第22卷 第2期 力学进展 Vol. 22 No. 2
1992年5月25日 ADVANCES IN MECHANICS May 25, 1992

计算力学的有限元线法*

袁驷
清华大学土木系，北京（邮政编码100084）

提要 本文对新近提出的有限元线法作一简介，对其正在取得的进展及发展前景作了评述及展望。

关键词 线法；有限元线法；常微分方程；求解器；半解析；计算力学

1 引言

有限元线法（FEMOL：Finite Element Method of Lines）是一种新型的以常微分方程（ODE：Ordinary Differential Equation）求解器（solver）为支撑软件的半解析数值方法[1-5]。在这种方法中，首先利用有限元技术，并借助于能量泛函的变分，将控制偏微分方程半离散化为用结线函数表示的常微分方程组（ODEs），然后选用高质量的ODE求解器直接求解，得到满足用户预先指定的误差限的ODE解答，以此作为原问题的近似解。

乍看起来，FEMOL似无太新之处。但该法中两项普通而又关键的技术，即ODE求解器及有限元（FE：Finite Element）的应用，使得该法成为一种颇具吸引力及竞争力的新方法。回顾有限元法（FEM）的创立发展，也是两项普通而关键的技术，即单元插值及计算机的应用，使FEM得到了革命性的推动与发展。FEMOL的提出同历史上的FEM的出现颇有相似之处：它们都是时代的产物，是随着计算机的出现及计算求解技术的发展而自然而然地被提出来的。

FEMOL兼有其他一些数值方法，诸如康托洛维奇法[40]、线法[22-35]、有限条法[36-38]和有限元法[39]等方法的特征。以下对FEMOL与上述这些方法的异同作一简要比较。

①康托洛维奇法 此法使用解析函数或整体多项式进行半离散化；而FEMOL采用分段多项式进行半离散化，从而大大地增加了方便灵活性。

②线法（MOL：Method of Lines） MOL使用有限差分进行半离散化；而FEMOL使用有限元进行半离散化。这一离散手段的更替，使得有限元法中的参数单元映射的技巧很自然地在FEMOL中得以实现，从而可以较理想地用于求解非规则区域的问题。

---

* 国家自然科学基金青年基金课题。

③有限条法（FSM：Finite Strip Method） FSM事先假定结线函数的变化形式（如三角级数、梁的振型函数、样条函数等）；而FEMOL对结线函数的选取不加任何事先的限制与假定，而是通过对ODEs的求解而达到最优选取。此外参数FEMOL元也是有别于经典有限条的一重要方面。

④有限元法（FEM：Finite Element Method） FEM是全离散法，离散化为以结点值为基本未知量的代数方程组；而FEMOL则是半离散法，半离散化为以结线函数为基本未知量的ODE体系。FEMOL在很大程度上保留了FEM对边界条件、载荷形式、几何区域及材料性质诸方面处理上的灵活性，简化了网格划分及数据输入的工作，同时又在一定程度上提高了求解精度。

至于FEMOL与其他方法，如边界元法、加权残值法（包括配点法、配线法、最小二乘法等）等等在作法上有较大的不同，这里不一一提及对比。

2 ODE求解器

没有计算机的出现就没有FEM；没有ODE求解器的问世也就没有所提出的FEMOL。早在1975年，Keller[41]在其著名专著中预言到："各种迹象相当清楚地表明，再有10年或更早，求解ODE边值问题的标准计算机软件程序便会问世"。事实证明这一预言是正确的。自70年代末80年代初以来，一系列的ODE通用求解程序相继问世并在不断更新；如国际上较为知名的版本有：PASVA4[42]，BOUNDS[43]，COLSYS[44,45]，SUPORT[47]以及NAG Library[48]等等。这些ODE求解器均是由专门从事ODE数值计算及软件开发的数学家们研制的，并经过广泛的使用及鉴定，尽管各有所长或所短，但总的来讲质量高，功能强，过得硬（robust）；尤其是自适应求解，可以满足用户预先对解答精度所指定的误差限，因而对一般的ODE问题，均能给出数值解析解的精度。

