第20卷 第4期 力学进展 Vol. 20 No. 4
1990年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1990

大气运动不稳定的变分原理（I）*

曾 庆 存
中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学
数值模拟开放研究实验室，北京（邮政编码100080）

提要 本文利用非线性基本方程组和变分原理研究旋转大气运动的不稳定性问题。文中所用方法是普遍适用的，对各种可能的基流模型都可获得其不稳定性判据。例如：适合于正压或斜压、分层或连续模型以及准地转模式或原始方程组；基流可以是带状或非带状的（即平行流或非平行流），定常的或非定常的。

虽然基流具有多样性，但它们在由相应的不变泛函所决定的空间内都是驻点（临界点）。如果在相应的泛函中将角动量守恒包括进去，那么基流可以是非定常流。

无论线性或非线性二阶变分都给出不稳定性判据。但尤其值得一提的是，本文第一次得到关于非定常基流，地形扰动流和非地转流的不稳定性判据。

同时本文也指出了线性理论和我们发展的变分原理所得到的不稳定性判据之间的差别，该差别说明用非线性基本方程组的重要性。

在最后一节，将该理论推广到流体不具有有限能量，因而变分原理不能直接应用的情况，如β平面，然而广义的 Liapounoff 函数仍然可以在变分考虑下得到。

关键词 大气运动；变分原理；不稳定性

1 引 言

大气运动的不稳定性问题是一般的流体力学不稳定性问题的一个组成部分，是一个经典的然而困难的问题。研究该问题的一个比较完善的方法，是求解相应的线性方程或方程组的广义特征值问题。然而，此方法一般仅对带状（平行）和定态的基流是适合的（见 Lin, 1955）。对非带状和定常基流情形，Arnold（1965）提出了一种非常有力的变分方法来求不稳定性判据。但迄今为止，文献中仅仅给出了二维无辐散模式的带状流或者定常曲线流的不稳定性判据（Arnold, 1955; Dikii, 1955），以及三维的但带有等熵下界面的地转模式的不稳定性判据（Blumen, 1968）。没有任何人用变分原理或线性方法对三维原始方程组求得普适

* 本工作是综合笔者1986年8月在日本京都举行的大尺度大气动力学讨论会和1986年8月在北京举行的非线性大气动力学国际会议上的大会邀请报告，以及1987年7月在北京举行的国际流体动力学讨论会上的报告而写成，发表于 *Advances in Atmospheric Sciences*, 6, 2 (1989)：1—36. 这次又由笔者作了修改。译者：任舒展。

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

的不稳定性判据．由于没有发展出普遍适用的方法，因而也未曾有人对任何大气模型中非定常基流给出过普适的不稳定性判据．

为了填补这个空白，我们在 Arnold 方法基础上发展了一种广义变分方法，这种方法对于求出各种大气模式的不稳定性判据是普遍适用的．即模式可以是正压的或斜压的，准地转的或非地转的，且基流可以是带状的或非带状的，定常的或非定常的．

注意到不稳定性的线性理论是针对线性化方程（或方程组）而言的，而变分原理是建立在非线性方程（或方程组）基础上，因而由变分原理发展起来的理论是针对非线性情形，并且只要求 Liapounoff 意义下的稳定性概念能适用即可．该方法自然可用于研究小扰动的稳定性；另外，也可用于特殊情形下大振幅扰动的稳定性研究．

所谓运动在 Liapounoff 意义下是稳定的，是指能找到一个由扰动量组成的非退化的正定或负定泛函，称作 Liapounoff 泛函，它在所有时刻为一致有界，即若初始时刻时为小量，以后保持为小量．对于不同的具体问题，Liapounoff 泛函可以具有不同的具体定义．构造具体的 Liapounoff 泛函常是证明该具体问题稳定性的关键．

2　二维准地转模式的一般定理

二维准地转模式（或二维不可压缩流体）的基本方程为势涡守恒方程（或涡度守恒方程）

$$\partial q/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla q = 0 \tag{2.1}$$

其中

$$q = \Delta\phi - k(f_0^2/\varphi_0)\phi + 2\omega\cos\theta \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\theta}^0\left(-\frac{\partial\phi}{a\sin\theta\,\partial\lambda}\right) + \boldsymbol{\lambda}^0\left(\frac{\partial\phi}{a\partial\theta}\right) \tag{2.3}$$

ϕ 是流函数，φ_0 是等价的自由表面的平均重力势，f_0 是平均 Coriolis 参量，ω 是地球角速度，∇ 和 Δ 分别表示在半径为 a 的球面上的梯度算子和 Laplace 算子，q 就是势涡（气象学上称位涡）；$k=0$，1；$k=0$ 对应于二维无辐散模式．为简化起见，此处略去了地形作用．

从（2.1）可以得到能量、“广义势涡拟能”和角动量诸守恒律．因此，我们有如下不变泛函，它是依赖于任意函数 Q 和一些参量 r_0, r_1, r_2 的 ϕ 的泛函：

$$I(\phi) = \iint_S\left\{r_0\left[|\mathbf{v}^2| + k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\phi^2\right] + r_1Q(q) + r_2\left[\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - k\frac{a^2f_0^2}{\varphi_0}\phi\cos\theta\right]\right\}dS$$
$$= \text{invariant（常数）} \tag{2.4}$$

其中积分遍及整个球面，泛涵 I 即是 Arnold-Dikii 泛函的推广（后者相当于在（2.4）中令 $r_2=0$）．后面，我们将看到这种推广的重要性．换言之，总角动量守恒扮演着特殊角色，虽然它是一阶泛函，不同于二阶或高阶的总能量和广义势涡拟能．

给出一个扰动 $\delta\phi$，在做一些基本运算后得到一阶和二阶变分 δI，$\delta^2 I$ 以及差 $I(\phi+\delta\phi) - I(\phi)$ 如下：

$$\delta I = \iint_S\{-2r_0\phi + r_1Q'(q) + r_2a^2\cos\theta\}\delta q\,dS \tag{2.5}$$

$$\delta^2 I = \iint_S\left\{r_0\left[|\delta\mathbf{v}|^2 + k\frac{f_0^2}{\varphi_0}(\delta\phi)^2\right] + r_1\frac{1}{2}Q''(q)(\delta q)^2\right\}dS \tag{2.6}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$I(\phi+\delta\phi)-I(\phi)=\delta I+\delta^2 I+\cdots \tag{2.7}$$

其中 $Q'(q)=dQ/dq$，$Q''=d^2Q/dq^2$. 此外，又有

$$I(\phi+\delta\phi)-I(\phi)=\delta I+\Delta^2 I \tag{2.8}$$

它是利用 Taylor 级数截断的 Lagrange 公式而得到的，其中

$$\Delta^2 I=\iint\limits_S\left\{r_0\left[|\delta\mathbf{v}|^2+k\frac{f_0^2}{\varphi_0}(\delta\phi)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}dS \tag{2.9}$$

$$q^*=q+r^*\delta q,\qquad 0\leqslant r^*\leqslant 1$$

式中 $\Delta^2 I$ 不同于 $\delta^2 I$，即 $Q''(q)$ 由 $Q''(q^*)$ 代替. 假设我们研究的所有流动状态都有平方可积的势涡度，即 $\phi+\delta\phi\in W_2^2$（这相当于 $\phi+\delta\phi\in L_2$，$\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}\in L_2$ 和 $q+\delta q\in L_2$，参见曾庆存，1979），并且 I 和 $\Delta^2 I$ 均存在，则我们有如下定理：

定理 2.1 方程(2.1)—(2.3)的每一个形如 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$（相角速度为 $\dot{\lambda}_0$ 的行波）的解是泛函空间 ϕ 中 I 的驻点（stationary point），即 $\delta I=0$，而且相角速度为 $\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$. 逆定理亦成立.

