

周期张开型平行裂纹问题研究¹⁾

肖俊华 蒋持平²⁾

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

摘要 研究无限介质中周期平行裂纹问题, 利用复应力函数在集中载荷作用点和裂纹尖端的奇异性分析及双曲函数的周期性质, 求得了问题在远场作用均匀载荷时裂纹尖端应力强度因子的闭合形式解, 所得结果与已有的数值解吻合较好, 说明了所构造复应力函数的合理性. 其结果对于研究多裂纹的干涉作用以及结构和材料的强度设计提供了有意义的参考.

关键词 周期裂纹, 平行裂纹, 张开型, 应力强度因子, 双曲函数

中图分类号: O343.7, O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)02-0278-05

引 言

断裂力学已经在航空结构、压力容器、机械制造等部分工程结构和材料的强度设计、安全可靠性和缺陷评定规范与标准中得到广泛应用, 裂纹尖端场与应力强度因子是断裂力学分析的关键问题. 当裂纹之间的距离较大时, 无限介质中单裂纹的解能够给出精度足够的结果. 但是当裂纹之间的距离小到与裂纹尺寸同量级时, 裂纹之间的相互干涉将不可忽略, 裂纹尖端应力场或互相干涉增强, 或相互影响屏蔽, 规律十分复杂. 周期共线裂纹和周期平行裂纹代表裂纹从无序排列到有序排列在应力场增强与屏蔽的两个极端情形而受到重视.

对于周期平行裂纹在反平面载荷作用时的情形, Pak 和 Goloubeva^[1] 利用分布位错法给出了解答; Tong 等^[2] 利用复变函数方法得出了其闭合形式解; Hao^[3,4] 利用共形映射方法, 研究了含周期平行裂纹无限介质的弹塑性问题和双材料问题. 对于周期平行裂纹的平面问题, 也有不少学者进行了研究. Sanada 等^[5] 利用傅立叶变换, 研究了层板复合材料中含有周期平行裂纹时的情形; 陈宜周^[6] 对含周期平行裂纹的无限板条问题进行了应力分析; Delameter^[7], Karihaloo^[8], Chen 和 Lin^[9] 利用分布位错法, 对含周期平行裂纹无限介质的平面问题进行了研究, 给出其级数形式解. 据作者所知, 周期张开型平行裂纹目前还只有数值研究, 在应力强度因子手册^[10,11] 上也是数值结果, 无疑寻求这样问题

的闭合解对于在工程应用和裂纹相互干涉理论研究中都有重要意义.

本文利用复应力函数的奇异性分析^[12,13] 和双曲函数的周期性质确定应力函数的形式, 推导了周期张开型平行裂纹问题应力强度因子的闭合解. 所得结果便于计算, 比已有的复杂积分方程级数解大大节省计算工作量.

1 问题描述

无限各向同性弹性体中含有周期平行分布裂纹(如图 1 所示). y 方向远场受均匀拉力 σ 作用, 裂纹在 y 方向周期为 ω , 裂纹长为 $2a$.

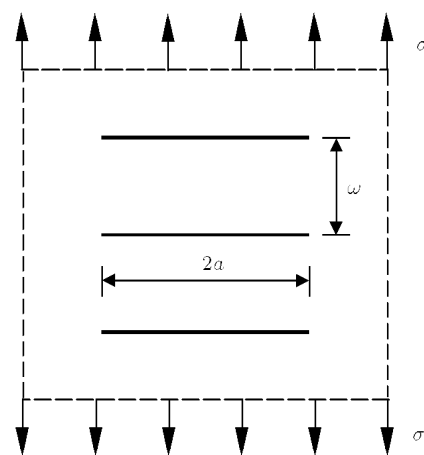


图 1 无限介质中含有周期平行分布裂纹

Fig.1 A periodic array of parallel cracks in an infinite medium

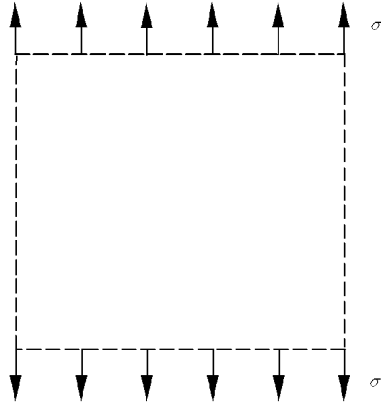
2006-03-13 收到第 1 稿, 2006-08-04 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10672008)和航空科学基金(04G51050)资助项目.

2) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn

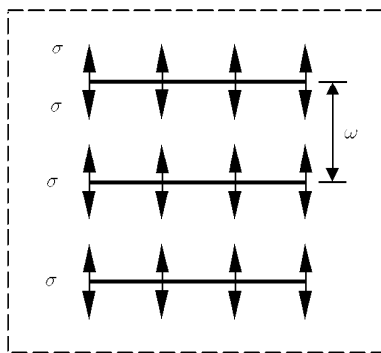
由叠加原理,原问题可以分解为下述两个问题:

- (1) 均匀弹性体, 受载状态为 y 方向受远场均匀拉力 σ 作用, 见图 2(a);
- (2) 含周期平行分布裂纹体, 受载状态为裂纹上下表面受均匀应力 σ 作用, 见图 2(b).



(a) 问题 1: 受远场均匀拉应力的无限板

(a) Problem one: An infinite solid subjected to far-field stress σ



(b) 问题 2: 裂纹面受均匀压力的周期平行裂纹

(b) Problem two: the periodic parallel cracks surfaces are subjected to uniform stress σ

图 2 原问题的分解

Fig.2 The decomposition of original problem

2 问题求解

受均匀拉应力无限板 (问题 1) 的应力场为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \sigma \quad (1)$$

为求解裂纹面受均匀压力的周期平行裂纹问题 (问题 2), 先来分析下述问题 (图 3): 在周期平行分布裂纹上下表面的相同位置, 受一对自相平衡的集中力 P , 作用点为

$$Z = b + in\omega$$

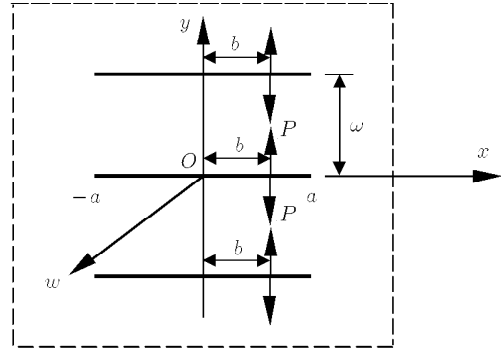


图 3 裂纹面受集中力的周期平行裂纹

Fig.3 The periodic parallel cracks in which surfaces are subjected to concentrated force P

n 为任意整数. 该问题不妨称为新问题.

新问题在裂纹面 $(-a < x < a, y = in\omega)$ 的边界条件为

$$\sigma_y = \begin{cases} 0, & x \neq b \\ r^{-1} \text{ 阶奇异}, & x = b \end{cases} \quad (2)$$

其中 r 表示以裂尖为极点的极径. 同时

$$\int_{-a}^a \sigma_y dx = P \quad (3)$$

对于新问题 (图 3), 其裂纹面上 y 方向应力分量 $\sigma_y(z)$ 的表达式可写为 [13]

$$\sigma_y(z) = \text{Re}\varphi_I(z) \quad (4)$$

其中 $\varphi_I(z)$ 为复应力函数, 是一待定解析函数. 式 (4) 的证明过程见附录.

由于所研究问题为 z 平面上周期为 $i\omega$ 问题, 引入函数

$$t = \sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) \quad (5)$$

其周期为 $i\omega$.

考虑边界条件 (2), 可知 z 平面上 σ_y 在点 $b + in\omega$ 处具有奇异性, 由式 (4) 知 $\varphi_I(z)$ 在此处也具有奇异性, 且具有同样的周期 $i\omega$, 同时考虑裂纹端点的应力具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性, 可设复应力函数形式如下

$$\varphi_I(z) = C / \left\{ \left[\sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \right] \cdot \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)} \right\} \quad (6)$$

其中 C 为待求常数. 式 (6) 满足新问题的所有边界条件.