这些高质高效的ODE求解器的出现，为计算力学中的半解析法装备了强有力的武器。首先获益的是MOL。MOL用离散的平行规则线代替差分法中的网点，线之间的微分运算以差分算子代替，而线方向的解任其未知且连续，最后归结为对一组ODE的求解，精度自然比差分法高，是差分法的发展。苏联和欧美对该法几十年的研究没有造成声势，主要受阻于两个难点：①ODEs的求解；②规则区域的局限。ODE求解器的出现解决了第一个难点，使传统的MOL正在得到重新认识与定义，正在得到日益广泛的应用[34,36,10,11]。FEMOL正是在这样的背景下，为了解决MOL中难点②而提出来的。关于FEMOL中有限元技术的应用将在下一节作专门讨论。

在目前的MOL和FEMOL中使用最多的ODE求解器是COLSYS（该程序已由笔者引进）。这里对其作一简介，以说明标准的ODE求解器的功效，而详细介绍见[44,45,21]。COLSYS程序以样条高斯配点法直接求解ODEs。程序含有约3000条FORTRAN语句，可在PC(Personal Computer)机上运行。主要特点有：①允许混合阶ODEs，最高达4阶；②可解线性及非线性ODEs，且非线性求解功能较强，能解一些非线性很强的ODE问题；③高斯配点不但精度高，而且即使ODE中含有奇异项（如$1/x$，$1/r$）也可直接使用求解；④具有可靠的误差估计、误差重分布以及网格自适应调节以满足误差限等功能；⑤接受多点边值条件，即边界条件不必非定义在区间的两端点，可以在区间内部；⑥解函数及各阶导数是连续的，因此可以得到任意点的解值。

总之，COLSYS使用方便，性能较好，功能较强，对MOL及FEMOL来讲是个较好的支撑软件程序。本文中的算例均是用单精度的COLSYS在PC机上计算的。

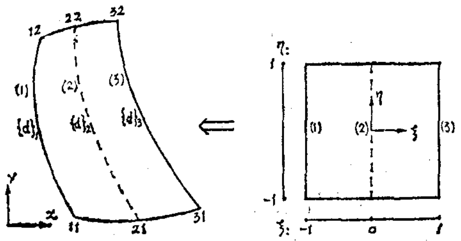


图1 2次参数FEMOL元映射

3 参数FEMOL单元

这里仅以C^0问题的参数FEMOL单元为例说明其作法[2]。图1所示为一个FEMOL元由局部坐标到整体坐标的映射。这是一个典型的曲线曲边单元。单元的映射关系为

$$x=\sum_{i=1}^{P+1}N_i(\xi)x_i(\eta),\qquad y=\sum_{i=1}^{P+1}N_i(\xi)y_i(\eta) \tag{1}$$

其中$N_i(\xi)$为P次Lagrange多项式。第i条结线由$(x_i(\eta),\ y_i(\eta))$所描述；可以为直线、2次、3次曲线或更为任意的曲线。由于在参数单元的列式中要用到$x'_i(\eta)$及$y'_i(\eta)$，因此对于任意的曲结线，我们采用具有连续的2阶导数的3次样条函数插值来近似。

单元上的位移$\{u\}$在结线上设为未知且连续的η的函数，在结线之间用与坐标变换相同的形函数$N_i(\xi)$插值而成，即

$$\{u\}=[N]\{d\}^e \tag{2}$$

$$\{d\}^e=\{\{d\}_1\{d\}_2\cdots\{d\}_{P+1}\}^T \tag{3}$$

其中$\{d\}^e$表示单元结线位移矢量；$\{d\}_i$表示第i条结线上的位移矢量，依问题的不同而含有不同的自由度。与FEM中作法相似：将单元上的位移矢量$\{u\}$代入势能泛函得到单元的势能$\Pi^e(\{d\}^e)$，再将各单元的贡献集成起来构成结构的总势能$\Pi(\{d\})=\sum\limits_e\Pi^e(\{d\}^e)$；最后对总势能泛函取一阶变分并令其为零则可导出如下形式的一组ODE