证明 如果 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$ 是（2.1）的解，我们有 $\partial q/\partial t=-\dot{\lambda}_0\partial q/\partial\lambda=J(\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta,q)$，此处 $J(\ ,\ )$ 代表半径为 a 的球面上的 Jacobi 算子. 这样从（2.1）就得到

$$J(\phi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta,q)=0 \tag{2.10}$$

这意味着 $\phi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta$ 是 q 的任意函数：

$$\phi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta=\widetilde{Q}(q) \tag{2.11}$$

令 $r_1 Q'(q)=\widetilde{Q}(q)$，即

$$r_1 Q=\int_{q_0}^{q}\widetilde{Q}(x)dx \tag{2.12}$$

而 $\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$ 且 $r_0\neq 0$，则从（2.1）可得

$$-2r_0\phi+r_1 Q'(q)+r_2 a^2\cos\theta=0 \tag{2.13}$$

因而 $\delta I=0$ 成立，定理得证.

再证明逆定理. 给定一个 ϕ，如果 $\delta I=0$，则(2.13)满足，对(2.13)和 q 施以 Jacobi 算子后得到

$$J(-2r_0\phi+r_2 a^2\cos\theta,q)=0 \tag{2.14}$$

如果 $r_0\neq 0$，通过令 $\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$，可以将该方程变换到(2.10)，即 $\phi=\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$ 确是（2.1）的解. 如果 $r_0=0$，则从（2.14）可知 q 和 ϕ 仅是 θ 的函数，因而 ϕ 也是（2.1）的解，只不过其相角速度等于任意常数 $\dot{\lambda}_0$（此时的解为带状环流，相角速度 $\dot{\lambda}_0$ 没有明显的意义，是可以任意的）.

注 2.1 如果 r_0 或 r_1 等于零，由 I 的驻点确定的流是带状环流，而且当 $r_2=0$ 时为刚体旋转状态 $\phi=-a^2\dot{\lambda}_2\cos\theta$，其中 $\dot{\lambda}_2$ 为常数（流的角速度）. 而 $Q'(q)=$ 常数的情形等价于 $r_1=0$. 然而当且仅当 $r_2\neq 0$ 时由 $\delta I=0$ 确定的流才是非定常基流（相角速度 $\dot{\lambda}_0\neq 0$），这意味着通过在泛函 I 中引入角动量守恒使我们的理论可以同时用于定常流和非定常流，但Arnold 和 Dikii 的理论只能用于定常基流.

定理 2.2 如果 $r_1 Q''(q)/2$ 和 r_0 在流体中处处同号且为非负定（即 $r_1 Q''\geqslant 0$）或非正定（即 $r_1 Q''\leqslant 0$），则由函数 $Q(q)$ 和参量 r_0，r_1 及 r_2 通过 $\delta I=0$ 确定的基流 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

对任何小扰动 $\delta\phi\in W_2^2$ 总是稳定的.

证明　若定理 2.2 中的条件满足，我们能取 $|\Delta^2 I|$ 或更简单地取 $\|\delta\phi\|_W^2$ 作为 Liapounoff 泛函，其中

$$\|\delta\phi\|_W^2=\left|r_0 k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\phi\|^2+|r_0|\cdot\|\delta\mathbf{v}\|^2+\left|r_1\frac{Q''_m}{2}\right|\cdot\|\delta q\|^2 \tag{2.15}$$

$\|\cdot\|$ 是在 L_2 空间中的范数，$\|\cdot\|_W$ 是 Sobolev 空间中的一种范数；$|Q''_m|$ 是 $|Q''(q)|$ 的下界，即

$$\left|Q''(q^*)\right|_{\delta\phi\in W_2^2}\geqslant Q''_m \tag{2.16}$$

注意：本来在 (2.15) 中 Q''_m 应定义为 $|Q''(q^*)|$ 的下界，其中 $q^*=q+r^*\delta q$ 既包含有基流的势涡 (q)，也包含有势涡扰动 (δq)。不过，函数 $Q(q)$ 的定义只是对于基流来说具有本质的意义，即可以先把 $Q(q)$ 定义在基流的 q 所处的区间上，$q_m\leqslant q\leqslant q_M$，其中 q_m 和 q_M 分别记基流的 q 的最小和最大值. 今若 $q^*=q+r^*\delta q$ 不在此区间上，则可以将原来的函数 Q'' 进行开拓，使得在 $q^*>q_M$ 和 $q^*<q_m$ 时都有 $|Q''(q^*)|\geqslant Q''_m$，其中的 Q''_W 满足 (2.16). 我们就取这样开拓后得到的函数作为本问题有关的函数 Q. 于是我们有 $|\Delta^2 I|\geqslant\|\delta\phi\|_W^2$. 若 $\delta\phi^{(0)}\in W_2$ 足够小，使得

$$|\Delta^2 I^0|=\left|r_0 k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\phi^{(0)}\|^2+|r_0|\cdot\|\delta\mathbf{v}^{(0)}\|^2+\left|\frac{r_1}{2}\iint_S Q''(q^{*(0)})(\delta q^{(0)})^2 dS\right|<\delta \tag{2.17}$$

则因 $\Delta^2 I$ 的守恒性，有

$$\|\delta\phi\|_W^2\leqslant|\Delta^2 I^{(0)}|<\delta,\ (0\leqslant t<\infty,\ \delta\phi\in S_c) \tag{2.18}$$

可见，我们至少找到了一个 Liapounoff 泛函 $\|\delta\phi\|_W^2$，它是非退化的（包含扰动量的全体）和正定的，而且在所有时刻一致有界，所以基流（满足 $\delta I=0$）对于任何扰动 $\delta\phi\in W_2^2$ 是稳定的.

(2.18) 的几何表示如图 1.

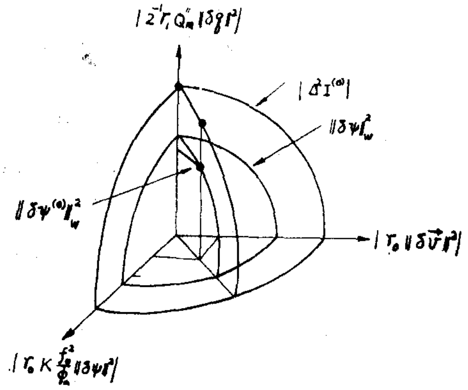

图 1　$\|\delta\phi\|_W^2$ 和 $|\Delta^2 I^{(0)}|$ 的几何表示. 注意：图中只表示扰动限制在 $\|\delta\phi^{(0)}\|_W^2\leqslant\delta$ 的曲面之上及之内，并不表示 $\|\delta\phi\|_W^2$ 守恒

注 2.2　(2.17) 表明，当 $r_1Q''(q^*)\neq 0$ 时，所谓小扰动意味着 $\delta\phi$，它的一阶导数 $\delta\mathbf{v}$ 和二阶导数 δq 在 L_2 空间的范数均足够小. 这表明，除 $r_1Q''(q)\equiv 0$（基流是刚体转动）外，扰动的势涡 (δq) 在不稳定性质方面起着重要作用. 当 $r_1Q''(q)\equiv 0$，δq 不包含在范数

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$\|\delta\phi\|_W$ 之内，但

$$\|\delta\phi\|_W^2=|\Delta^2 I|=|r_0|[k(f_0^2/\varphi_0)\|\delta\phi\|^2+\|\delta \mathbf{v}\|^2] \tag{2.19}$$

也是全空间 $\delta\phi\in W_2^2$ 的一种范数，且在所有时间 $0<t<\infty$ 它守恒。即使在此情形下，我们也能证明 $\|\delta q\|$ 的守恒性，尽管 $\|\delta q\|$ 在 $t<\infty$ 的有界性在稳定性定义中并不必要求满足。其实，由于角动量守恒，且角动量为线性泛函，故还有扰动的角动量守恒

$$\delta M\equiv\iint_S\left[\sin\theta\frac{\partial\delta\phi}{\partial\theta}-k\frac{a^2f_0^2}{\varphi_0}\cos\theta\cdot\delta\phi\right]dS=\delta M^{(0)} \tag{2.20}$$

