法是一种时间演化的有限差分格式，每一步都由相空间中的正则变换给出．在这个格式给出的辛变换中，取时间步长Δt作为一个参数．如果这个辛变换与 Hamilton 系统的相流之差的阶是 $O(|\Delta t|^a)$，$a>0$，则它是 Hamilton 动力学的一个有限差分近似．由于在这个算法中进行任意次数的迭代仍得到一个辛变换，因此它可以保持原有系统的辛结构，并保持相体积守恒．由于经典的Runge-Kutta差分格式是一个耗散格式，不是一个辛格式，因此不能保持计算的长期稳定性，不适合 Hamilton 力学计算．辛算法的出现揭开了 Hamilton 力学计算的新篇章．

对于有对称性的力学系统，我们当然希望在计算过程中与系统的对称性有关的运动积分守恒，从而算法与动力学的约化相容．因此守恒算法的研究有重要的意义．一些关于 Hamilton 力学系统的算法可以保持能量积分守恒．但一般说来，不能使所有运动积分都守恒．事实上，将有些能量守恒算法用于自由刚体运动时，在不长的时间范围内就会引起动量矩的显著漂移．在许多力学计算问题中，保持动量（或与动量有关的运动积分）守恒往往比保持能量守恒更为重要，那么我们就应当采用动量守恒算法．由于 Hamilton 系统的动量积分密切联系着系统在某些对称群作用下的不变性，动量守恒算法应当具有与真实动力学相同的群不变性．

在构造动量守恒算法时，我们自然希望同时保持Hamilton结构不变．假设Hamilton系统在 Lie 群 G 作用下是不变的，于是系统有与动量映射 $J:P\to g^*$ 对应的运动积分．最近葛忠，Marsden[10]，Channell 和 Scovel[8] 等提出了 Lie-Poisson 积分算法（即 G-等变辛算法）．在一些较弱的附加条件下，这个 G-等变辛算法可以准确地保持动量J以及有关的运动积分守恒．例如，这个算法用于自由刚体运动，可以精确地保持角动量始终等于初始值．更一般地，这个算法的不变性可以保证求得的解始终保持在约化的相空间内．对于 $P=T^*Q$，且G通过余切提升作用在P上的重要情形，取近似 Hamilton-Jacobi 生成函数 $S_{\Delta t}$ 如下：它是一个G-不变函数，且近似于以 Δt 表示时间的非定常 Hamilton-Jacobi 方程的解．这个近似生成函数$S_{\Delta t}$可以用来建立一个 1 阶显式的动量守恒辛差分格式．上述等变辛算法严格地保持动量守恒，一般不能保持系统的能量（Hamilton 函数）守恒．数值计算结果表明，在辛算法中能量随时间只是作有界的振荡变化，从而在相当长的时间内基本保持不变．然而对于通常的 Runge-Kutta 算法，动量和能量都有明显的积累误差．辛算法或等变辛算法的上述性质使得它们非常适合于 Hamilton 系统（有限维或无限维）的长期行为，特别是周期运动、概周期运动和混沌运动的研究．

鉴于运动积分守恒的重要性和 Hamilton 结构在有对称性的 Hamilton 力学系统的约化中所起的重要作用，我们可能有希望找到一种算法，它能同时保持能量、动量（和其他的独立运动积分）以及辛结构不变．然而葛忠和 Marsden[10] 等指出，这种算法是不可能实现的．因此目前人们还建立了同时保持动量和能量守恒的非辛算法．

总的来说，在近代力学和工程技术问题的算法中，动量守恒经常是优先考虑的要求．在保证动量守恒的前提下，我们还可以根据其他的要求（例如显格式或隐格式、能量或辛结构的不变性等）去选择不同的算法．

8　结束语

本文简要地介绍了广义 Hamilton 系统理论的发展历史、现状、基本概念和方法．着重

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 广义 Hamilton 系统与广义 Poisson 括号

经典Hamilton力学处理的是偶数维相空间. 但在实际问题中有许多动力学系统具有非正则的相空间, 即相空间流形不具有余切丛结构, 但仍可赋予一个 Poisson 括号, 它具有反对称性、双线性、导数性质及满足Jacobi恒等式. 例如刚体自由转动的 Euler 动力学方程就是这种情况. 通常把这种相空间称为Poisson流形. 按 Lichnerowicz 最初的定义[20], Poisson 流形P记为 (P,G), 其中G是P上的 2 次反变张量场, 满足Schouten括号: $[G,G]=0$. 实际上它等价于下面的定义:

定义 2.1 设P为流形, 它为某类物理学系统的相空间. 如果在P上的函数空间$\mathscr{C}(P)$上存在一个括号关系$\{\cdot,\cdot\}$, 它具有下列性质:

反对称 $$\{F,G\}=-\{G,F\} \tag{PB1}$$

双线性 $$\{\lambda F+\mu G,K\}=\lambda\{F,K\}+\mu\{G,K\} \tag{PB2}$$

Jacobi恒等式 $$\{F,\{G,K\}\}+\{G,\{K,F\}\}+\{K,\{F,G\}\}=0 \tag{PB3}$$

Leibniz 法则 $$\{F\cdot G,K\}=F\cdot\{G,K\}+G\cdot\{F,K\} \tag{PB4}$$

则 $(P,\{\cdot,\cdot\})$ 称为Poisson流形. 如果系统的任何可观测函数 $F: P\to \mathbf{R}$ 的动力学可由一个Hamilton函数H通过 $\dot F=\{F,H\}$ 决定, 则 $(P,\{\cdot,\cdot\},H)$ 称作(广义)Hamilton系统.