$$[A]\{d''\}+[G]\{d'\}+[H]\{d\}+\{F\}=\{0\} \tag{4}$$

及与此相应的边界条件。式中$'$表示对η的导数；在一般情况下$[A]$，$[G]$，$[H]$均是η的函数；且$[A]$为一小规模的对称正定矩阵。尽管式（4）是一组2阶变系数ODE，对ODE求解器来讲并不比常系数ODEs求解困难，配以适当的边界条件可直接求解。

一系列的FEMOL单元已经得到初步建立；包括：Poisson方程的参数元[1,3]、弹性力学平面问题的参数元[2,8]、薄板弯曲的矩形元[6]、中厚板（Mindlin板）弯曲的参数元[6]、中厚扁壳的参数元[7]等等。这些单元均取得了令人满意的效果。一个包含所有上述单元的名为FEMOL90的程序软件初步得到开发[7]。

4 ODE技巧

FEMOL是一种半解析法，最后归结为ODE问题的求解，因此对于各种类型、各种形态的力学问题都要从ODE的角度去考虑和处理。FEM中代数特征值问题在FEMOL中为ODE特征值问题；FEM中非线性代数方程组问题在FEMOL中为非线性ODE问题。因此FEM中的算法不能全部照搬，FEMOL必须结合现有的ODE求解器的水平同时又着眼于未来的发展状况，而建立发展自己的有效手段及计算方法。

笔者[9]提出了3种有用的ODE技巧，并以1维问题为例说明了如何利用这些ODE技巧

将各种不同形态的问题，如特征值、几何非线性、弹塑性、弹性接触及优化设计等问题转换为标准的非线性ODE问题．这些ODE技巧一方面在理论分析上使各种ODE问题在形式上得到了统一；另一方面在实际应用中则可以直接利用现有的ODE求解器的非线性求解功能求解各类力学问题．以下对这3种ODE技巧作一简介．

①平凡ODE技巧　这种技巧是对某些未知待定的物理常数 α（如特征值、拉氏乘子、应力强度因子、弹塑性交界点的坐标值等）建立形如 $\alpha'=0$ 的平凡（trivial）ODE，从而在保证 α 为常数的前提下将其引入ODEs中去求解．这一技巧已成功地应用于处理特征值、拉氏乘子、弹塑性交界点等未知常数的确定[11-17,20]．

②区间映射技巧　这种技巧将非规则甚至于不定的求解区间映射（interval mapping）为确定的标准区间．如 $t=(x-a)/(\xi-a)$ 可将不定区间 $[a,\xi]$（ξ 为未知待定）映射到确定的区间 $[0,1]$ 上，使ODE有了明确的定义域．这一技巧已成功地应用于处理弹塑性问题、接触问题、优化设计问题中交界点的位置[13-17]．

③等价ODE技巧　这种技巧是将积分式

$$C=\int_a^b F(t;\{y(t)\})dt \tag{5}$$

化为如下的等价ODE问题：

$$R'(x)=F(x;y\{y(x)\}) \tag{6a}$$

$$R(a)=0,\qquad R(b)=C \tag{6b}$$

这一技巧已成功地应用于处理特征函数的归一化条件等[11,12,15-17]．

总之，这些ODE技巧未必是最佳技巧，但结合利用现有的ODE求解器，确实可使FEMOL方便有效地解决一大类特殊问题．

5　数值例

本节引用几个FEMOL的数值算例，以说明该法出色的精度与效力．

例1　Motz问题（Ⅲ型裂纹问题）[3]　问题的描述见图2．u 的导数在裂纹尖端有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性．结线取射线方向，分别用线性及2次元计算（均为9条结线）．计算结果同解析解[49]在裂纹尖端附近的比较示于图3．可以看出，只用9条线的FEMOL结果具有