又总势涡拟能也是守恒量

$$\|q+\delta q\|^2=\|q\|^2+2\iint_S q\,\delta q\,dS+\|\delta q\|^2=\text{常量} \tag{2.21}$$

现在，右边的首项守恒，而且由于基流相当于刚体转动，我们有

$$q=\left\{2\dot{\lambda}_z\left[1+\frac{kf_0^2}{2\varphi_0}a^2\right]+2\omega\right\}\cos\theta \tag{2.22}$$

因而从（2.22）和 δM 的守恒性可知（2.21）右边第二项的守恒性（见曾庆存，1979），最后我们就得到（2.21）右边的最后一项守恒，即 $\|\delta q\|$ 守恒。

如果 $Q''_m=0$ 但 $r_1Q''(q)\neq0$，则定义（2.15）变成（2.19），运动仍有在此意义下的稳定性。不过，此时 $\|\delta q\|^2$ 的有界性虽能通过使用不等式

$$\|\delta q\|=\|(q+\delta q)-q\|\leqslant\|q+\delta q\|+\|q\| \tag{2.23}$$

并由总势涡拟能守恒（即（2.21））推出，但不能保证在任何时间 $t<\infty$ 内 $\|\delta q\|$ 的微小性。

定理 2.3 由函数 $Q(q)$ 和参变量 r_0,r_1 和 r_2 表示并通过 $\delta I=0$ 确定的 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t)$ 为不稳定的必要条件是：或者 r_0 与 $r_1Q''(q)$ 的符号相反，或者 Q'' 在流体中是一个符号不定的函数。

证明 定理 2.3 中所提到的条件对不稳定性是必要的。否则根据定理 2.2 可知流动将是稳定的。

注 2.3 对给定 r_0，r_1，r_2 和 $Q(x)$，如果 $Q'(x)$ 不是变量 x 的线性函数，那么方程（2.13）可能有多个解，因此我们可以有几个由同样集（$r_0,r_1,r_2,Q(x)$）确定的基流。假设其中之一（例如是 $\phi(\theta,\lambda,t)$）满足如下条件：①它的 δ^2I 是正定泛函；② $Q''(q+\delta q)$ 当 $|\delta q|<\varepsilon$ 时为正定函数，当 $|\delta q|<\varepsilon$ 不满足时为变号函数，其中 q_1 是流 ϕ_1 的势涡，于是泛函 $I(\phi,\mathbf{v},q)$（即复合泛函 $I(\phi)$）在紧子空间（$\phi_1+\delta\phi$，$\mathbf{v}_1+\delta\mathbf{v}$，$q_1+\delta q$）中的点（$\phi_1,\mathbf{v}_1,q_1$）上达到极小值 I_1（如果 $\delta^2I>0$）或极大值 I（如果 $\delta^2I<0$），其中（$\delta\phi,\delta\mathbf{v},\delta q)\in C^\infty$。也许，$\phi$ 对满足 $|\delta q^{(0)}|<\varepsilon'<\varepsilon$ 的初始微扰是稳定的，但若 $|\delta q^{(0)}|<\varepsilon'$ 不满足，则在这些扰动的作用下，流动有可能从 ϕ_1 的邻域迁移到另一基流（如 ϕ_2）的邻域。

3 线性和非线性 Haurwitz 波的不稳定性

Haurwitz 波族可以由 $\delta I=0$ 得到，即由方程（2.13）确定。

定理 3.1（经典的）线性 Haurwitz 波

$$\phi-\phi_0=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta+\sum_{m=0}^{n}A_mP_n^m(\cos\theta)e^{im(\lambda-\dot{\lambda}_0t)} \tag{3.1}$$

可通过 $\delta I=0$ 由线性函数 $r_1Q'(q)=2b_2q+b_1$ 确定，此处 $P_n^m(\cos\theta)e^{im\lambda}$ 是归一化的球谐函

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

数，$A_m(m=0,1,\cdots,n)$ 是一些任意常数：

$$\left.\begin{array}{l}\phi_0=b_1/[2(r_0+b_2kf_0^2/\varphi_0)]\\ \dot{\lambda}_z=[2\omega+a^2r_2/2b_1]/[n(n+1)-2]\\ \dot{\lambda}_0=\{-2\omega+\dot{\lambda}_z[n(n+1)-2]\}/\{n(n+1)+ka^2f_0^2/\varphi_0\},\ (n=2,3,\cdots)\end{array}\right\}\quad(3.2)$$

定理的证明可直接将（3.1），（3.2）代入到（2.13）而得到。

注 3.1　对一给定的线性函数 $r_1Q'(q)$，方程（2.13）有解的充要条件是 r_0 和 b_2 满足如下条件：

$$\frac{r_0}{b_2}=-\left[\frac{n(n+1)}{a^2}+k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right],\ (n=2,3,4,\cdots)\quad(3.3)$$

这意味着对任意给定函数 r_1Q 以及任意参量 r_0 和 r_2，方程 $\delta I=0$ 不一定有解，即泛函 I 可能无驻点。

注 3.2　对由（3.1）确定的线性 Haurwitz 波，有

$$\Delta^2I=\delta^2I=r_0\iint_S\left\{\left[|\delta\mathbf{v}|^2+k\frac{f_0^2}{\varphi_0}(\delta\phi)^2\right]-\frac{(\delta q)^2}{\frac{n(n+1)}{a^2}+k\frac{f_0^2}{\varphi_0}}\right\}dS=\text{invariant}\quad(3.4)$$

这里，$\delta\phi$，$|\delta\mathbf{v}|$ 和 δq 可以不是小量，即扰动 $\delta\phi$ 可以是大振幅扰动，所以，由定理 2.3 我们得到：线性 Haurwitz 波也许是不稳定的，或者说至少是亚稳的。

Hoskins（1973）和其他许多人指出线性 Haurwitz 波

$$\phi=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta+A_mP_n^m(\cos\theta)e^{im(\lambda-\dot{\lambda}_0t)}\quad(3.1)$$

可以是稳定的或不稳定的，这依赖于 Haurwitz 波的振幅 A_m，波数 m 以及扰动的波数。然而这些结论只是在扰动由很少几个球谐函数表示时得到的，在一般情况下，即当扰动具有无限自由度时，线性 Haurwitz 波的稳定性问题仍有待解决。

现在，用 E'，P' 记能量和势涡拟能扰动，即

$$E'\equiv\frac{1}{2}(\|\delta\mathbf{v}\|^2+k(f_0^2/\varphi_0)\|\delta\phi\|^2),\quad P'\equiv\frac{1}{2}\|\delta q\|^2\quad(3.5)$$

则有（见曾庆存，1979）

$$P'=(1/a^2)N_pE'\quad(3.6)$$

因而可以重新将（3.4）写成如下形式：

$$\left(1-\frac{N_p}{N_b}\right)E'=\frac{\delta^2I}{2r_0}\quad(3.7)$$

其中

$$N_p\equiv n_p(n_p+1)+a^2kf_0^2/\varphi_0\quad(3.8)$$

$$N_b\equiv n(n+1)+a^2kf_0^2/\varphi_0\quad(3.9)$$

n_p 是扰动 $\delta\phi$ 在二维球面上的一种加权平均波数。（3.7）告诉我们：①如果初始平均尺度比基流尺度大，即 $n_p^{(0)}<n$，我们得到 $\delta^2I/2r_0>0$，而且在任何时候均有 $n_p<n$。因而当扰动能量发生逆串级即 $n_p^{(t)}<n_p^{(0)}$ 时，扰动的能量 $E'(t)$ 和势涡拟能 $P'(t)$ 同时减小，即 $E'(t)<E'(0)$，$P'(t)<P'(0)$；但当扰动能量顺串级即 $n_p^{(t)}(t)>n_p^{(0)}$ 时，扰动能量和势涡拟能同时增加，即$E'(t)>E'(0)$，$P'(t)>P'(0)$。②如果 $n_p^{(0)}>n$，我们有$\delta^2I/2r_0<0$，且在任何