在上面的定义中, 对流形P的维数没有限制, 一个Poisson流形可以是无穷维的. 具有正则"变量"$q(x)$与"动量"$p(x)$的 ∞ 维正则 Poisson 流形的例子是

$$P_{\mathrm{can}}=\{(q(x),p(x))\,|\,q(x)\in Q,\quad p(x)\text{为其共轭动量(场)}\} \tag{1}$$

$$\dot F=\{F,H\}_{\mathrm{can}}(q(x),\quad p(x))=\int\left(\frac{\delta F}{\delta q(x)}\frac{\delta H}{\delta p(x)}-\frac{\delta F}{\delta p(x)}\frac{\delta H}{\delta q(x)}\right)dx \tag{2}$$

其中 $\delta F/\delta q(x)$ 定义为

$$\int\frac{\delta F}{\delta q(x)}\delta q(x)dx=\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}F(q(x)+\varepsilon\delta q(x),p(x)) \tag{3}$$

同样地定义 $\delta F/\delta p(x)$.

定义 2.2 设P为Poisson流形, $H: P\to\mathbf{R}$ 为一光滑函数. 伴随H的 Hamilton 矢量场是P上的唯一的光滑矢量场X_H, 它对一切光滑函数 $F: P\to\mathbf{R}$ 满足

$$X_H(F)=\{F,H\}=-\{H,F\} \tag{4}$$

如果M和N为 Poisson 流形, Poisson 映射 $\varphi: M\to N$ 是一个保持 Poisson 括号的光滑映射:

$$\{F\cdot\varphi,H\cdot\varphi\}_M=\{F,H\}_N\cdot\varphi \tag{5}$$

其中F,H为N上的任意光滑函数.

如同经典的 Hamilton 正则变换, 对于 Poisson 流形也有同样的命题:

命题 2.3[32] 设X_H为 Poisson 流形P上的 Hamilton 矢量场, 对每一t, 流$\exp(tX_H)$: $P\to P$决定了P到自身的一个(局部)Poisson映射.

一个子流形 $Q\subset P$ 称为 Poisson 子流形, 如果其包含为一 Poisson 映射. 对 $Q\subset P$ 是一任意的子流形, 下面的命题说明是否可以在其上赋予 Poisson 结构; 如果这样的结构存在, 将是唯一的.

命题 2.4 对P上的所有光滑函数H, 记丛映射 $B: T^*P\to TP$ 为 $B(dH(x))=X_H|_x$.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

记 $V|_x=\{X_H|$: H 是P上的光滑函数}. 子流形 $Q\subset P$ 是 Poisson 子流形的充要条件是对所有 $x\in Q, V|_x\subset T_xQ$. 亦即：P上的每个 Hamilton 矢量场处处与 Q 相切. 特别地，如果 $V|_x=T_xQ$，则Q是P的一个辛子流形.

经典的Poisson括号具有非退化性，但对于一般的非正则Poisson流形则无此限制.

定义 2.5 设 $C: P\to \mathrm{R}$ 为非常数的光滑函数. 如果对所有的可微函数$F: P\to\mathrm{R}$，都有 $\{C,F\}=0$，则C称为 Poisson 流形P上的 Casimir 函数.

当P为有限维时，设P的局部坐标为 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，则P上的 Poisson 括号有如下的坐标表示：

$$\{F,G\}=\sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}(z)\frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial G}{\partial z_j} \tag{6}$$

其中的反对称矩阵 $J(z)=(J_{ij}(z))$ 称为结构矩阵. 当 $J_{ij}(z)$ 是关于 z 的齐线性函数时，括号（6）也称做 Lie-Poisson 括号，因为它与 Lie 群的 Lie 代数结构相联系.

命题 2.6 给定一个定义在开子集$P\subset\mathrm{R}^n$上的$n\times n$函数矩阵$J(x)=(J_{ij}(x))$，则 $J(x)$ 是P上的一个 Poisson 括号的结构矩阵的充要条件是

① $$J_{ij}(x)=-J_{ji}(x) \tag{7}$$

② $$\sum_{m=1}^{n}\left[J_{im}(x)\frac{\partial J_{jk}(x)}{\partial x_m}+J_{jm}(x)\frac{\partial J_{ki}(x)}{\partial x_m}+J_{km}(x)\frac{\partial J_{ij}(x)}{\partial x_m}\right]=0 \tag{8}$$

其中 $i,j=1,\cdots,n$.

定义 2.7 Poisson 括号在点 $x\in P$ 的秩定义为线性映射 $B|_x: T_x^*P\to T_xP$ 的秩. 如果在 x 的某邻域内每点的秩相同，则称 x 是Poisson流形P的正则点，否则称为奇异点. 不难看出，流形P在点 x 的秩与结构矩阵 $J(x)$ 的秩相同. 由 $J(x)$ 的反对称性，秩总为偶数.

定理 2.8 设结构矩阵$J(x)$在正则点 x_0 处的秩为 $n-m(m>0)$，则在 x_0 附近恰好存在 m个函数独立的（局部）Casimir 函数.

Lichnerowicz [20] 详细研究了具有常数秩的 Poisson 流形，指出所有具有相同秩 $2m$ 的 Poisson 流形都是局部相似的.