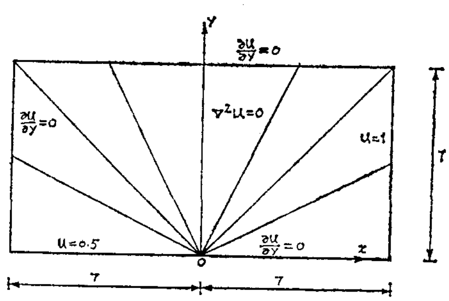


图2　Motz问题及FEMOL网格

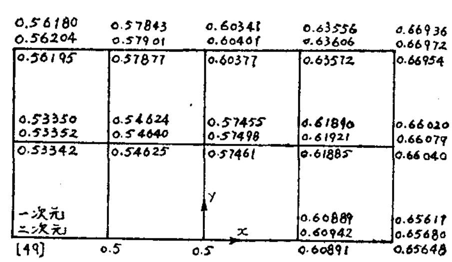


图3　裂纹尖端附近的解答 u

相当高的精度．

例2　方形截面柱体的弹塑性扭转[13]　参照图4，在弹性区采用线性元，其单元上端

边位置待定，相当于待定边界问题。应用平凡ODE及区间映射技巧。用 COLSYS 求解迭代5—6次即可。弹塑性边界的解答见图5。

例 3 开小孔的平板（平面应力问题）[2,7] 问题的描述及3次元网格划分见图6。为了与精确解[51]比较，取 $L/r=10,20$。结果见表1。

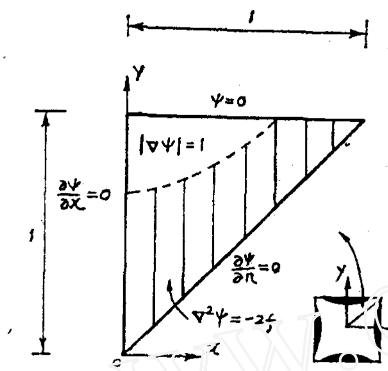


图4 方形截面

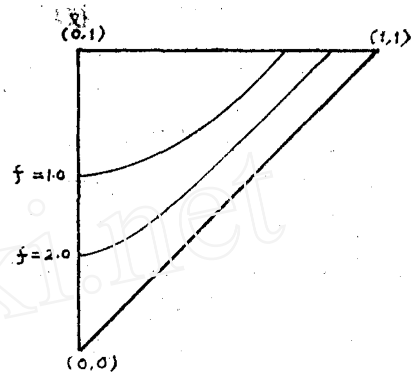


图5 弹塑性交界线

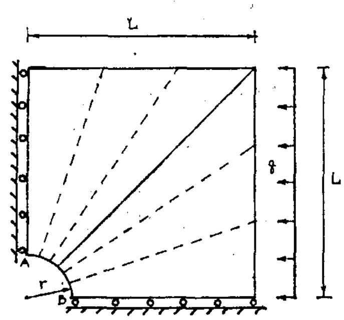


图6 开孔平板

表 1 两个3次参数FEMOL元结果

L/r	点 A			点 B		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
10	−3.11	−0.01	0.0003	0.016	1.10	0.002
20	−3.04	−0.01	−0.0011	0.019	1.04	0.003
解析（$L/r=\infty$）	−3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00

$E=1$，$q=1$，$t=1$，$\nu=0.3$

表 2 曲 梁 的FEMOL结 果

单元类型	单 元 数	v_A	σ_{yB}	σ_{yC}
2次	2	−1.097	−66.9	60.6
3次	1	−1.094	−66.6	60.6
解析解[51]		−1.09	−66.1	60.1