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

时候均有$n_p^{(t)}>n$。因此当$n_p^{(t)}>n_p^{(0)}$时有$E'(t)<E'(0)$和$P'(t)<P'(0)$；但当$n_p^{(t)}<n_p^{(0)}$时有$E'(t)<E'(0)$和$P'(t)>P'(0)$。这些结果表明，扰动能量和势涡拟能总是同时增长或衰减。这与基流满足稳定性的充分条件的情形大不一样。其实，由线性理论（见曾庆存，1983）或由（2.9）表示的$\Delta^2 I$可知，在稳定基流情况下扰动的能量和加权势涡拟能是相互补偿的，扰动能量增加伴随着加权势涡拟能减小，或者反之。

从上面分析我们可以得出结论，相对于所有时间内有$n_p(t)<n_p^{(0)}<n$以及$\delta^2 I(0)/2r_0>0$，或$n_p(t)>n_p^{(0)}>n$以及$\delta^2 I/2r_0<0$的那些扰动，Haurwitz 波（3.1）是稳定的；但相对于其他扰动，Haurwitz 波则是不稳定的。在这种意义上说，Haurwitz 波似是亚稳的。

注 3.3　我们能找出E'的上下界。假如基流是一个由（3.1）给定的Haurwitz 波，为方便计，将它改写成$\bar{\phi}$，并将扰动$\delta\phi$改写成ϕ'，再假定初始扰动$\bar{\phi}'^{(0)}$垂直于$\bar{\phi}^{(0)}$（由$\bar{\phi}^{(0)}\perp\phi'^{(0)}$表示），且扰动角动量$M'^{(0)}=0$。否则，若有任何分量"平行于"$\bar{\phi}^{(0)}$（记作$\phi_{\parallel}'^{(0)}$），则我们可从$\phi'^{(0)}$中减去$\phi'^{(0)}_{\parallel}$，并将其并入$\bar{\phi}^{(0)}$。为方便起见，我们记

$$\phi' = \phi'_{\perp} + \phi'_{\parallel} \tag{3.10}$$

且有$\phi'^{(0)}_{\parallel}=0$。今后，我们将球面上函数$F(\theta,\lambda)$的积分记为$\langle F\rangle$，例如$\phi'^{(0)}_{\parallel}=0$就是$\bar{\phi}^{(0)}$，$\phi'^{(0)}$沿全球面的积分为零，即

$$\langle\bar{\phi}^{(0)}\phi'^{(0)}\rangle = 0 \tag{3.11}$$

受扰流$\phi=\bar{\phi}+\phi'$的能量服从

$$E(\bar{\phi}+\phi') = \bar{E} + E' + \langle\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\phi' + k(f_0^2/\varphi_0)\bar{\phi}\phi'\rangle = E^{(0)}$$

以及

$$E' + \langle\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\phi' + k(f_0^2/\varphi_0)\bar{\phi}\phi'\rangle = E^{(0)} - \bar{E} = E'^{(0)} \tag{3.12}$$

此处，$\bar{E}$是基流能量。（3.12）中第二个等式是利用（3.11）后得到的。$\delta^2 I$和M'的守恒性给出

$$E' - \frac{a^2}{N_b}P' = \frac{\delta^2 I(0)}{2r_0} = \left(1 - \frac{N_p^{(0)}}{N_b}\right)E'^{(0)} \tag{3.13}$$

$$M' \equiv \left\langle\frac{\partial\phi'}{\partial\theta}\sin\theta - k\frac{a^2 f_0^2}{\varphi_0}\phi'\cos\theta\right\rangle = M'^{(0)} = 0 \tag{3.14}$$

现在，在（3.12），（3.13）和（3.14）的约束下E'的可能最大值和最小值可以用 Lagrange 方法确立，即满足$\delta J=0$，此处

$$\begin{aligned}J = E' &+ \lambda_1\{E' + \langle\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\phi' + k(f_0^2/\varphi_0)\bar{\phi}\phi'\rangle\}\\ &+ \lambda_2\{E' - (a^2/N_b)P'\} + \lambda_3 M'\end{aligned} \tag{3.15}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是一些待定常数。通过大量仔细的运算，得到由$E'_u$和$E'_l$表示的$E'$的上界和下界如下：

$$E'_u = \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_u^2 A^2 + D_u^2 \equiv (E'_{\parallel} + E'_{\perp})_u \tag{3.16}$$

$$E'_l = \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_l^2 A^2 + D_l^2 \equiv (E'_{\parallel} + E'_{\perp})_l \tag{3.17}$$

$$E'_{u,l} - E'^{(0)} = 2\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_{u,l}^2 A^2 \tag{3.18}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $E'_\perp$ 和 $E'_\parallel$ 为扰动能量的两部分，它们分别垂直和平行于整族纯 Haurwitz 波(即在(3.1)中取 $\dot{\lambda}_z=0$)，而

$$A^2=\frac{1}{2}N_b\sum_{m=0}^{n}|A_m|^2 \tag{3.19}$$

$$\left[1-\frac{N'}{N_b}\right]_{u,e}D^2_{u,e}=\left[1-\frac{N_p^{(0)}}{N_b}\right]E'^{(0)} \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_u=1+\left(1+\frac{E'^{(0)}-D_u^2}{A^2}\right)^{1/2} \tag{3.21}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_l=1-\left(1+\frac{E'^{(0)}-D_u^2}{A^2}\right)^{1/2} \tag{3.22}$$

$$N'=n'(n'+1)+ka^2f_0^2/\varphi_0 \tag{3.23}$$

以及 n' 为整数．依赖于 $n_p^{(0)}>n$，$=n$，或 $<n$，我们有 $n'\to\infty$，$=n$ 或 $=1$．

如果 $E^{(0)}/A^2\ll1$，我们有

$$E'_u-E'^{(0)}\approx E'_\parallel\approx 4A^2 \tag{3.24}$$

$$E'^{(0)}-E'_l\approx\begin{cases}E'^{(0)}\left[\dfrac{n_p^{(0)}(n_p^{(0)}+1)-2}{n(n+1)-2}+\varepsilon\right], & (n_p^{(0)}<n)\\ \varepsilon E'^{(0)}, & (n_p^{(0)}>n)\end{cases} \tag{3.25}$$

其中，$\varepsilon>0$，$O(\varepsilon)=O(E'^{(0)}/A^2)$．

(3.24) 说明可能的最强扰动为

$$\psi'\approx-2(\bar{\psi}+a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta)$$

这意味着原来的即基流的波状流可能完全被破坏，受扰流动 ψ 变成与基流 $\bar{\psi}$ 完全反相．其次，(3.25) 则表明，由于受扰流受非线性方程控制总有一定能量保持在扰动之中．

上述结果可简示如图 2．

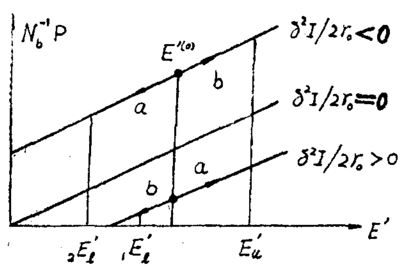

图 2　叠加于线性 Hourwitz 波上的扰动的能量 E' 和势涡拟能 P' 的演变过程．${}_1E'_l$ 和 ${}_2E'_l$ 为扰动能量的下界，分别对应于 $\delta^2I/2r_0>0$ 和 $\delta^2I/2r_0<0$ 的情况．E'_u 为扰动能量的上界，$E'_u-E'^{(0)}\approx4A^2$．a 和 b 分别表示 $n_p<n_p^{(0)}$ 和 $n_p>n_p^{(0)}$ 的情形

最后我们指出，非线性（广义）Haurwitz 波可以由（3.1）确定，其中 $Q'(q)$ 是 q 的非线性函数．根据定理（2.2），(2.3) 中所述条件，它们可以是稳定的或不稳定的．

4　地形对定常流的影响及其不稳定性

如果计入地形的影响，也有与(2,1)，(2,3)相同的方程组，但势涡度的定义不是（2,2)

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

而是下式：

$$q=\Delta\phi-k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\phi+\left(2\omega\cos\theta+\frac{f_0\varphi_s}{\varphi_0}\right) \tag{4.1}$$

其中，φ_s是地形高度的重力势．此时总能量和广义势涡拟能仍守恒，但总角动量不一定是一个守恒量，因此，我们可以仍可取由（2.4）定义的$I(\phi)$作为不变泛函，但令$r_2=0$．这说明，(2.5)—(2.19）仍然有效，但其中取$r_2=0$，且q由（4.1）定义．我们有

定理 4.1 在地形$h_s=\varphi_s/g$上的所有可能的定常基流由泛函I的驻点确定，即满足下述方程：

$$-2r_0\phi+r_1Q'(q)=0,\quad q=\Delta\phi-k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\phi+\left(2\omega\cos\theta+\frac{f_0\varphi_s}{\varphi_0}\right) \tag{4.2}$$

在地形影响之下，流动的稳定性仍可根据定理2.2和2.3来确定．

定理 4.2 若在I中取$Q=q^2$和$r_2=0$，并且，$(kf_0^2/\varphi_0+r_0/r_1)a^2\neq n(n+1)$，$n=1,2,\cdots$，即$r_0/r_1$由下式确定：

$$-\dot{\lambda}_z=2\omega\cdot\left[2+\left(k\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)a^2\right]^{-1} \tag{4.3}$$

则$\delta I=0$有解且唯一．它就是具有刚体旋转角速度$\dot{\lambda}_z$的流受地形h_s影响形成的定常流动．如果$r_0/r_1>0$，即

$$-\left(1+k\frac{f_0^2}{2\varphi_0}a^2\right)^{-1}\leqslant\frac{\dot{\lambda}_z}{\omega}<0 \tag{4.4}$$

此流动是稳定的；而流动为不稳定的必要条件是（4.4）不满足．

证明　取$Q=q^2$，$r_2=0$，$\delta I=0$，确定出定常流所满足的方程如下：

$$\Delta\phi-\left(k\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)\phi=-2\omega\cos\theta-\frac{f_0^2}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi_s}{f_0}\right) \tag{4.5}$$

其解为带有常数角速度$\dot{\lambda}_z$的带状流和由地形产生的扰动F的线性组合，即

$$\phi=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta+F \tag{4.6}$$

此处，$\dot{\lambda}_z$由（4.3）给出，而F满足如下方程：

$$\Delta F-\left(k\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)F=-\frac{f_0^2}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi_s}{f_0}\right) \tag{4.7}$$

因此，F由φ_s唯一确定，假若$(kf_0^2/\varphi_0+r_0/r_1)a^2\neq-n(n+1)$的话，$n=1,2,\cdots$．

下一步，由定理2.2可知，假设$(r_0/r_1)a^2\geqslant0$，则稳定性的充分条件是满足的．在我们这里的情形下，由$(r_0/r_1)a^2>0$，以及

$$\frac{r_0}{r_1}a^2=-\left(2+\frac{f_0^2a^2}{\varphi_0}+\frac{\omega}{\dot{\lambda}_z}\right)$$

就推出（4.4），定理得证．

注 4.1　条件

$$\left(k\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)a^2=-n(n+1),\quad n=1,2,\cdots \tag{4.8}$$

对应于共振情形．由（4.3），共振仅能在$\dot{\lambda}_z>0$（西风）时发生．在这种情况下，对给定的

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

满足（4.8）的 n，仅当地形函数 φ_s 满足正交条件

$$\iint_S \left[2\omega\cos\theta+\left(\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right)\frac{\varphi_s}{f_0}\right]P_n^m(\cos\theta)e^{im\lambda}dS=0,\quad m=0,1,2,\cdots,n \tag{4.9}$$

时，（4.5）才有解．此时解是不唯一的，它由对应于同一的 n 的所有球谐函数的任意线性组合而成，即地形对这些定常的自由波不发生作用．

注 4.2　由于 φ_s 不显含在稳定性判据（4.4）之中，初看起来，好象地形不影响不稳定性．其实不然．因若无地形，则作刚体转动的大气运动可在取 $r_1=0$ 当 $r_0\neq 0$，$n\neq 0$ 时而得到，故由定理 2.2 即知它总是稳定的．然而地形嵌入到西风带中，形成了一些定常的波状流动，于是由它们表示的基本气流就不是带状的，而和 Haurwitz 波类似，可能出现不稳定性．

注 4.3　在地球大气中，$1+(f_0^2/2\varphi_0)a^2\approx 3$．因而具有角速度 $0>\dot{\lambda}_z>-\omega/3$ 的均匀东风气流在地形作用下形成的定常运动（基流）是稳定的，但均匀西风气流（$\dot{\lambda}_z>0$）或过强的东风气流（$\dot{\lambda}_z<-\omega/3$）可能是不稳定的．

5　三维准地转模式的一般定理

此模式的基本方程就是势涡度守恒，可以写成与（2.1）相同的形式，但 q 定义如下：

$$q=\Delta\phi+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f_0^2\zeta^2}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)+2\omega\cos\theta \tag{5.1}$$

这里，$0\leqslant\zeta\leqslant 1$，$c^2\equiv\alpha R\widetilde{T}$，$\alpha=R(\gamma_a-\widetilde{\gamma})/g,\gamma_a=g/c_p,\widetilde{T}(Z)$ 和 $\widetilde{\gamma}$ 是平均温度铅直分布及其梯度．ϕ 还应满足下列两个边条件（见曾庆存，1979）：

$$E<\infty \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+k'\mathbf{v}_s\cdot\nabla\right)b=0,\quad\left(b\equiv\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_s+k\alpha_s\phi_s\right) \tag{5.3}$$

其中 E 是总能量（见下），下标 s 代表在下边界 $\zeta=1$ 上的给定函数，这里暂时略去地形影响，k 和 $k'=0$ 或 1，$k=0$ 对应于铅直平均的整层无辐散近似，$k'=0$ 对应于等熵下边界．

从势涡的守恒性和边条件（5.2），（5.3），我们有总能量E，“广义势涡拟能”F，角动量M和“广义边界能”B都守恒．在我们的研究中，不变泛函 $I(\phi)$ 就是上面提到的所有守恒量和一些参变量 r_n（$n=0,1,2,3$）的线性组合：

$$I(\phi)=2r_0E+r_1F+r_2M+2r_3B=\text{invariant} \tag{5.4}$$

其中

$$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S\left\{k\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}\phi_s^2+\int_0^1\left[|\nabla\phi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\zeta\right\}dS \tag{5.5}$$

$$F\equiv\iint_S\int_0^1 Q(q)d\zeta\, dS \tag{5.6}$$

$$M\equiv\iint_S\left\{-k\frac{f_0^2\alpha_s a^2}{c_s^2}\phi_s+\int_0^1 v_\lambda a\sin\theta\, d\zeta\right\}dS \tag{5.7}$$

$$B\equiv\iint_S G(b)dS \tag{5,8}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

G 是变量 b 的任意函数. 求一阶和二阶变分，得

$$\delta I=\iint\limits_S\int_0^1\left[-2r_0\phi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta\right]\delta q\,d\zeta\,dS$$

$$+\iint\limits_S\left\{r_3G'(b)+\frac{f_0^2}{c_s^2}(2r_0\phi_s-r_2a^2\cos\theta)\right\}\left[\left(\frac{\partial\,\delta\phi}{\partial\zeta}\right)_s+k\alpha_s\delta\phi_s\right]dS \tag{5.9}$$

$$\delta^2I=\iint\limits_S\int_0^1\left\{r_0\left[|\nabla\delta\phi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\ \frac{\partial\,\delta\phi}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q)(\delta q)^2\right\}d\zeta\,dS$$

$$+\iint\limits_S\left\{r_0k\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}(\delta\phi_s)^2+\frac{1}{2}r_3G''(b)(\delta b)^2\right\}dS \tag{5.10}$$