将式 (4) 和式 (6) 代入式 (3), 得

$$C = \frac{2P}{\omega} \cosh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)} \tag{7}$$

将式 (7) 代入式 (6), 得

$$\varphi_I(z) = \frac{2P \cosh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)}}{\omega \left[\sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \right] \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)}} \tag{8}$$

引入裂尖应力强度因子公式

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi(z-a)} \sigma_y(z) \tag{9}$$

由式 (4),(8),(9) 可得新问题的裂尖应力强度因子

$$K_I = \frac{\sqrt{2}P \cosh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)}{\sqrt{\omega \sinh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) \cosh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)}} \sqrt{\frac{\sinh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) + \sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)}} \tag{10}$$

对于裂纹面受均匀压力的周期平行裂纹问题 (问题 2), 令式 (8) 中 $P = \sigma db$, 并沿裂纹面进行积分得

$$\begin{aligned} \varphi_I(z) &= \int_{-a}^a \frac{\sigma \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right)}}{\pi \left[\sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \right] \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)}} d \left[\sinh\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) \right] = \\ &\sigma \left[\frac{\sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)}} - 1 \right] \end{aligned} \tag{11}$$

由式 (1) 和式 (4), 式 (11), 可得原问题的裂纹面应力场表达式

$$\sigma_y(z) = \operatorname{Re} \left[\sigma \frac{\sinh\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(\frac{2\pi z}{\omega}\right) - \sinh^2\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)}} \right] \tag{12}$$

由式 (4),(9),(12) 可得原问题裂尖应力强度因子

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\omega}{2} \tanh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)} = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot K^* \tag{13}$$

$$K^* = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi a} \tanh\left(\frac{2\pi a}{\omega}\right)} \tag{14}$$

式 (13) 中 $\sigma \sqrt{\pi a}$ 为无限大体中长为 $2a$ 的单个裂纹的 I 型应力强度因子, 故 $K^* = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}}$ 为所研究原问题裂尖的无量纲场强因子. 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 式 (10) 和 (13) 均退化为单裂纹时的经典结果 [10,11].

3 裂纹分布周期对裂纹尖端场的影响

对于原问题, 计算表明, 增加平行裂纹的密度将减小裂纹尖端场. 图 4 给出了无量纲场强因子 K^* 随无量纲周期比值 ω/a 的变化曲线, 所得结果与文

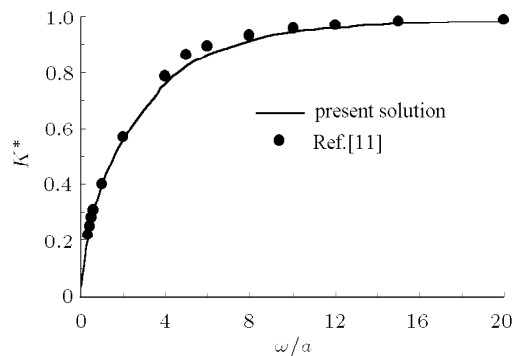


图 4 无量纲场强因子 K^* 随 ω/a 的变化曲线
Fig.4 Variation of the dimensionless field intensity factor K^* with ω/a

献 [10,11] 吻合很好. 可以看到, 随着比值 ω/a 从 0 开始逐渐增大. K^* 也随之增大. K^* 在初始时增长幅度很快, 但很快减慢并趋于单裂纹时的结果.

4 结束语

对于无限介质中含有周期平行分布裂纹的平面问题, 获得了在远场作用均匀载荷时裂尖应力强度因子的闭合解. 本文解答形式简单、易于计算, 通过数值计算, 有助于更深入地认识该类非均匀材料的断裂性能. 本文结果为其它数值和近似方法提供了有价值的参考.