$a=10$，$b=11$，$E=1$，$p=1$，$t=1$，$\nu=0.3$

表 3 均布载荷作用下不同厚度的固支圆板（3 次元）

单元数	$t/R=0.2$			$t/R=0.01$		
	$\overline{W}_c$	$\overline{M}_{yC}$	$\overline{M}_{yA}$	$\overline{W}_c$	$\overline{M}_{yC}$	$\overline{M}_{yA}$
1	18.32	8.37	−12.62	14.83	11.17	−12.05
2	18.44	8.15	−12.47	15.61	8.32	−12.61
Mindlin 理论解[52]	18.48	8.13	−12.50	15.63	8.13	−12.50
Kirchhoff理论解[52]	15.63	8.13	−12.50	15.63	8.13	−12.50

$W_c=0.001qR^4\overline{W}_c/D$； $M_y=0.01qR^2\overline{M}_y$

例 4 曲梁的弯曲（平面应力）[2] 问题的定义及 FEMOL 的网格划分见图 7．此例采用曲结线FEMOL元：其中内外边结线用 3 次样条函数近似，而内部结线用 3 次多项式定义．计算结果示于表 2．

例 5 固支圆板的弯曲（Mindlin板）[6] 参见图 8．用 3 次元计算．结果示于表 3．可以看出，薄板的收敛效果亦不错．

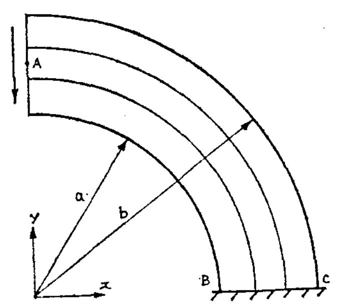


图 7 曲梁的弯曲

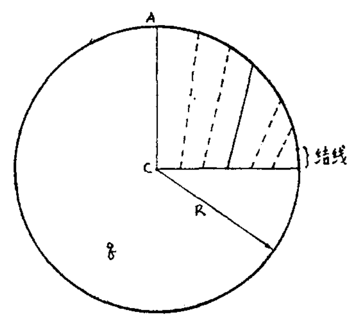


图 8 固支圆板

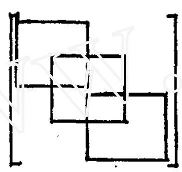
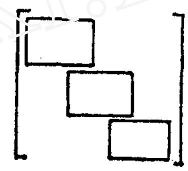
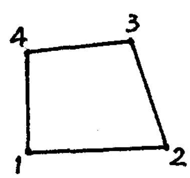
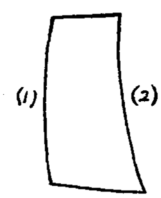
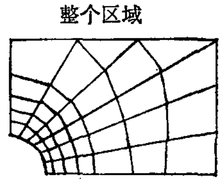
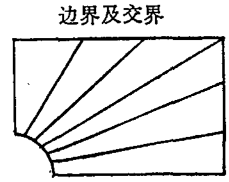
6 讨论与展望

FEMOL的研究仅仅是开始，其生命力与竞争力取决于方法本身素质的优劣以及人们对其认识与开发的程度．在当今众多数值方法中，从使用的方便灵活及对各种复杂问题的适用有效性来看，当首推 FEM．表 4 对 FEM 及 FEMOL 作了较多方面的比较．可以看出，尽管FEMOL如此年轻，以至于很难同FEM的丰硕业绩相比，但 FEMOL 初步具备了一个好方法的基本特点，且在某些方面显示出一定的优越性．

从某种意义上讲，目前的FEMOL是一种结构化模块化的分析方法．将力学问题转化为 ODE 问题是一模块；ODE 问题的求解为另一模块．因此 FEMOL 的发展在很大程度上依赖于ODE求解器的发展，而 ODE 边值问题通用程序的研制与更新正是目前计算数学中最活跃最富有成果的领域之一．这就促使我们用发展的眼光来认识和看待 FEMOL，并在开发 FEMOL 时着眼于新一代的 ODE 求解器的出现．