定理 2.9 （Darboux定理）设P是一个秩处处为 $2m<n$ 的 n 维 Poisson 流形，则在每点 $x_0\in P$的邻域都存在一个正则局部坐标$(q,p,z)=(q_1,\cdots,q_m,p_1,\cdots,p_m,z_1,\cdots,z_l)$，$2m+l=n$，使得在这组坐标下，Poisson括号为

$$\{F,G\}=\sum_{i,j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) \tag{9}$$

广义 Poisson 括号的概念最初出现在 S.Lie 的“函数群”理论及 1 阶线性偏微分方程的积分研究工作中. 但 Lie 的工作似乎长期被数学和物理学界遗忘，更没有在力学中应用. 本世纪 50—60 年代又由 Dirac, Pauli, Martin 和 Jost 等人几乎独立地引入. Sudarshan & Mukunda [30] 在坐标形式下对广义 Poisson 括号、广义 Hamilton 系统及变换群的性质进行了一些细致的讨论. Weinstein [32] 研究了具有非常数秩的 Poisson 流形，得到了一个更一般的结论，称之为**分离定理**：对 P 中的任一点 x_0，存在一个邻域 U，它光滑地同胚于一辛流形与一在 x_0 处秩为 0 的 Poisson 流形的乘积. 他指出由于 Poisson 流形具有可以光滑地分成一些不同维数的辛流形的性质，可能对于研究力学中如下一种普遍现象是非常合适的：一个定

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

义在辛流形上的动力学系统，当系统的参数达到极限值（通常为 0 或∞）时，极限系统仍然有辛形式，但维数降低了. 他还提出了一些尚未解决的问题. 受他的影响，Conn[9] 研究了解析 Poisson 结构的规范型问题.

尽管 Poisson 流形的局部描述很困难，但仍存在一个全局描述[7]，即过 Poisson 流形的每一点都存在一个辛流形，其维数等于 Poisson 结构矩阵在该点的秩. 这些辛流形称作 Poisson 流形的辛叶层中的辛叶，它们是 Poisson 流形上的 Hamilton 系统的不变流形.

对于无限维的 Poisson 流形，则没有相应的 Darboux 定理. 如果P是一 Poisson 流形，则P的辛变量（或称之为 Clebsch）变量指的是一 Poisson映射 $J: M \to P$，其中M是辛流形. 如果在P上选择的是正则坐标，则称之为P的正则变量.

对于无限维演化方程的Hamilton结构的一般概念首次出现在Magri[21]，Vinogradov[31]，Kupershmidt[19] 和 Manin[22] 等人 1978—1980 年间的工作中. 在 Olver[27] 的一本专著中对有限维和无限维（广义）Hamilton 系统理论作了专门介绍.

3 具有对称性的 Poisson 流形的约化

具有对称性的 Poisson 流形的约化也就是将对称性除去. 约化理论可追溯到 Jacobi 和 Liouville的工作. 对于经典的正则相空间上的定常 Hamilton 系统，如果它存在 k 个对合的首次积分，则系统可约化到少了 $2k$ 个变量的新的 Hamilton 系统，原系统的解可由约化系统通过积分求出. 对 Poisson 流形上的 Hamilton 系统也有同样的结论. 从几何的观点出发，利用对称群对系统进行约化是源于 Smale[29] 的工作. 实际上一个首次积分决定了系统的一个单参数对称群.

定义 3.1 Lie 群G在 Poisson 流形P上的一个表示（G,P 都可以是无穷维）定义为

$$\varphi: G \times P \to P$$
$$(g,p) \to \varphi(g)p$$

如果在$\mathscr{C}(P)$上诱导的作用 $\varphi(g)[F](p) = F(\varphi(g)p)$ 保持 Poisson 括号，即

$$\varphi(g)[\{F,K\}] = \{\varphi(g)[F], \varphi(g)[K]\} \tag{10}$$

则称表示φ为G在P上的正则作用.

用 Poisson 括号描述的动力学系统的一个重要特性是：当其与一正则的G作用可交换时，动力学可限制到约化集 P/G 上考虑. 由于P上的括号在 G 作用下的不变性，P/G 也具有 Poisson 括号结构. 在研究P到P/G的约化中，动量映射的概念起着十分重要的作用.

G在P上的正则作用φ对任意的 $\xi \in \mathrm{g}$（G的Lie代数）自然地在P上生成了一个矢量场ξ_P:

$$\xi_P(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi \exp[(t\xi)](p) \in X(P) \tag{11}$$

定义 3.2 设P为一 Poisson 流形，

① 如果 $\hat{J}_\xi: P \to \mathrm{R}$ 可以将 ξ_P 对任意函数F的作用表示为Poisson 括号：

$$\xi_P[F](p) = \{F, \hat{J}_\xi\}(p) \tag{12}$$

则称 $\hat{J}_\xi$ 为矢量场 ξ_P 诱导的流的生成函数；

② 如果选择$\hat{J}_\xi$使得其关于ξ为线性的，则G通过φ在P上的作用的动量映射定义为

$$J: P \to \mathrm{g}^*; \quad \langle J(p), \xi \rangle = \hat{J}_\xi(p) \tag{13}$$

任何连通的 Lie 群G通过伴随表示作用在它的 Lie 代数 g 上，即：对任一 $g \in G$，记I:

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$G \to G$，$I_g(h)=ghg^{-1}$ 为 G 上的自同胚，则有 $I_g(e)=e$. I_g 在 e 处的切映射 $Ad_g=T_eI_g$ 给出了 $T_eG=\mathfrak{g}$ 上的一个线性自同胚，同时也定义了G在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示. 这样也诱导了 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用 $Ad^*_{g^{-1}}: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$；$\beta \to \{\eta \to \beta(Ad_{g^{-1}}\eta)\}$.

许多动量映射具有的一个重要性质是等变性，即 G 在 P 上的作用 φ 与 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用可交换：

$$J[\varphi(g)(p)]=Ad^*_{g^{-1}}J(p) \tag{14}$$

该性质在 Lie 代数水平上有一重要结论，即：生成函数$\hat{J}_\xi$诱导了 $\mathscr{C}(P)$ 上的 Poisson 括号与 $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 括号之间的一个代数同胚：

$$\{\hat{J}_\xi,\hat{J}_\eta\}=\hat{J}_{[\xi,\eta]} \tag{15}$$

关于动量映射，有如下的几何的 Noether 定理：

定理 3.3 记 $P=T^*Q$ 为正则的 Poisson 流形，G 通过表示 $\bar{l}$ 作用在Q上，$l=T^*(\bar{l})$为 $\bar{l}$ 在 T^*Q 上的提升作用. 该作用是正则的且有一等变的动量映射J，其源于生成函数

$$\hat{J}_\xi(\alpha_q)=\langle\alpha_q,\ \xi_Q(q)\rangle \tag{16}$$

其中 $\alpha_q \in T^*_qQ$，ξ_Q 为 ξ 在Q上生成的矢量场. 如果系统的 Hamilton 函数关于 G 在 T^*Q 上的作用为不变的，则 $\hat{J}_\xi(p_0)$ 为一守恒量（其中 p_0 描述了初始条件）.

对于任一 Poisson 流形，显然类似的情况也成立，即当G正则地作用在P上，Hamilton 函数关于作用不变时，动量映射表示了一个守恒量. 为了构造一个约化的 Poisson 流形，选择 G 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用的一条轨道 O_μ. 取其在动量映射下的逆象. 自然地，通过将P限制到 $J^{-1}(O_\mu)$ 上，子空间 $J^{-1}(O_\mu)\subset P$ 具有 Poisson 结构. 将对称性G除去便得到了一个约化的相空间为

$$P_\mu=J^{-1}(O_\mu)/G \approx J^{-1}(\mu)/G_\mu \tag{17}$$

其中 G_μ 为 $\mu\in\mathfrak{g}^*$ 在G的余伴随作用下的迷向群，即 $G_\mu=\{\mu\in\mathfrak{g}^* \mid Ad^*_{g^{-1}}\mu=\mu\}$. 由于动量映射的等变性，除去对称性对代数结构没有影响，这意味着约化的相空间 P_μ 自然地继承了一个 Poisson 结构. 特别地，如果P为辛流形，则 P_μ 也是辛的，但一般 P_μ 不再是流形，只有在一定的条件下，P_μ 才为一辛流形（具体细节可参看 [25]）. 关于 Poisson 流形约化的较一般结果可参看[24].

关于具有对称性的 Hamilton 系统的相对平衡点的定义是由 Smale [29] 给出的. Marsden 和 Weinstein [25] 给出了一个与之等价的定义.

定义 3.4 $p\in P$使得其在P_μ上的投影为约化的 Hamilton 系统的临界点，则 p 称为原系统的相对平衡点. 如果约化的 Hamilton 系统的临界点是（Liapunov）稳定的，则相对平衡点称为相对稳定的.

定理 3.5 （Marsden & Weinstein [25]） $p\in P$ 是相对平衡点，当且仅当存在一个单参数子群$g(t)\in G$，使得对所有的 $t\in\mathbb{R}$, $F_t(p)=\varphi(g(t))(p)$，其中 F_t 是 X_H 的流，φ是G的作用.

4 Hamilton系统的稳定性

Hamilton 系统的一个重要问题就是稳定性问题. 一个保守系统不可能存在渐近稳定解. 在保守系统中，稳定性的特征是由非线性稳定性或 Liapunov 稳定性来描述的. 拓扑空间上的流（或群作用）的平衡点 x_0 称为稳定的，如果对 x_0 的每一邻域U，都存在一较小的邻域

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

V，使得与V相交的任一轨道仍包含在U中，这种稳定性定义关于时间可向前和向后，因此特别适用于保守系统。

经典力学的一个中心问题就是力学系统的相对平衡点的稳定性分析。Hamilton结构的一个重要应用就是可以得出一些关于相对平衡点的稳定性定理。实际上当今对广义Hamilton系统的研究兴趣主要是从稳定性研究的需要而复兴的。

若要证明一个一般的多自由度(含无限维)Hamilton系统的平衡点是稳定的，则其唯一有效的方法就是寻找系统的一个守恒量，使其在平衡点具有局部极大值或极小值。在经典力学中，这个守恒量常取Hamilton函数，但在一个Poisson流形上，Hamilton函数在平衡点可能不是驻态的（stationary），这时必须在Hamilton量上附加上另外的泛函，以便得到所寻找的守恒量。

Arnold [2,3] 研究了不可压流体的平面运动。他发展了Liapunov的方法，得出的非线性稳定性结果扩展了经典的Rayleigh线性理论。Arnold在能量H上附加了一个保守量C，它对应着流体质点在Lagrange描述下的对称性。Arnold方法的基础就是流体运动的Euler方程。实际上这是一个非正则Poisson括号下的Hamilton系统，所附加的量对该括号下的任意Hamilton系统都守恒，现称之为Casimir函数。Arnold选择C使得$H+C$的平衡解为临界点。再利用凸性估计，找到一个范数和先验估计以限制有限扰动从平衡解分离，这样就建立了非线性稳定性。Arnold的方法被用到了理想流体(可压或不可压)、等离子体、磁流体动力学等方面的稳定性研究中，发展成了能量-Casimir方法。关于这方面的工作可参阅Holm等 [13] 的工作及其后所引的参考文献。其基本思想如下：

对于有限维系统，有一经典的Lagrange稳定性判据：对于具有坐标$(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)$的空间$\mathbf{R}^{2n}$和Hamilton函数$H: P^{2n}\to\mathbf{R}$的系统，Hamilton方程在$x_0$具有平衡点的充要条件是在该点$H$的微分为零，该平衡点稳定的充分条件是$H$的2阶导数矩阵（也称Hess矩阵）$D^2H$为正定或负定。事实上，Lagrange条件隐含着$H$的与$x_0$的某邻域相交的每一等值曲面都有一整个包含在其内的紧子集，由于H是动力学方程的一个运动常数，所以立即可导出稳定性。

Arnold注意到Lagrange判据可以很容易地推广到Poisson流形的正则点。实际上由Darboux定理，在正则点x_0附近运动方程具有的形式（在正则坐标下）为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \dot{z}_i=0 \tag{18}$$

所以可取新的Hamilton函数为

$$\hat{H}=H-\sum\frac{\partial H}{\partial z_i}(x_0)z_i+\sum[z_i-z_i(x_0)]^2 \tag{19}$$

显然它不改变系统的动力学行为，且是一守恒量。

在Poisson流形的奇异点处情况要复杂一些，稳定性同时依赖于Hamilton函数和Poisson结构。

但在函数空间（即无限维情况）中，2阶变分D^2H必须在一个更强的意义上是定号的，否则H可能在x_0没有局部极大值或极小值，所以必须进行凸性估计。通常的作法是寻找二次型Q_1,Q_2，使得对P上的所有有限变分Δx有不等式：

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$Q_1(\Delta x)\leqslant H(x_0+\Delta x)-H(x_0)-DH|_{x_0}\cdot\Delta x \tag{20a}$$

$$Q_2(\Delta x)\leqslant C(x_0+\Delta x)-C(x_0)-DC|_{x_0}\cdot\Delta x \tag{20b}$$

（其中D表示关于x的全导数），且对所有$\Delta x\neq 0$，满足

$$Q_1(\Delta x)+Q_2(\Delta x)>0 \tag{21}$$

这样，引进范数

$$\|x\|^2=:Q_1(x)+Q_2(x) \tag{22}$$

如果$H+C$在x_0关于范数（22）是连续的．则x_0是运动方程的稳定平衡点．如果存在正的常数α,β，使得对于范数（22）满足

$$H(x_0+\Delta x)-H(x_0)-DH|_{x_0}\cdot\Delta x\leqslant\alpha\|\Delta x\|^2 \tag{23a}$$

$$C(x_0+\Delta x)-C(x_0)-DC|_{x_0}\cdot\Delta x\leqslant\beta\|\Delta x\|^2 \tag{23b}$$

则$H+C$关于范数（22）是连续的，且有如下的稳定性估计：

$$\|\Delta x(t)\|^2\leqslant(\alpha+\beta)\|\Delta x(0)\|^2 \tag{24}$$

如果我们不能确定动力学方程的解是否在所有的时间t存在，则我们仍然可以讨论“条件稳定性”，即要求在$\mathscr{C}^1$解存在的时间内稳定性成立．

但对于一般的Poisson流形，其Casimir函数可能并不好找甚至不存在，Simo等[28]发展了称之为约化的能量-动量方法，他们用这一方法解决弹性体的稳定性问题，利用对角化技术，将系统的刚性运动与弹性运动解耦．

5 力学系统的Hamilton结构的建立

Hamilton结构源于经典力学，它使经典力学的一些稳定性问题得到了较好的处理，而无限维Hamilton系统理论又扩大了经典力学的研究范围．目前的一些研究结果表明，力学系统中的Poisson结构主要来源于两个方面：首先，由具有对称性的经典Hamilton系统经约化而产生，例如自由刚体定点运动的Euler方程；其次，动量映射的像空间存在Poisson结构，例如重刚体定点运动的情况．

对于一个给定的系统，其Hamilton结构的建立由两步组成，即写出Hamilton函数和Poisson括号．前者可由系统的守恒量得到，理论上也可以证明任何保守系统都存在Hamilton结构，但要找到具有实用价值的Poisson括号使得Hamilton结构形式简单却不是很容易能做到的．力学系统的相空间常具有余切丛结构，其上的辛形式自然地定义了一个Poisson括号，由此出发，再利用约化理论，这常常是得到较简单的Hamilton结构的有效途径．下面我们仅以刚-弹耦合系统为例[18]．

对于一个自由运动的刚体，由质心动量守恒，所以仅考虑其转动（相当于经过一次$\mathbf{R}^3$约化）．系统的正则相空间为$T^*SO(3)$．又由于刚体上无外力矩作用，可按$SO(3)$约化，约化后的相空间为$T^*SO(3)/SO(3)\simeq so^*(3)$（$SO(3)$的Lie代数对偶空间）．约化后Poisson括号如下：

$$\{F,K\}_{so^*(3)}=-\mathbf{m}\cdot(\nabla F\times\nabla K) \tag{25}$$

其中$\mathbf{m}\in so^*(3)\simeq\mathbf{R}^3$代表刚体的角动量．

对于刚-弹耦合系统，记弹性体（不妨设其为梁）的构形空间为Q，$Q=\{\boldsymbol{\sigma}|\boldsymbol{\sigma}:[0,L]\to\mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{\sigma}$是光滑映射$\}$，这里$\boldsymbol{\sigma}(s)$表示梁上的质点的位置矢量，$L$为梁长．梁的相空间$P=T^*Q$，其上有一自然的Poisson结构（实际上是辛结构），记变量为$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Pi})$．假定变形很小，系统

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的质心位置变化可忽略。

刚体的构形空间为 $SO(3)$，它通过使梁转动的方式(左)作用在P上，可以推断该作用是 Poisson 作用。整个系统的相空间为$T^*SO(3)\times P$，定义映射$\Phi: T^*SO(3)\times P\to so^*(3)\times P$

$$\Phi(\alpha_A,\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Pi})=(TL_A^*\cdot\alpha_A,A^{-1}\boldsymbol{\sigma},A^{-1}\boldsymbol{\Pi}) \tag{26}$$

其中 $A\in SO(3)$，$\alpha_A\in T^*SO(3)$，可以证明Φ是 Poisson 映射。为更清楚地理解系统的运动情况，引进梁的相对位置矢量 $\mathbf{r}(s)$ 和相对动量密度 $\mathbf{M}(s)$：

$$\mathbf{r}(s)=A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(s),\quad \mathbf{M}(s)=A^{-1}\boldsymbol{\Pi}(s) \tag{27}$$