参 考 文 献

- 1 Pak YE, Goloubeva E. Electroelastic properties of cracked piezoelectric materials under longitudinal shear. *Mechanics of Materials*, 1996, 24(4): 287~303
- 2 Tong ZH, Jiang CP, Lo SH, et al. A closed form solution to the antiplane problem of doubly periodic cracks of unequal size in piezoelectric materials. *Mechanics of Materials*, 2005, 2006, 38(4): 269~286
- 3 Hao TH. An exact elastic-perfect plastic solution of antiplane parallel periodical crack field. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, 26(1): 59~63
- 4 Hao TH. An exact solution of the anti-plane parallel periodical transverse crack field in a bimaterial infinite plane. *International Journal of Fracture*, 1991, 47(3): R49~R51
- 5 Sanada K, Shindo Y, Ueda S. Stress intensity factors for glass-fiber reinforced plastics with an infinite row of parallel cracks at low temperatures. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, 28(3): 183~196
- 6 陈宜周. 周期裂纹削弱的无限长板条的应力分析. 应用数学和力学, 2004, 25(11): 1189~1194 (Chen Yizhou. Stress analysis for an infinite strip weakened by periodic cracks. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(11): 1298~1303 (in Chinese))
- 7 Delameter WR, Herrman G, Barnett DM. Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42(1): 74~80
- 8 Karihaloo BL. Fracture of solids containing arrays of cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 1979, 12(1): 49~77
- 9 Chen YZ, Lin XY. Periodic group crack problems in an infinite plate. *International Journal of Solids and Structure*, 2005, 42(9-10): 2837~2850
- 10 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993 (Chinese Aeronautical Establishment. Stress Intensity Factors Handbook. Beijing: Science Press, 1993(in Chinese))
- 11 Murakami Y. Stress Intensity Factors Handbook (vol 1). Beijing: World Publishing Corporation, 1989
- 12 Jiang CP, Zou ZZ, Wang D, et al. A discussion about a class of stress intensity factors and its verification. *International Journal of Fracture*, 1991, 49(2): 141~157

- 13 Chang SS. The general solutions of the doubly periodic cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 1983, 18(4): 887~893

附 录

式 (4) 的证明:

取应力函数

$$F(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{z}\tilde{\varphi}(z) + \tilde{\psi}(z)]$$

其中 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 为解析函数, $\tilde{\varphi} = \int \varphi dz$, $\tilde{\psi} = \iint \psi dz dz$.

各应力分量为

$$\sigma_x(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 F =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\varphi(z) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi(z)]$$

$$\sigma_y(z) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 F =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)]$$

$$\tau_{xy}(z) = -\frac{\partial^2 F}{\partial xy} = -i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right) F =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)]$$

取 $z = \rho$ 表示 x 轴上裂纹表面任一点, 得到裂纹面上各应力分量

$$\sigma_x(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\varphi(\rho) - \bar{\rho}\varphi'(\rho) - \psi(\rho)]$$

$$\sigma_y(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\varphi(\rho) + \bar{\rho}\varphi'(\rho) + \psi(\rho)]$$

$$\tau_{xy}(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{\rho}\varphi'(\rho) + \psi(\rho)]$$

考虑裂纹面应力条件 $\tau_{xy}(\rho) = 0$, 则 $\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\bar{\rho}\varphi'(\rho) + \psi(\rho)] = 0$, 由 Cauchy-Riemann 方程得

$$\frac{1}{2} [\bar{\rho}\varphi'(\rho) + \psi(\rho)] = C_0$$

其中 C_0 为任意实常数.

故

$$\sigma_y(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\varphi(\rho) + \bar{\rho}\varphi'(\rho) + \psi(\rho)] =$$

$$\operatorname{Re}[\varphi(\rho) + C_0] = \operatorname{Re}\varphi_I(\rho)$$

在 y 方向的应力分布具有周期性, 可得

$$\sigma_y(z) = \operatorname{Re}\varphi_I(z)$$

其中 $z = x + i n \omega$, $-a < x < a$, $n \in N$, 且函数 $\varphi_I(z)$ 周期为 $i\omega$. 本文推导和证明过程参考了文献 [13].

STUDY ON THE PROBLEM OF PERIODIC OPEN TYPE PARALLEL CRACKS¹⁾

Xiao Junhua .Jiang Chiping²⁾

(*Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract Periodic parallel cracks in an infinite medium under far-field inplane tensile stress are investigated. By using the singular analysis of the complex stress function at the concentrated load point and the tips of cracks, as well as combining periodicity of the hyperbolic function, a closed form solution of the stress intensity factor to the problem is obtained. A comparison of the present solution with existing numerical results shows a good agreement, which indicates the validity of the complex stress function. The present solution can be used to study the interaction of multi-cracks and the structural integrity assessment.

Key words periodic crack, parallel crack, opening type, stress intensity factor, hyperbolic function

Received 13 March 2006, revised 4 August 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672008) and the Aviation Science Foundation of China (04G51050).

2) E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn