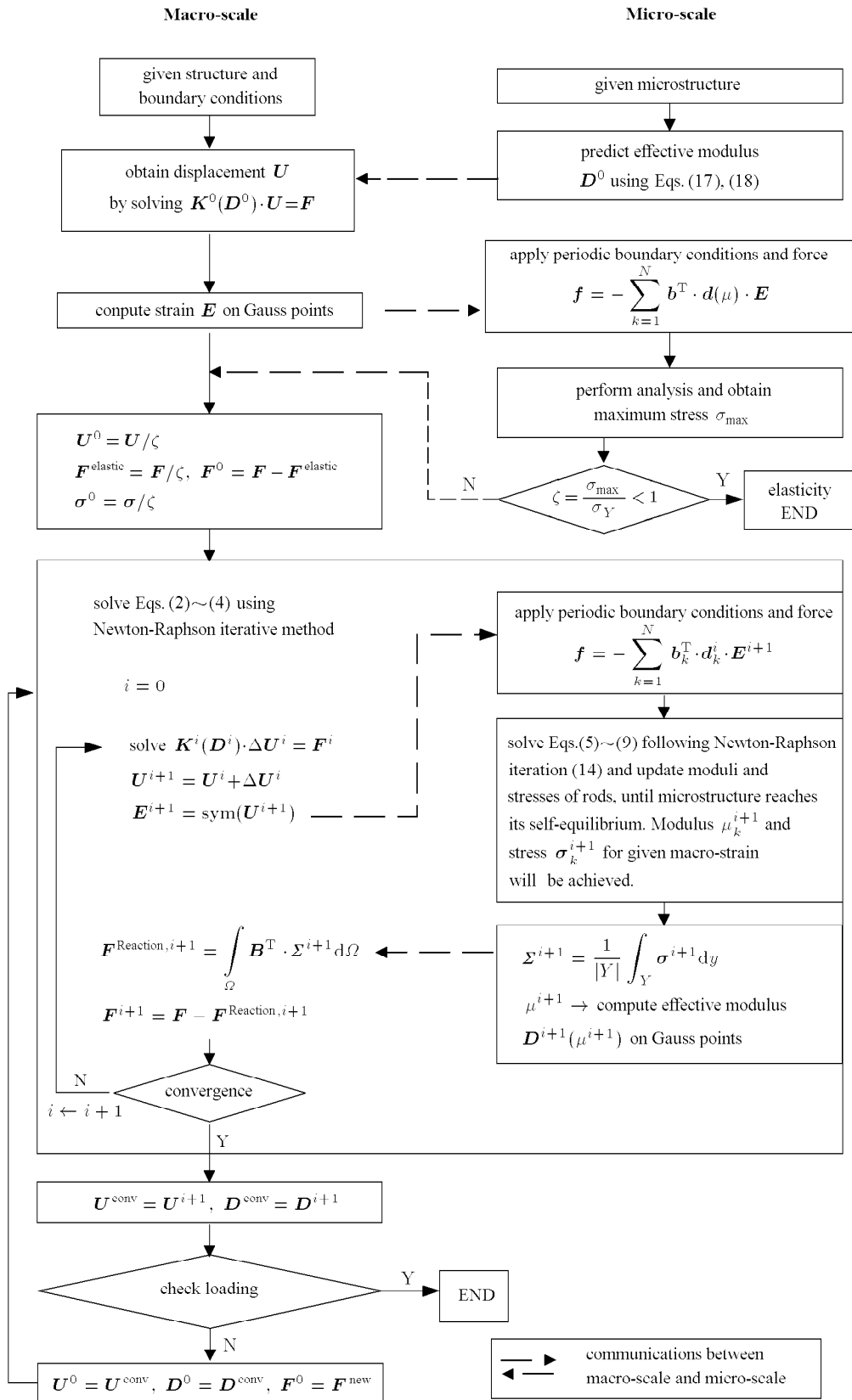
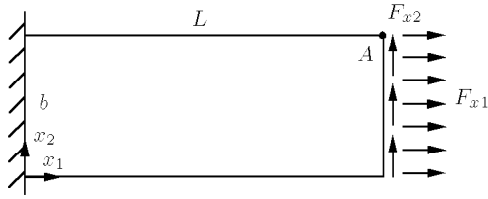


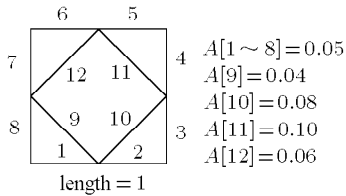
图 3 基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性求解框图

Fig.3 Flowchart for elasto-plastic analysis of structures with truss-like materials



(a) 宏观结构和边界条件

(a) Macro-structure and boundary conditions



(b) 代表单胞的构形、尺寸和截面积

(b) Micro-structure composed of bars

图 4 类桁架材料的悬臂梁

Fig.4 A cantilever composed of truss-like material

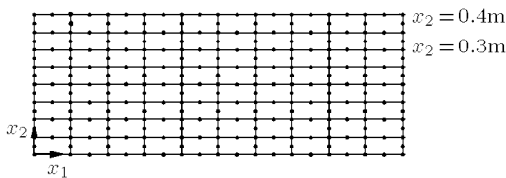


图 5 宏观结构离散

Fig.5 FE discretization of the continuous macro-structure

2.1 简单加载下的计算精度和效率

首先考虑右端均布载荷 $F_{x1} = 10^8 N$. 作为数值比较, 使用 ANSYS 计算具有图 4(b) 单胞构形的实际结构. 以图 6 为例, 此实际结构由 20×8 个单胞空间周期排布形成. 需要注意实际结构中单胞数目变化时, 要保证其体分比和图 4(b) 中的微观结构一致.

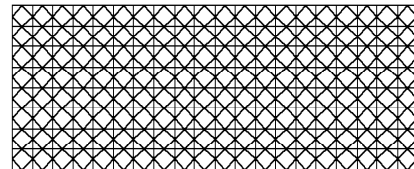


图 6 ANSYS 计算模型

Fig.6 Computational model for ANSYS

表 1 列出了本文的数值结果和 ANSYS 计算的实际结构在 A 点的位移结果和求解耗时 (微机性能: Pentium 2.4 G ; 768M 内存) 的比较. 其中 RVE II 表示选择 4 个如图 4(b) 所示的单胞作为代表体元的数值结果. 尽管算法依赖于高斯点处的分析计算, 但是从表 1 可以看到: 计算结果对于单元内高斯点数目并不敏感; 代表体元的选取对于结果影响很小.

表 1 节点 A 的位移比较 ($10^{-3}m$)

Table 1 Comparison of displacement results at node A / ($10^{-3}m$)

	Mesh/cells	Number of freedoms	u	v	Time /s
numerical homogenization	10x8 [9 Gauss points]	554	4.748 74	-0.747 11	6
	10x8 [4 Gauss points]	554	4.750 08	-0.754 76	4
	10x8 [RVE II]	554	4.749 94	-0.753 84	8
complete computation by ANSYS	300x120	217 682	4.713 21	-0.713 49	268
	200x80	97 122	4.696 72	-0.705 08	60
	100x40	24 562	4.644 74	-0.680 55	24
	50x20	6 282	4.538 91	-0.631 39	10

由于均匀化理论基于单胞无限小的假设, 因而实际结构中单胞尺度相对宏观结构越小, 其计算结果应当越趋近于均匀化的数值结果. 表 1 的数据表明: ANSYS 的结果随着实际结构单胞数目的增多, 也就是单胞绝对尺度减小, 逐渐趋近于本文的数值均匀化结果. 而同时, 等效计算在求解时间上的效益也迅速增加. 因此, 具有空间周期排布桁架类单胞的结构, 尤其当单胞数目较多时, 采用基于数值均匀化

的弹塑性计算, 耗时少, 并且能够达到较高精度.

作者还比较了两种计算方法在 $x_2 = 0.4m$ (即梁上边界) 和 $x_2 = 0.3m$ 处 (见图 5) 多个点的位移误差结果. 误差基本都在同一水平上.