总之，FEMOL兼有传统的康托洛维奇法、线法、现代有限元法、有限条法的特征，又借助于 ODE 数值求解的最新技术与软件系统的优势，形成一种新型的方便有效且富有竞争

表 4　FEM与FEMOL的比较

	EFM	FEMOL
理论基础	变分法或能量原理	
古典来源	Ritz法	Kantorovich 法
离散化	全	半
基本未知量	结点值 如: u_i	结线函数 如: $u_i(\eta)$
解答精度	好	更好
方程体系	代数，如: $[K]\{u\}=\{F\}$	ODE，如: $[A]\{u''\}=\{F(\eta;\{u\},\{u'\})\}$
方程组矩阵性态	对称、正定 带状、稀疏 	(在COLSYS中) 几乎块状对角 
参数单元映射	可以 	可以 
数据输入及网格划分	整个区域 	边界及交界 
任意区域	可以	可以
变厚度变刚度	可以	可以

力的半解析数值方法．从初步取得的研究成果以及可预见的发展应用来看，前景是令人鼓舞的．

FEMOL 的主要思想由笔者在英国航空航天公司（BAe）资助下在伦敦中央理工学院（Polytechnic of Central London）乔治·凯雷爵士研究院（Sir George Cayley Institute）对 MOL 进行博士后研究时酝酿而成，并与 Xanthis 共同提出[1,2]；目前在国家自然科学基金青年基金资助下正处于创立开发阶段，远非成熟．随着研究的深入与拓宽，会对此法有进一步更全面的认识．这里笔者对各方的关心、支持、鼓励、指导、协作与资助深

表感谢.

参 考 文 献

1 Xanthis L, Yuan S (袁驷). Finite element method of lines for elliptic boundary value problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, to appear

2 Yuan S, Xanthis L, Gao J. Parametric FEMOL elements for plane elasticity problems. *ibid*, to appear

3 袁驷. 有限元线法. 数值计算与计算机应用, 待发表

4 ——. 第1届全国解析与数值结合法学术会议 (1990年5月, 湖南) 文集, 湖南大学出版社 (1990): 132—136

5 Yuan S, Gao J. Proc. of Int. Conf. on EPMESC, 1—3 Aug., Macau, Vol. 3 (1990): 517—526

6 ——, ——. Proc. of Int. Conf. on Struct. Eng. and Comput., 23—25 Apr., Beijing, China(1990): 327—333

7 高建岭. 结构分析的有限元线法. 清华大学博士学位论文 (1991)

8 ——. 清华大学研究生学报, **4**, 1 (1991): 1—5

9 Yuan S. *Acta Mechanica Sinica*, **7**, 3 (1991): 283—288

10 ——. MOL Analysis of Thin Plate Bending Problems. 清华大学土木系科研报告 (1990)

11 袁驷. 弹性薄板稳定性分析的线法. 清华大学土木系科研报告 (1990)

12 Yuan S. Proc. 3rd East-Pacific Conf. on Struct. Eng. and Construction, 23—26 Apr., Shanghai, China, Vol. 1 (1991): 41—46

13 袁驷. 弹塑性扭转问题的FEMOL分析. 第3届全国塑性力学学术交流会论文, 1990年5月, 南京

14 Yuan S, Zhang Y. Proc. of Int. Conf. on EPMESC, 1—3 Aug., Macau, Vol. 1 (1990): 99—107

15 ——. Proc. of Int. Symp., on Approximation, Optimization and Computing, 2—7 July, Dalian, China (1989)

16 ——. *Commun. Appl. Numer. Methods*, **6**, 4 (1990): 313—321

17 ——. *Computers and Structures*, **39**, 5 (1991): 391—398

18 袁驷, 高建岭. 中国土木工程学会计算机应用学会第4届年会论文集, 1989年10月, 厦门 (1989): 265—274

19 高建岭, 袁驷. 中厚旋转壳在轴对称荷载下的 ODE 解法. 青年力学协会第3届全国学术年会论文集, 上册 (1989): 208—215

20 Yuan S, Gao J. Proc. of NUMETA90, Jan., Swansea, UK, Vol. 2 (1990): 878—885

21 袁驷. 计算结构力学及其应用, **7**, 2 (1990): 104—105

22 Liskovets O A. The Method of Lines (review). English translation appeared in *Differential Equations*, **1** (1965): 1308—1323