而

$$I(\phi+\delta\phi)-I(\phi)=\delta I+\Delta^2I \tag{5.11}$$

其中

$$\Delta^2I=\iint\limits_S\int_0^1\left\{r_0\left[|\nabla\delta\phi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\ \frac{\partial\,\delta\phi}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}d\zeta\,dS$$

$$+\iint\limits_S\left\{r_0k\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}(\delta\phi_s)^2+\frac{r_3}{2}G''(b^*)(\delta b)^2\right\}dS \tag{5.12}$$

$$q^*=q+r^*\delta q,\ 0\leqslant r^*\leqslant 1;\qquad b^*=b+r^{**}\delta b,\ 0\leqslant r^{**}\leqslant 1$$

定理 5.1 每一个满足三维准地转模型 (5.1) 以及边条件 (5.2)，(5.3) 的函数 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t,\zeta)$ 是 $I(\phi)$ 的驻点，且满足如下方程和边条件：

$$-2r_0\phi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta=0 \tag{5.13}$$

$$E<\infty \tag{5.14}$$

$$r_3G'(b)+\frac{f_0^2}{c_s^2}(2r_0\phi_s-r_2a^2\cos\theta)=0 \tag{5.15}$$

其中 G 和 Q 是两个给定的函数，r_n 是一些参量，$n=0,1,2,3$，相角速 $\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$。逆定理亦真.

定理 5.1 的证明基本上与定理 2.1 相同.

定理 5.2 一个由函数 $Q(q)$，$G(b)$ 和参量 $r_n(n=0,1,2,3)$ 通过 $\delta I=0$ 确定的三维基流函数 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t,\zeta)$，若其 $r_0,r_1Q''(q)$，$r_0k\alpha_s/c_s^2$ 和 $r_3G''(b)$ 都是非正的或都非负的，则对任何小扰动都是稳定的.

定理 5.3 基流 $\phi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t,\zeta)$ 为不稳定的必要条件是：或者 r_0,r_1Q''，$r_0k\alpha_s/c_s$ 和 r_3G'' 没有同样的符号，或者 Q'',G'' 是非定号函数.

定理 5.2 和定理 5.3 的证明也基本上与定理 2.2 和 2.3 的证明相同，但需取三维 L_2 空间的范数 $\|\cdot\|_{3W}$ 和三维 Sobolev 空间范数 $|\cdot|_{3W}$. 和 (2.15) 类似，今取

$$\|\delta\phi\|_{3W}^2=\left|r_0k\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\phi_s\|^2+\left|\frac{1}{2}r_3G''_m\right|\cdot\|\delta b\|^2+|r_0|\cdot\|\nabla_3\delta\phi\|_3^2$$

$$+\left|\frac{1}{2}r_1Q''_m\right|\cdot\|\delta q\|_3^2 \tag{5.16}$$

其中 $\|\cdot\|$ 与 (2.15) 中所定义的一样，即为定义在半径为 a 的球面上的 L_2 空间的范数；

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$|Q''_m|$ 和 $|G''_m|$ 分别是 $|Q''(q^*)|$ 和 $|G''(b^*)|$ 的下界，即

$$|Q''(q^*)|_{\delta\phi\in S_c}\geqslant Q_m,\quad |G''(b^*)|_{\delta\phi\in S_c}\geqslant G_m \tag{5.17}$$

而 ∇_3 则是准三维梯度算子：

$$\nabla_3\delta\phi\equiv\nabla\delta\phi+\mathbf{k}^0\left(\frac{f_0\zeta}{c}\right)\frac{\partial\delta\phi}{\partial\zeta} \tag{5.18}$$

其范数 $\|\nabla_3\delta\phi\|_3$ 定义如下：

$$\|\nabla_3\delta\phi\|_3^2=\|\nabla\delta\phi\|_3^2+\left\|\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\zeta}\right\|_3^2=\|\delta\mathbf{v}\|_3^2+\left\|\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\zeta}\right\|_3^2 \tag{5.19}$$

于是我们有

$$\|\delta\phi\|_{3W}^2\leqslant|\Delta^2I^{(0)}|,\quad(0\leqslant t<\infty) \tag{5.20}$$

因而当 $|\Delta^2I^{(0)}|<\delta$ 时，在所有时间内有 $\|\delta\phi\|_{3W}^2<\delta$.

定理 5.2 的几何表示与图 1 类似.

注 5.1　在三维斜压大气中的所有 Haurwitz 波族可由 $\delta I=0$ 确定，同时，我们也可以得到与第三节类似的结论．斜压 Haurwitz 波已在一些文献中给出(例如见曾庆存，1979).

注 5.2　在下边界为等势温面情况下，三维准地转模式的定常基流的不稳定性判据，曾由 Blumen (1968) 求得，显然它是我们求得的普遍判据的特例．其次，当下边界不是等势温面时，Blumen (1978) 和 Zeng (1983) 曾求得线性化模式和带状基流的稳定性判据，它同样也是此处我们给出的普适判据的特例．然而必须指出，只有用我们的方法并取 $r_2\neq0$ 才能得到非定常基流（斜压大气中线性或非线性 Haurwitz 波）的不稳定性判据.

注 5.3　当考虑到地形影响时，势涡度守恒和(5.1)—(5.3)同样成立，只不过此时有

$$b\equiv\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_s+k\alpha_s\phi_s+\alpha_sf_0^{-1}\varphi_s \tag{5.21}$$

这里 $Z_s(\theta,\lambda)=\varphi_s(\theta,\lambda)/g$ 是地形高度．有地形影响时角动量守恒不再成立．我们有与第 4 节相似的结论．定理 5.1，5.2 和 5.3 也都有效．但此时应取 $r_2=0$，因而由地形影响产生的定常流能通过 $\delta I=0$ 而得到，而且，地形对稳定性的影响通过 $G''(b)$ 直接进入判据之中.

6　正压原始方程组

基本方程组就是大家熟知的浅水波方程组，但写在旋转球面上，并且要计入 Coriolis 力．这组方程可以变换成

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}-\varphi q v_\lambda=-\frac{\partial K}{a\partial\theta} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}+\varphi q v_\theta=-\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla q=0 \tag{6.3}$$

其中

$$K=\varphi+\frac{1}{2}(v_\theta^2+v_\lambda^2) \tag{6.4}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$q=\frac{1}{\varphi}\left\{\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right)+2\omega\cos\theta\right\} \tag{6.5}$$

而 φ 是自由表面的重力势．容易证明方程组（6.1）—（6.5）等价于流体力学和动力学气象学中所普遍使用的该模式的方程组，其实，连续方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\varphi\mathbf{v}=0 \tag{6.6}$$

可以很容易地由（6.1），（6.2）和势涡度守恒式（6.3）联立而得到，假如 $q\neq 0$ 的话．（6.6）中 $\nabla\cdot(\quad)$ 是在半径为 a 的球面上的二维散度算子．

此模式亦有质量、角动量、能量和广义势涡拟能守恒，于是可构造不变泛函如下：

$$2I(\mathbf{v},\varphi)=2r_0E+r_1F+2r_2M+r_3Ma \tag{6.7}$$

其中

$$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S[\varphi|\mathbf{v}|^2+\varphi^2]dS \tag{6.8}$$

$$F\equiv\iint_S\varphi Q(q)dS \tag{6.9}$$

$$M\equiv\iint_S\varphi a(v_\lambda+a\omega\sin\theta)\sin\theta\, dS \tag{6.10}$$

$$Ma\equiv\iint_S\varphi dS \tag{6.11}$$

$Q(q)$ 是自变量 q 的任意函数．q 是 $\mathbf{v},\varphi$ 的函数．为方便起见，我们用 δq 记 $q(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}\varphi,+\delta\varphi)$ 和 $q(\mathbf{v},\varphi)$ 之间的差．即

$$\begin{aligned}\delta q&\equiv q(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v},\ \varphi+\delta\varphi)-q(\mathbf{v},\varphi)\\&=\frac{1}{\varphi+\delta\varphi}\left[\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\right]-q\frac{\delta\varphi}{\varphi+\delta\varphi}\end{aligned} \tag{6.12}$$