式中A为 $SO(3)$ 中的元素，它也代表了刚性运动的构形。

在这些变量描述下，约化后的相空间为 $so^*(3)\times P$，约化后的括号形式如下：

$$\begin{aligned}\{F,K\}=&-\mathbf{m}\cdot(\nabla_mF\times\nabla_mK)+\int_0^L\left(\frac{\delta F}{\delta\mathbf{r}}\cdot\frac{\delta K}{\delta\mathbf{M}}-\frac{\delta F}{\delta\mathbf{M}}\cdot\frac{\delta K}{\delta\mathbf{r}}\right)ds\\&+\int_0^L\left[\frac{\delta K}{\delta\mathbf{r}}\cdot(\nabla_mF\times\mathbf{r})+\frac{\delta K}{\delta\mathbf{M}}\cdot(\nabla_mF\times\mathbf{M})\right]ds\\&-\int_0^L\left[\frac{\delta F}{\delta\mathbf{r}}\cdot(\nabla_mK\times\mathbf{r})+\frac{\partial F}{\delta\mathbf{M}}\cdot(\nabla_mK\times\mathbf{M})\right]ds\end{aligned} \tag{28}$$

不难验证，$C_\Phi: so^*(3)\times P\to\mathbf{R}, C_\Phi(\mathbf{m},\mathbf{r},\mathbf{M})=C(\|\mathbf{m}+\int_0^L\mathbf{r}\times\mathbf{M}\,ds\|^2)$ 是括号 (28) 的 Casimir 函数。Krishnaprasad 和 Marsden [18] 利用能量-Casimir 方法给出了该系统的一类定常运动稳定性的充分条件。

以上讨论的是有对称性的情况。如果对称性破缺，就需要更多的量描述系统的动力学。如果这些量是动力学守恒量，则可引进半直积结构，例如重刚体的定点运动 [23] 和圆周轨道上的刚-弹耦合系统 [38]。

6 广义 Hamilton (扰动) 系统的分岔与混沌

可积Hamilton系统的扰动问题，正如 Poincare 所说的，是“动力学的基本问题”。在经典的Hamilton扰动系统理论中，确定周期解、拟周期解、不变环面、同宿和异宿轨线等不变集的存在性和稳定性是十分重要的问题。目前已经发展了一些大范围分析方法，Melnikov 方法 [11] 是其中比较有效的一种。这一方法起源于 Melnikov [39] 在1963年的工作。他考虑了周期扰动下的平面Hamilton系统，利用有效的扰动技巧，建立了一个用来度量扰动系统的双曲周期轨线的稳定流形和不稳定流形之间距离的计算公式，这样就可以得到关于稳定流形和不稳定流形横截相交的充分条件，从而判定混沌的出现。

显然，对于广义 Hamilton 系统发展相应的扰动理论也是十分重要的。Holmes 和 Marsden [14] 首先将 Lie-Poisson 括号、约化方法和 Melnikov 方法结合起来，研究了Lie群上的一类具有对称性的 Hamilton 系统

$$\left.\begin{aligned}&\dot\mu_i=\{\mu_i,H^\varepsilon\},\quad i=1,\cdots,k\\&\dot\theta_j=\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial I_j},\quad \dot I_j=-\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial\theta_j},\quad j=1,\cdots,n\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

其中 Hamilton 量H^ε关于θ是 2π 周期的，并且

$$H^\varepsilon(\mu,\theta,I)=F(\mu)+\sum_{j=1}^nG_j(I_j)+\varepsilon H^1(\mu,\theta,I)$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\{\cdot,\cdot\}$ 是 Lie 代数 g 的对偶空间 g^* 上的 Lie-Poisson 括号．在适当的条件下，他们研究了系统（29）的混沌运动和 Arnold 扩散问题．按广义 Hamilton 系统的定义，（29）显然是一个 $2n+k$ 维广义 Hamilton 系统．

Wiggins 和 Holmes [34,35] 将 Melnikov 方法推广应用于所谓慢变系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_2}(x) + \varepsilon g_1(x,t,\mu), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x) + \varepsilon g_2(x,t,\mu), \qquad (x\in \mathbf{R}^3) \\ \dot{x}_3 &= \varepsilon g_3(x,t,\mu), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

其中 $0<\varepsilon<<1$，g 充分光滑并且关于 t 是 2π 周期的．系统（30）实际上是一类最简单的广义Hamilton 扰动系统，因为（30）可改写为

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}(x) + \varepsilon g_i(x,t,\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}(x) + \varepsilon g_i(x,t,\mu),\quad i=1,2,3 \tag{31}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所涉及的 Poisson 流形的辛叶是平行于 x_1-x_2 坐标面的平面簇．在他们的文章中，得出了这类系统的周期轨线和同宿轨线的存在性和分岔定理，分析了同宿轨线的出现与 Smale马蹄混沌运动．他们的工作在 Wiggins [33] 中又有系统的推广．

最近，在[36]中对如下更一般的广义 Hamilton 系统进行了研究：

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}(x) + \varepsilon g_i(x,t,\mu),\quad i=1,2,3 \tag{32}$$

其中$\{\cdot,\cdot\}$是 $\mathbf{R}^3$ 中的广义 Poisson 括号．显然系统（31）是系统（32）的特殊情况．通过对 Poisson 流形的叶层结构性质的深入探讨，对无扰动系统在辛叶上的轨线的几何性质作适当假设，根据 Wiggins 和 Holmes 的基本作法，得出了系统（32）的周期轨线的存在性、稳定性和分岔的一般判据；导出了研究广义 Hamilton 扰动系统的同宿轨线存在性的解析判定公式，为研究这类系统中的混沌运动提供了相应的方法．这些理论结果已应用于平面涡旋运动、生态模型和航天器模型的研究中．