23 Meyer G H. *J. Inst. Maths. Applics.*, **20** (1977): 317—329

24 ——. *Numer. Math.*, **29** (1978): 329—344

25 ——. *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**, 1 (1981): 150—164

26 Janac K. Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations (ed. by Vichnetsky R) (1975): 154—158

27 Irobe M. Proc. 16th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech., Central Scientific Publ. (1968): 1—7

28 Gyekenyesi J P, Mendelson A. *Int. J. Fracture*, **11**, 3 (1975): 409—429

29 Malik S N, Fu L S. *Engng. Fracture Mech.*, **12** (1979): 377—385

30 ——, ——. *J. Computers and Structures*, **10** (1979): 447—457

31 Mendelson A, Alam J. *Int. J. Fracture*, **22** (1983): 105—116

32 Alam J, Mendelson A. *ibid*, **31** (1986): 17—28

33 Jones D I, South Jr. J C, Klunker E B. *J. Comput. Phys.*, **9**, 3 (1972): 496—527

34 Xanthis L S. The Numerical Method of Lines (MOL) and ODE solvers can Provide a New Powerful Computational Fracture Mechanics Tool. Int. Conf. on Comput. Mech. Tokyo, Japan (1986)

35 ——. ACM SIGNUM Newsletter, **21**, 1—2 (1986)

36 Cheung Y K. Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press (1976)

37 ——, Fan S C, Wu C Q. Proc. Int. Conf. on Finite Element Methods (ed. He Guangqian and Cheung Y K), 2—6 Aug., Shanghai, China (1982): 704—709

38 梁国平. 计算数学, **2**, 4 (1980): 336—344

39 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method, 3rd ed. (1977)

40 Kantorovich L V, Krylov V I. Approximate Methods of Higher Analysis. Translated by Benster Curtis D. (1964)

41 Keller H B. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems. CBMS-NSF Regional

Conference Series in Applied Mathematics. SIAM. Philadelphia (1976)
42 Lentini M, Pereyra V. *Math. Appl. Comp.*, **2** (1983) : 103—118
43 Bulirsch R, Stoer J, Deuflhard P. Numerical Solution of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems I. Num. Math. Handbook Series Approximation (1976)
44 Ascher U, Christiansen J, Russell R D. *ACM Trans. Math. Software*, **7**, 2 (June 1981) : 209—222
45 ——, ——, ——. *ibid*, **7**, 2 (June 1981) : 223—229
46 ——, Russell R D. *SIAM Rev.*, **23** (Apr. 1982) : 238—254
47 Scott M L, Watts H A. *SIAM J. Numer. Anal.*, **14** (1977) : 40—70
48 Gladwell I. Proc. Conf. on Computing Techniques for ODEs, Univ. of Manchester (Dec. 1978) : 273—303
49 Lefeber D. Solving Problems With Singularities Using Boundary Elements. Computational Mechanics Publications (1989)
50 Mendelson A. Plasticity: Theory and Application. The Macmillan Company (1968)
51 Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity. 3rd ed., Mc-Graw Hill Book Co., New York (1970)
52 Reismann H, Pawlik P S. Elasticity: Theory and Application. John Wiley & Sons (1980)

FINITE ELEMENT METHOD OF LINES IN COMPUTATIONAL MECHANICS

Yuan Si
Department of Civil Engineering, Qinghua University

Abstract The newly developed finite element method of lines is briefly described and the recent advances are reviewed and its future development is discussed.

Keywords *method of lines; finite element method of lines; ordinary differential equation; solver; semi-discretization; computational mechanics*