我们有

$$\delta q=\delta^1q+\delta^2q+\cdots \tag{6.13}$$

$$\delta q=\delta^1q+\Delta^2q \tag{6.14}$$

其中

$$\delta^1q=\frac{1}{\varphi a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)-q\frac{\delta\varphi}{\varphi} \tag{6.15}$$

$$\delta^2q=\frac{-1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\frac{\delta\varphi}{\varphi}+q\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)^2=-\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)\delta^1q \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2q=\delta q-\delta^1q=\frac{\delta\varphi}{\varphi}&\left[\left(\frac{-1}{\varphi+\delta\varphi}\right)\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\right.\\&\left.+q\frac{\delta\varphi}{\varphi+\delta\varphi}\right]=-\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)\delta q\end{aligned} \tag{6.17}$$

利用公式（6.15）—（6.17），可以得到泛函 I 的一阶和二阶变分如下：

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$2\delta I=\iint_S\Big\{\Big[r_0(2\varphi+|\mathbf{v}|^2)+2r_2(v_\lambda+a\omega\sin\theta)a\sin\theta+r_1(Q-qQ')+r_3\Big]\delta\varphi$$

$$+\Big[r_0 2\varphi v_\theta+r_1Q''\frac{\partial q}{a\sin\theta\partial\lambda}\Big]\delta v_\theta+\Big[r_0 2\varphi v_\lambda+2r_2\varphi a\sin\theta-r_1Q''\frac{\partial q}{a\partial\theta}\Big]\delta v_\lambda\Big\}dS \quad (6.18)$$

$$2\delta^2I=\iint_S\Big\{\Big[r_0\Big[\varphi|\delta\mathbf{v}|^2+(\delta\varphi)^2+2\delta\varphi\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}\Big]+r_1\Big[\frac{\varphi}{2}Q''(q)(\delta^1q)^2+Q'(q)(\varphi\delta^2q$$

$$+\delta\varphi\delta^1q)\Big]+2r_2a\,\delta\varphi\,\delta v_\lambda\sin\theta\Big\}dS$$

$$=\iint_S\Big\{r_0\varphi\Big[dv_\lambda+\Big(v_\lambda+a\frac{r_2}{r_0}\sin\theta\Big)\frac{\delta\varphi}{\varphi}\Big]^2+r_0\varphi\Big[\delta v_0+v_0\frac{\delta\varphi}{\varphi}\Big]^2$$

$$+r_0\Big(1-\frac{(v_\lambda+ar_0^{1}r_2\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi}\Big)[\delta\varphi]^2+r_1\frac{\varphi}{2}Q''(q)[\delta^1q]^2\Big\}dS \quad (6.19)$$

$I(\mathbf{v}|\delta\mathbf{v},\varphi+\delta\varphi)$ 和 $I(\mathbf{v},\varphi)$ 之间的差由下式给出：

$$I(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v},\varphi+\delta\varphi)-I(\mathbf{v},\varphi)=\delta I+\delta^2I+\cdots \quad (6.20)$$

或

$$I(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v},\varphi+\delta\varphi)-I(\mathbf{v},\varphi)=\delta I+\Delta^2 I \quad (6.21)$$

其中

$$2\Delta^2I=\iint_S\Big\{r_0\Big[\varphi^{**}|\delta\mathbf{v}|^2+(\delta\varphi)^2+2\delta\varphi(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v})\Big]+r_1\Big[\frac{1}{2}\varphi^{**}Q''(q^*)(\delta q)^2$$

$$+\varphi Q'(q)\Delta^2q+Q'(q)\delta\varphi\delta q\Big]+2r_2a\,\delta\varphi\,\delta v_\lambda\sin\theta\Big\}dS$$

$$=\iint_S\Big\{r_0\varphi^{**}\Big[\delta v_\lambda+(v_\lambda+ar_2r_0^{-1}\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\Big]^2$$

$$+r_0\varphi^{**}\Big[\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\Big]^2+r_1\frac{\varphi^{**}Q''(q^*)}{2}[\delta q]^2$$

$$+r_2\Big(1-\frac{(v_\lambda+ar_2r_0^{-1}\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi^{**}}\Big)[\delta\varphi]^2\Big\}dS \quad (6.22)$$

$$(\varphi^{**}\equiv\varphi+\delta\varphi,\quad q^*=q+r^*\delta q,\quad 0\leqslant r^*\leqslant 1)$$

(6.22) 与 (6.19) 在系数上不一样，在 (6.22) 右端的积分号下 φ 和 $Q''(q)$ 分别由 φ^{**} 和 $Q''(q^*)$ 所代替，这是由于

$$(\varphi+\delta\varphi)|\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}|^2=(\varphi+\delta\varphi)(|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}+|\delta\mathbf{v}|^2)=\varphi|\mathbf{v}|^2$$

$$+[|\mathbf{v}|^2\delta\varphi+2\varphi\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}]+[2\delta\varphi\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}+\varphi^{**}|\delta\mathbf{v}|^2]$$

$$(\varphi+\delta\varphi)Q(q+\delta q)=(\varphi+\delta\varphi)\Big[Q(q)+Q'(q)\delta q+\frac{1}{2}Q''(q^*)(\delta q^2)\Big]=\varphi Q(q)$$

$$+[Q(q)\delta\varphi+\varphi Q'(q)\delta^1q]+\Big[\varphi Q'(q)\Delta^2q+Q'(q)\delta\varphi\delta q+\frac{1}{2}\varphi^{**}Q''(q^*)(\delta q)^2\Big]$$

定理 6.1 原始方程组 (6.1)—(6.3) 的每一行波解集 ($v(\theta,\lambda-\dot\lambda_0t)$, $v(\theta,\lambda-\dot\lambda_0t)$, $\varphi(\theta,\lambda-\dot\lambda_0t)$) 对应于泛函空间 $(\mathbf{v},\varphi)$ 中 $I(\mathbf{v},\varphi)$ 的一个驻点，且可由如下方程组确定：

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$2\Phi \equiv 2r_0\left[K+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta(v_\lambda+a\omega\sin\theta)\right]=-r_1(Q-qQ')-r_3 \tag{6.23}$$

$$\varphi q v_\theta=-\frac{\partial\Phi}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.24}$$

$$\varphi q\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)=\frac{\partial\Phi}{a\partial\theta} \tag{6.25}$$

其中设 $r_0\neq0$，而相速度 $\dot{\lambda}_0=-r_2/r_0$。逆定理亦真。

证明　设 $(\mathbf{v}(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t),\ \varphi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t))$ 是方程组 (6.1)，(6.3) 的解，将其代入 (6.1)—(6.3)，因此时有 $\partial/\partial t=-\dot{\lambda}\partial/\partial\lambda$，故有

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}-\varphi q\,v_\lambda=-\frac{\partial K}{a\partial\theta} \tag{6.26}$$

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\varphi q\,v_\theta=-\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.27}$$

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\mathbf{v}\cdot\nabla q=0 \tag{6.28}$$

若按 (6.23) 中第一个等式定义函数 Φ，且令 $r_2/r_0=-\dot{\lambda}_0$ 和 $r_0=1$，就有

$$-\frac{\partial K}{a\partial\theta}=-\frac{\partial\Phi}{a\partial\theta}-\dot{\lambda}_0\varphi qa\sin\theta-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda},\quad -\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda}+\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}=-\frac{\partial\Phi}{a\sin\theta\partial\lambda}$$