应当指出，用群论方法去建立广义Hamilton系统本身的分岔和混沌的等变理论也是很有价值的．特别是有一定对称性的 Hamilton 系统，经过约化都可以转化为适当 Poisson 流形上的较低维数的广义 Hamilton 系统．对称性往往导致分岔问题的退化性，后者会增加分析的困难．然而通过等变分岔理论，就可以利用对称性去得到满意的分岔结果．对于混沌，至今仍未能建立相应的等变理论，其中一个重要原因是未能得到等变 Poincare 映射的存在定理．因此深入研究对称性对 Hamilton 系统的分岔和混沌的作用是有重要意义的．

7　广义 Hamilton 系统的数值计算

在（广义）Hamilton 力学系统的研究（例如机器人、空间飞行器、控制等）中往往要对运动方程进行数值积分，为此需要发展快速有效的 Hamilton 力学的计算方法．分析力学的基本原理表明，Hamilton 力学系统的解可由单参数的辛变换(即保测变换)给出，即 Hamilton 系统是一个单参数辛群．因此 Hamilton 力学是建立在辛几何基础上的．冯康等对辛几何在数值分析中的应用做了大量的工作 [15-17,37]，提出了 Hamilton 力学计算的 辛 算 法．辛 算

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

法是一种时间演化的有限差分格式，每一步都由相空间中的正则变换给出．在这个格式给出的辛变换中，取时间步长Δt作为一个参数．如果这个辛变换与Hamilton系统的相流之差的阶是$O(|\Delta t|^a)$，$a>0$，则它是Hamilton动力学的一个有限差分近似．由于在这个算法中进行任意次数的迭代仍得到一个辛变换，因此它可以保持原有系统的辛结构，并保持相体积守恒．由于经典的Runge-Kutta差分格式是一个耗散格式，不是一个辛格式，因此不能保持计算的长期稳定性，不适合Hamilton力学计算．辛算法的出现揭开了Hamilton力学计算的新篇章．

对于有对称性的力学系统，我们当然希望在计算过程中与系统的对称性有关的运动积分守恒，从而算法与动力学的约化相容．因此守恒算法的研究有重要的意义．一些关于Hamilton力学系统的算法可以保持能量积分守恒．但一般说来，不能使所有运动积分都守恒．事实上，将有些能量守恒算法用于自由刚体运动时，在不长的时间范围内就会引起动量矩的显著漂移．在许多力学计算问题中，保持动量（或与动量有关的运动积分）守恒往往比保持能量守恒更为重要，那么我们就应当采用动量守恒算法．由于Hamilton系统的动量积分密切联系着系统在某些对称群作用下的不变性，动量守恒算法应当具有与真实动力学相同的群不变性．

在构造动量守恒算法时，我们自然希望同时保持Hamilton结构不变．假设Hamilton系统在Lie群G作用下是不变的，于是系统有与动量映射$J: P \to g^*$对应的运动积分．最近葛忠，Marsden[10]，Channell和Scovel[8]等提出了Lie-Poisson积分算法（即G-等变辛算法）．在一些较弱的附加条件下，这个G-等变辛算法可以准确地保持动量J以及有关的运动积分守恒．例如，这个算法用于自由刚体运动，可以精确地保持角动量始终等于初始值．更一般地，这个算法的不变性可以保证求得的解始终保持在约化的相空间内．对于$P=T^*Q$，且G通过余切提升作用在P上的重要情形，取近似Hamilton-Jacobi生成函数$S_{\Delta t}$如下：它是一个G-不变函数，且近似于以Δt表示时间的非定常Hamilton-Jacobi方程的解．这个近似生成函数$S_{\Delta t}$可以用来建立一个1阶显式的动量守恒辛差分格式．上述等变辛算法严格地保持动量守恒，一般不能保持系统的能量（Hamilton函数）守恒．数值计算结果表明，在辛算法中能量随时间只是作有界的振荡变化，从而在相当长的时间内基本保持不变．然而对于通常的Runge-Kutta算法，动量和能量都有明显的积累误差．辛算法或等变辛算法的上述性质使得它们非常适合于Hamilton系统（有限维或无限维）的长期行为，特别是周期运动、概周期运动和混沌运动的研究．

鉴于运动积分守恒的重要性和Hamilton结构在有对称性的Hamilton力学系统的约化中所起的重要作用，我们可能有希望找到一种算法，它能同时保持能量、动量（和其他的独立运动积分）以及辛结构不变．然而葛忠和Marsden[10]等指出，这种算法是不可能实现的．因此目前人们还建立了同时保持动量和能量守恒的非辛算法．

总的来说，在近代力学和工程技术问题的算法中，动量守恒经常是优先考虑的要求．在保证动量守恒的前提下，我们还可以根据其他的要求（例如显格式或隐格式、能量或辛结构的不变性等）去选择不同的算法．

8 结束语

本文简要地介绍了广义Hamilton系统理论的发展历史、现状、基本概念和方法．着重

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

介绍了广义 Poisson 括号、约化、Hamilton 系统的相对平衡点稳定性、广义 Hamilton 系统的分岔和混沌、辛算法和动量守恒算法等问题。由于篇幅所限，这里未能涉及广义Hamilton系统的其他一些问题，例如 Hannay-Berry [6,12,26] 几何相位等。它们不仅对于发展Hamilton力学的理论和近代应用有重要价值，而且对机器人、量子化学、核磁共振、微生物学等也有深刻影响。