2.2 宏观网格划分的影响

图 5 的宏观网格划分非常规则, 而与之比较的实际结构的单胞同样是方形. 这样, 每个单元总可以对应于实际结构中一些单胞的组合. 去除这样的

巧合是否会对结果产生影响？考虑图 7 中的两种单元划分，节点 A 的位移结果和计算耗时比较见表 2。可以看到，宏观网格划分对于结果的影响很小。在工作量方面，宏观网格划分将影响到宏观计算的自由度和微观计算的次数，求解时间略有差别，但都保持在较低的水平上。

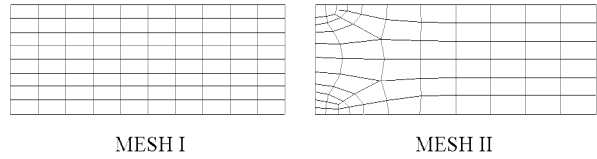


图 7 宏观单元划分

Fig.7 Different FE meshes of macro-structure

表 2 不同网格下节点 A 的位移和求解耗时比较

Table 2 Comparison of displacement results at node A and time consumption using different meshes

	The number of elements	The number of nodes	$u/(10^{-3}\text{m})$	$v/(10^{-3}\text{m})$	Time/s
MESH I	277	80	4.747 35	-0.746 19	4
MESH II	257	72	4.744 79	-0.724 93	3

2.3 加卸载问题

下面考虑卸载和再加载的问题，分别定义 3 个载荷步： $f_1 : F_{x1} = 10^8 \text{ N}$, $f_2 : F_{x1} = 0$, $f_3 : F_{x1} = -5 \times 10^7 \text{ N}$, 顺序加载。本文的数值结果（单元数目

$10 \times 8, 9$ 高斯点）和 ANSYS 实际结构的结果（单胞数目 200×80 和 100×40 ）的比较见表 3。可以看到，基于数值均匀化的弹塑性求解方法可以高效而较精确地处理此类非单调加载问题。

表 3 不同加载历史下节点 A 的位移比较 (10^{-3}m)

Table 3 Displacement results at node A under different loading histories (10^{-3}m)

	f_1		$f_1 \rightarrow f_2$		$f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$	
	u	v	u	v	u	v
numerical homogenization [Mesh : 10×8]	4.768 66	-0.789 11	1.138 16	-0.319 24	-0.686 33	-0.058 72
complete computation [Cells : 200×80]	4.696 75	-0.705 08	1.096 75	-0.243 34	-0.708 53	-0.037 23
complete computation [Cells : 100×40]	4.644 72	-0.680 55	1.075 22	-0.227 73	-0.714 80	-0.055 11

2.4 不同加载路径的问题

图 8 显示了 3 种不同的加载路径 R_k ($k = 1, 2, 3$), 分别使结构由不受外力到最终受荷载组合 $F_{x1} = 8 \times 10^7 \text{ N}$, $F_{x2} = 2 \times 10^6 \text{ N}$. 分别使用数值

均匀化方法计算这 3 种加载路径下的弹塑性问题，并且与实际结构计算结果进行比较，结果如表 4 所示。可以看到，不同加载路径得到了不同的结构响应，且与 ANSYS 计算的实际情况结果符合较好。

表 4 不同加载路径下 A 点位移结果比较 (10^{-3}m)

Table 4 Comparison of displacement results at node A under different loading routines (10^{-3}m)

	R_1		R_2		R_3	
	u	v	u	v	u	v
numerical homogenization [Mesh : 10×8]	2.292 57	1.998 57	2.559 88	1.665 62	2.306 35	1.951 73
complete computation [Cells: 200×80]	2.280 79	1.960 47	2.540 53	1.642 77	2.294 35	1.913 26
complete computation [Cells : 100×40]	2.270 41	1.916 83	2.522 65	1.613 14	2.283 45	1.871 61

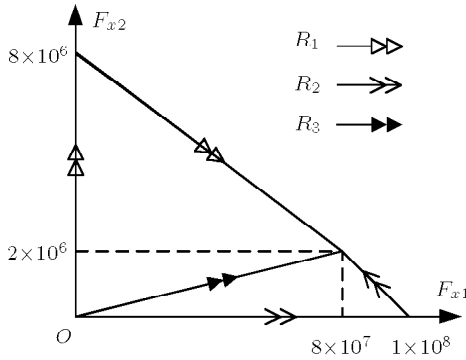


图 8 不同加载路径

Fig.8 Different loading routine

2.5 算法适用范围的讨论

由于均匀化理论基于单胞无限小的假设，实际结构的计算只有可能随着单胞尺度相对宏观结构尺度比值的减小而逐渐逼近均匀化的解答。下面讨论在一定精度要求下，本文计算格式的适用性问题。

对于 2.1 节给出的例题，采用宏观网格 10×8 和单元高斯点数为 9 的数值结果作为数值均匀化的基本结果，将 A 点 x_1 方向位移 u 作为数值比较对象。

图 9 给出了相对于 ANSYS 结果的计算误差随实际结构 x_1 方向单胞数增加的变化曲线。可以看到，如果以 5% 的误差作为容许值，那么实际结构中单胞在 x_1 方向上达到 50 个，也就是 x_2 方向上达到 20 个，就能够满足这个精度要求。

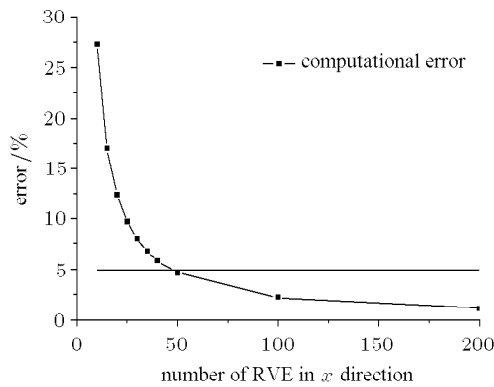


图 9 计算精度随实际结构 x_1 方向单胞数目的变化曲线

Fig.9 Evolution of result error with respect to the number of cells in x_1 direction

在上面例题中，宏观结构的最大尺度和最小尺度的比值可以认为是 $L : b = 10 : 4$ 。表 5 给出了具有不同高宽比的梁（即宏观结构最大尺度和最小尺度比值变化），在一定计算精度的要求下，实际结构在两个方向上需要的最小单胞数目。从结果可以

看到， x_2 方向上的最少单胞数目结果相对 x_1 方向更加稳定，因而对计算误差起决定作用的是宏观结构最小尺度方向上的单胞数目。如果考虑主要变形 u ，那么如果要求计算精度达到 6%，宏观结构的最小尺度，也就是梁高 b 方向上的单胞数目需要达到 20~50。

表 5 不同长宽比的实际结构在控制一定误差下的单胞数目

Table 5 The number of cells needed to achieve the required precision for structures with different aspect ratios

b/m	Error of u is set 6%		Error of v is set 8%	
	x_2 direction	x_1 direction	x_2 direction	x_1 direction
0.2	58	290	41	205
0.3	51	170	45	155
0.4	44	110	40	100
0.5	35	75	35	70
0.6	30	50	30	50
0.8	24	30	24	30

需要指出的是，由于单胞计算采用杆单元，本文算法适用于强超静定的类桁架材料所构成的结构。

3 数值算例 II

算例 I 的宏观构形和材料单胞都是方形，实际结构理论上可以包含有限个完整单胞。然而，为了适应实际工程中复杂的宏观边界条件，很难保证单胞的完整性。如图 10 所示的有圆孔的矩形梁，在孔边界和上下斜边上，单胞都不能保证完整性，这样的问题更具一般意义。

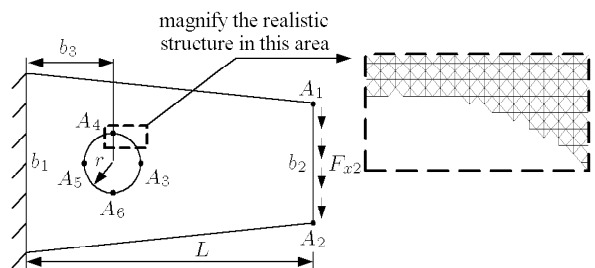


图 10 带圆形空洞的梯形梁

Fig.10 A trapezoidal cantilever with a hole

图中几何参数和载荷分别为： $b_1 = 0.6 \text{ m}$ ， $b_2 = 0.4 \text{ m}$ ， $b_3 = 0.3 \text{ m}$ ， $L = 1 \text{ m}$ ， $r = 0.1 \text{ m}$ ， $F_{x2} = 2 \times 10^8 \text{ N/m}$ ，同时考虑图 4(b) 的微观结构。采用数值均匀化计算结构的弹塑性响应（宏观有限元节点数目 4664，八节点四边形单元数目 1440），并且和 ANSYS 计算的桁架结构（节点数目 56448，

杆件数目 149378) 在点 $A_k (k = 1, \dots, 6)$ 进行位移比较. 从表 6 可以看到, 基于数值均匀化的弹塑性求

解格式对于具有较复杂宏观构形的问题仍然能够保证较高的精度.