将其代入 (6.26)，(6.27) 就推得 (6.24)，(6.25)。其次，由 (6.26) 和 (6.27) 我们还有

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\nabla q&=\left(\frac{\partial\Phi}{\varphi qa\partial\theta}+\dot{\lambda}_0a\sin\theta\right)\frac{\partial q}{a\sin\theta\partial\lambda}-\left(\frac{\partial\Phi}{\varphi qa\sin\theta\partial\lambda}\right)\frac{\partial q}{a\partial\theta}\\&=\frac{1}{\varphi q}J(\Phi,q)+\dot{\lambda}_0\frac{\partial q}{\partial\lambda}\end{aligned} \tag{6.29}$$

将其代入 (6.28) 后得到

$$\left(\frac{1}{\varphi q}\right)J(\Phi,q)=0 \tag{6.30}$$

因此，2Φ 是以 q 为自变量的函数，记作 $\Phi(q)$。至于函数 $r_1Q(q)$，则可通过求解下列常微分方程得到：

$$r_1[Q(q)-qQ'(q)]-r_3=2\Phi(q) \tag{6.31}$$

此处，r_1,r_3 为常数，$r_1\neq0$。因此，(6.23) 也满足。定理得证。

下面我们来证明逆定理。设函数 $(\mathbf{v},\varphi)$ 满足方程组 (6.23)—(6.25)。按 (6.23)，可用 K 和 $\mathbf{v}$ 表达 Φ，于是由 (6.24) 和 (6.25)，就得 (6.26) 和 (6.27)，且有 $\dot{\lambda}_0=-r_2/r_0$。

接着，由 (6.24) 和 (6.25) 我们就可以得到 (6.29)。此外，(6.23) 中的第二个等式意味着 2Φ 是变量 q 的函数，从而 $J(\Phi,q)=0$。这样一来，由 (6.29) 也就推得 (6.28)。所有这些就表明函数 $(\mathbf{v},\varphi)$ 确实构成方程组 (6.1)—(6.3) 的行波解，并且 $\dot{\lambda}_0=r_2/r_0$。

注 6.1　尽管在曾庆存 (1979) 的书中没有用到变分原理，为了寻找原始方程组的定常特解，书中已经得到了相应于 $r_2=0$ 时方程组 (6.23)—(6.25)；书中并发展了一种类似于

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

求解 $r_2\neq 0$ 时的方程组（6.23）—（6.25）的方法，以得到广义的 Haurwitz 波. 广义的 Haurwitz 波是原始方程组的解，是第 3 节中的经典 Haurwitz 波的修正. 一些这样的特解可以在曾庆存的书以及曾庆存、张学洪和袁重光（1985）的文章中找到.

注 6.2 对于给定集合（r_0,r_1,r_2,r_3 和 $Q(q)$），可由方程 $\delta I=0$ 得到方程组（6.1）—（6.3）的解（$\mathbf{v},\varphi$）. 利用该解并重复定理 6.1 中的步骤，我们就可由（6.31）构造 $r_0\neq 0$ 的新函数 $Q(q)$，这就意味着在不失普适性的情况下，我们总可取 $r_0\neq 0$. 此外在不失普适性的情况下，我们也可取 $r_0=r_1=1$，因为 r_1 在 Q 中可看成一个系数，并且 $r_1=0$ 等价于 $Q\equiv 0$.

定理 6.2 由 $\delta I=0$ 确定的流动，对于能使 $\Delta^2 I$ 是（$\delta\mathbf{v},\delta\varphi,\delta q$）的定号泛函的扰动子空间而言是稳定的；但对于补空间而言可能是不稳定的.

定理 6.2 的证明与定理 2.2，2.3 的证明基本相同. 特别地，如果对一给定的扰动（$\delta\mathbf{v}$，$\delta\varphi$），其 $Q''(q^*)$ 和 φ^{**} 分别有下界 Q''_m 和 φ_m，且满足

$$Q''(q^*)\geqslant Q_m\geqslant 0 \tag{6.32}$$

$$\varphi^{**}\geqslant\varphi_m,\varphi_m\geqslant(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)^2+v_\theta^2 \tag{6.33}$$

则对所有 $t\geqslant 0$，我们能取 $\Delta^2 I$ 或更简单地取

$$\|\delta\mathbf{v},\delta\varphi\|_W=\varphi_m\left[\left\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|^2+\left\|\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|^2\right]$$

$$+(1-\mathrm{Fr}_m)\|\delta\varphi\|^2+\frac{1}{2}\varphi_m Q''_m\|\delta q\|^2 \tag{6.34}$$

作为 Liapounoff 范数，并有

$$\|\delta\mathbf{v},\delta\varphi\|_W^2\leqslant\Delta^2 I^{(0)} \tag{6.35}$$

此处，Fr_m 是 Froude 数的上界，

$$\mathrm{Fr}_m=\max\left(\frac{[v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta]^2+v_0^2}{\varphi^{**}}\right) \tag{6.36}$$

且取 $r_0=r_1=1$. 如果 $\mathrm{Fr}_m<1$，则 $\|\delta\varphi\|^2$，$\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\lambda\cdot\sin\theta)\delta\varphi/\varphi^{**}\|^2$ 和 $\|\delta v_\theta+v_\theta\delta\varphi/\varphi^{**}\|^2$ 的一致有界性通过（6.35）就可以得到保证，进而还可求得 $\|\delta v_\theta\|^2$ 和 $\|\delta v_\lambda\|^2$ 的一致有界性. 其实，我们有

$$\|\delta v_\lambda\|=\left\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}-(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|$$

$$\leqslant\left\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|+\left\|(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|$$

$$\leqslant\left\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|+\|(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\|\frac{1}{\varphi_m}\|\delta\varphi\|$$

$$\|\delta v_\theta\|\leqslant\left\|\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\right\|+\|v_\theta\|\frac{1}{\varphi_m}\|\delta\varphi\|$$

取了 $r_0=r_1=1$ 之后，不稳定性的必要条件是以下条件中之一：①$Q''(q^*)$ 不是一个非负函数，即在一些区域中，

$$Q''(q^*)<0 \tag{6.37}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

或者，②存在一些区域，在其内有

$$1-\frac{(v_\lambda - a\dot{\lambda}_0\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi^{**}}<0 \tag{6.38}$$

注 6.3 根据线性化模式的理论(曾,1979,1986)在基流为带状的且为定常的情况下，不稳定性可分为三类条件：(6.37) 给出正压不稳定和惯性不稳定（对称不稳定是它的特例)；条件 (6.38) 则给出超临界高速不稳定，此种不稳定首先由 Lin (1955年) 在空气动力学中给出，继由曾庆存 (1962，未发表的文章) 在旋转一维浅水模式中给出，后又被 Blumen (1970) 和 Satomura (1981) 推广到二维无 Coriolis 力的浅水模式，而曾庆存 (1979) 则推广到有 Coriolis 力的二维情况.

注 6.4 在带状且定常基流情形下，不稳定性存在的必要条件 (6.37) 和 (6.38) 基本上与线性理论相同，但量上稍有不同. 在非线性情况下，我们有 (6.38)，而在线性情况下，由 $\delta^2 I$ 的分析或由以前的线性理论 (曾，1979，1986) 结果则有

$$1-\frac{(v_\lambda - a\dot{\lambda}_0\sin\theta)^2}{\varphi}<0 \tag{6.39}$$

对比 (6.39) 与 (6.38) 可知，当 $Q''>0$ 时（这时只可能发生超临界高速不稳定性)，非线性理论给出的存在超临界高速不稳定性的区域要比线性理论预计的要大. 其实，如果带状定常基流处于临界稳定状态附近，则一个微小的但却是负的 $\delta\varphi$ 可能使条件(6.38)得到满足，因而基流稳定性可能遭到破坏. 相似的考虑也能应用到正压不稳定和惯性不稳定的分析上. 这个例子告诉我们考虑非线性的重要性，尽管乍一看起来线性化方程对于微小扰动而言是有效的.

(未完待续)

VARIATIONAL PRINCIPLE OF INSTABILITY OF ATMOSPHERIC MOTIONS (I)

Zeng Qing-cun

Laboratory of Numerical Modelling for Atmospheric Sciences and GFD, Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.