参考文献

1 Abraham R H, Marsden J E. Foundation of Mechanics (2nd Edition). Addison-Wesley (1978)

2 Arnold V I, Sur la geometrie differentielle des groups de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966) : 319—361

3 ——. On an priori estimate in the theory of hydrodynamic stabilty *Izv. Vyssh. Uchebn. Zved. Mat.*, **54** (1966) : 3—5

4 ——. Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag (1978)

5 ——. Encyclopedia of Dynamical System Ⅲ. Springer-Verlag (1988)

6 Berry M. Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase. *J. Phy. A: Math. Gen.*, **18** (1985) : 15—17

7 Bhaskara K H, Viswanath K. Poisson algebra and Poisson manifolds. Longman Scientific & Technical (1988)

8 Channell P J, Scovel J C. Integrators for Lie-Poisson dynamical systems. *Physica D*, **50** (1991) : 80—88

9 Conn J F. Normal forms for analytic Poisson manifold. *Ann. Math.*, **119** (1984) : 577—601

10 Ge Z, Marsden J E. Lie-Poisson Hamiltonian Jacobi theory and Lie-Poisson integrator. *Phys. Letter A*, **133** (1990) : 134—139

11 Guckenheimer J Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields Springer-Verlag (1983)

12 Hannay J. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18** (1985) : 221—230

13 Holm D D, Marsden J E, Ratiu T, Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma Equilbria, *Phys. Rep.*, **123** (1985) : 1—116

14 Holmes P J, Marsden J E. Horseshoes and Arnold's diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indana Univ. Math. J.*, **32** (1983) : 273—309

15 Kang Feng(冯康). Difference schemes and symplectic geometry. Proc. of 1984 Beijing Symp. on Diff. Geometry and Diff. Eqs. ——Computation of Partial Differential Equations (ed Feng Kang). Science Press, Beijing (1985) : 42—58

16 ——. Difference schemes for Hamiltonian formalism and symplectic geoemtry. *J. Comp. Math.*, **4** (1986) : 279—289

17 ——, Meng-zhao Qin (秦孟兆). The symplectic methods for the computation of Hamiltonian equations. *Lecture Notes in Math.*, No. 1297, Springer-Verlag (1987) : 1—37

18 Krishnaprasad P S, Marsden J E. Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments. *Arch. Rct. Mech. Anal.*, **98** (1987) : 71—93

19 Kupershmidt B C. Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalisms, in Geometric Methods in Mathematical Physics (ed Kaiser G., Marsden J E). *Lecture Notes in Math.*, No. 775, Springer-Verlag (1980) : 162—218

20 Lichnerowicz A. Les Varietes de Poisson et leurs algebres de Lie associees. *J. Diff. Geometry*, **12** (1977) : 252—300

21 Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation, *J. Math. Phys.*, **19** (1978) : 1156—1162

22 Manin S V. Algebraic aspects of nonlinear differential equations. *J. Soviet Math.*, **11** (1979) : 1—122

23 Marsden J E, Ratiu T. Semi-direct products and reduction in mechanics. *Trans. Am. Math. Soc.*, **281** (1984) : 147—177

24 ——, ——. Reduction of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, **11** (1986) : 161—170

25 ——, Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. Math. Phys.*, **5**

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(1974) : 121—130
26 Montgomery R. Isoholonomic problems and some applications. *Comm. Math. Phys.*, **128** (1990) : 565—592
27 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag (1986)
28 Simo J C, Posbergh T A, Marsden J E. Stability of coupled rigid body and geometrically exact rods: Block diagonalization and the energy-momentum method. *Physics Reports*, **193** (1990) : 279—360
29 Smale S. Topology and mechanics, Part I & II. *Inv. Math.*, **10** (1970) : 305—331; **11** (1970) : 45—64
30 Sudarshan E C G, Mukunda N. Classical Dynamics—A Modern Perspective, John Willey & Sons (1974)
31 Vinogradov A M. Hamiltonian structures in field theory. *Sov. Math. Dokl.*, **19** (1978) : 790—794
32 Weinstein A. The local structure of poisson manifolds. *J. Diff. Geom.*, **18** (1983) : 523—557
33 Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos: Analytical methods. Springer—Verlag (1988)
34 ——, Holmes P J. Homoclinic orbits in slowly varying oscillators. *SIAM J. Math. Anal.*, **18** (1987) : 612—629 (see also *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988) : 1254—1255, errata)
35 ——, ——. Periodic orbits in slowly varying oscillators. *ibid*, **18** (1987) : 542—611
36 赵晓华. 广义 Hamilton 扰动系统的周期轨道、同宿轨道分岔与混沌. 北京航空航天大学博士学位论文 (1991)
37 秦孟兆. 辛几何及计算哈密顿力学. 力学与实践, (1990) : 1—20
38 程耀. 刚体和刚-弹耦合系统的 Hamilton 结构、约化及运动稳定性. 北京航空航天大学博士学位论文 (1991)
39 Melnikov V K. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963) : 1—57

REVIEW ON THE RESEARCHES OF GENERALIZED HAMILTONIAN SYSTEMS

Zhao Xiao-hua

Institute of Applied Math. of Yunnan Province. and Dept. of Math., Yunnan University, Kunming, 650091

Cheng Yao   Lu Qi-shao   Huang Ke-lei

Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083

Abstract The generalized Hamiltonian system (GHS), defined directly by the generalized Poisson bracket, is a generalization of the traditional Hamiltonian system defined on (even dim.) symplectic manifold. The GHS can describe more general dynamical systems including odd- and ∞-dimensional systems, hence the study on this type of systems will be very important in theory and applications. In this paper, we give a review on the researches of generalized Hamiltonian systems in China and abroad.

Keywords *generalized Hamiltonian System; generalized Poisson bracket; reduction; stability; perturbation; bifurcation; chaos; integrator*

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net