表 6 不同位置节点位移和实际结构的比较

Table 6 Comparison of displacement results at six nodes

Node	$u/(10^{-4}\text{m})$		$v/(10^{-4}\text{m})$	
	Numerical homogenization	Complete computation by ANSYS	Numerical homogenization	Complete computation by ANSYS
A_1	29.494 1	30.295 1	-115.136 5	-118.042 3
A_2	-27.595 3	-27.946 9	-115.479 2	-117.985 9
A_3	0.980 4	1.064 6	-32.051 1	-33.147 0
A_4	3.735 0	3.949 0	-18.813 0	-19.337 3
A_5	0.196 7	0.198 8	-6.036 8	-6.087 9
A_6	-2.728 3	-2.687 6	-18.840 7	-19.351 0

4 结 论

本文讨论了基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性计算方法: 由于构件有较高的长细比, 因而可以采用桁架模型模拟; 采用宏微观两级弹塑性分析方法, 将一个大规模桁架系统的结构弹塑性计算转化为一个宏观连续体的非线性弹性问题和一组小规模桁架结构的弹塑性问题进行求解, 能够在保证较高精度的前提下计算效率获得很大提高.

基于以上求解过程, 分析并讨论了两个不同的宏观结构分别在简单加载和非单调加载下的弹塑性响应. 与 ANSYS 计算的实际情况的比较表明: 在宏观结构最小尺度上的单胞数目达到一定水平时, 本文的求解格式能够达到较高的计算精度和求解效率; 宏观网格划分的规则性和代表体元的选择对于结果的影响不明显; 方法在处理加卸载和不同加载路径等问题时, 同样获得了较理想的结果; 方法可以应用于边界包含不完整单胞的类桁架结构的弹塑性模拟.

参 考 文 献

- 1 Chiras S, et al. The structural performance of near-optimized truss core panels. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 4093~4115
- 2 Deshpande VS, Fleck NA., Ashby MF. Effective properties

of the octet-truss lattice material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49: 1747~1769

- 3 Wallach JC, Gibson LJ. Mechanical behavior of a three-dimensional truss material. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 7181~7196
- 4 阎军, 程耿东, 刘书田等. 周期性点阵类桁架材料等效弹性性能预测及尺度效应. *固体力学学报*, 2005, 26: 421~428 (Yan Jun, Cheng Gengdong, Liu Shutian, et al. Prediction of equivalent elastic properties of truss materials with periodic microstructure and the scale effects. 2005, 26: 421~428 (in Chinese))
- 5 Ladeveze P. Multiscale modelling and computational strategies for composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60(1): 233~253
- 6 Ghosh S, Kyunghoon L, Moorthy S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 132: 63~116
- 7 Fish J, et al. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 148: 53~73
- 8 Terada K, Kikuchi N. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 5427~5464
- 9 Matsui K, Terada K, Yuge K. Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures. *Computers and Structures*, 2004, 82: 593~606

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS FOR 2D STRUCTURES WITH TRUSS-LIKE MATERIALS¹⁾

Liu Ling Yan Jun Cheng Gengdong²⁾

(*State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

Abstract The elasto-plastic analysis of structures composed of truss-like materials takes much time and considerable resources in modeling and numerical calculation if all struts are taken into consideration. The main purpose of this paper is to speed up the solution of this class of problems. The unit cell is simplified as a truss model according to the large ratio of strut's length to the section size. Numerical homogenization is carried out due to the periodic arrangement of cells in space. The original problem is thereby transformed to two interrelated problems of two different scales: a nonlinear elastic continuum computation in macro-scale and several elasto-plastic analyses of small-scale truss systems in micro-scale. Monotone load, non-monotone load, regular macro-structure and irregular macro-structure with imperfect unit cells are, respectively, considered in two numerical examples. In comparison with the results of the actual structures, the proposed method is found to enjoy the same precision but to take less time. At last the applicable conditions of the proposed method are discussed.

Key words truss-like material, elasto-plastic computation, multi-scale analysis, numerical homogenization

Received 22 August 2005, revised 11 May 2006.

1) The project supported by the Natinal Basic Research Program of China (2006CB601205), the National Natural Science Foundation of China (10332010) and the Innovative Research Team Program (10421002).

2) E-mail: chenggd@dlut.edu.cn