计算力学中的样条有限元法的进展 *

沈鹏程
合肥工业大学计算中心，合肥 230009

何沛祥
中国科学技术大学力学与机械系，合肥 230026

摘 要 主要评述基于变分原理、样条函数理论与状态空间理论的样条有限元法在近 20 多年来的进展以及进一步发展的趋势. 首先评述了国外的早期工作 —— 截断式样条函数在力学中的应用情况. 接着评述国内工作 —— 样条有限元、样条有限点、样条单元法等优缺点，最后还介绍了目前国内外尚未报导过的，即多变量样条有限元法和样条状态变量法在动力响应中的应用.

关键词 变分原理，样条函数，状态空间理论，样条有限元法

1 引 言

本世纪 60 年代，随着计算机科学的发展，诞生了有限元法，使工程、物理等领域中的数值分析与计算发生了突破性进展 [1~3]. 有限元法是计算力学在本世纪最重大和最辉煌发展的一个领域 [3]. 70 年代，样条函数理论在国际上迅速发展起来，它在计算物理、最优控制、计算机辅助设计以及计算力学等领域中，得到了推广应用. H. Antes[4] 和 G. Gheri 等 [5] 应用变分原理与样条函数求解了薄板弯曲和 Hartmann 流动等问题. 我国学者石钟慈 [6] 提出了样条有限元，随后，国内不少学者从事这方面的研究形成了一个热潮，取得了一系列研究成果 [7~16]. 由于样条函数具有解析与数值的双重特性，连续性强，逼近精度高，待定未知量少和效率高等优点，受到人们的重视. 本文对计算力学中的样条有限元法的进展情况以及进一步发展趋势作评述.

2 单变量样条有限元法

2.1 样条有限元

在国外，早期的工作 [4,5,17~23] 是基于变分原理与截断式样条函数在矩形板、圆板、Hartmann 流动等问题上的应用. H. Antes[4] 最先提出了应用样条函数求解矩形板的弯曲问题，他采用截断式三次 B 样条函数来构造位移场函数. G. Gheri 等 [5] 提出了求解 Hartmann 流动问题，沿一个方向，他采用样条函数，另一个方向采用多项式和三角级数来构造流场函数. 在国内，1979 年石钟慈 [6] 建立了基于势能原理与三次 B 样条函数的样条有限元法计算格式，该文系统地论述了三、五次 B 样条函数的特性及边界条件的处理等. 求解了矩形板、斜板、弹性地基板的弯曲以及梁板组合结构的计算问题，给出了具体算式、算例与解题方案等. 在这篇文章影响

收稿日期：1998-06-09, 修回日期：1999-06-21

* 国家自然科学基金资助项目

下，国内学者进行样条有限元法及其应用的研究，取得不少成果．何广乾等 [7] 将该法推广应用于扁壳的弯曲问题，取乘积型三次 B 样条函数来构造扁壳的 u, v, w 三个方向的位移场函数；龙述尧 [13] 采用五次 B 样条函数来构造薄板的位移场函数求解板弯曲问题．上述这类问题均沿正交方向布置结点，采用乘积型或双重多点样条函数来构造整体结构的位移场函数，所建立的系统方程，与有限元法相似，也具有对称性、正定性、稀疏性以及不计自然边界条件等，但不建立单元方程，而直接形成总体方程．其特点是在整体结构上剖分正方形网格，对采用三次 B 样条函数的薄板问题，取 $n \geq 4$, $m \geq 4$, 一般剖分的网格为 4×4, 6×6, 8×8, 10×10, 可检验出解答的收敛情况，其自由度分别为 49×49, 81×81, 121×121, 169×129. 与有限元法相比，输入数据量小，系统方程阶数低，计算精度与效率均比较高，其弱点是对不规则结构适应性差．这种方法也称样条里兹法或样条函数法 [7]．沈鹏程等 [24] 将样条有限元法推广应用于加劲板的弯曲、振动与稳定问题．该法把各加劲肋的位移所表示的变形能转成板的位移来表示，然后将肋条的板的变形能离散化，最终将肋条的系数矩阵叠加到板的系数矩阵内，从而形成加劲板结构的刚度矩阵．从位移的转换方式，我们可以看出，在有限元法模型中肋条与板只是在一些结点上互相刚结，是协调一致的，在其他接触点上，肋条位移与板的位移一般是不协调的，这与实际情况有很大差别．而在样条元模型中，肋条与板是处处相互连接的，是完全协调的，因此样条有限元法是一类协调元方法．朱明权 [12] 提出了求解任意四边形的弯曲问题，该法采用坐标变换的方法，将任意四边形板通过双线性变换，将其变换成单位正方形板，其势能也作了相应的变换，这样将求解矩形板的样条有限元法推广到求解任意四边形板的弯曲问题． Gang Wang et al.[25] 提出了应用 B_3 样条函数求解任意四边形板弯曲的静力与动力问题．该法将实际的任意四边形板映射为正方形基本板元，在基本板元上布置正交的有限个样条结点，应用多点 B_3 样条函数构造位移场函数，通过势能原理建立样条有限元计算格式．该法只需将整板形成一个超级单元 (super element), 所以输入数据量也小，编程容易，精度好，效率高．这样，使得样条有限元法增强了解题范围的适应能力，取得了进展．

2.2 样条单元法

上节讨论的样条有限元，其特点是不建立单元方程，而直接形成结构的整体方程．袁驷，龙驭球 [26] 提出了应力分析的样条单元，该法在剖分矩形单元上用样条函数来构造单元的形函数．用这种单元集合后，所获得的总体刚度矩阵方程具有阶数低、精度好、效率高、灵活方便等优点．文献 [27] 提出了中厚度壳体的样条单元，文献 [28] 提出了高层建筑结构的样条单元．该法也可用于非线性问题的分析．文献 [29] 提出了几何非线性样条单元． S.C. Fan 和 M.H. Luah[30,31] 应用样条函数来构造等参单元的形函数，在板壳弯曲问题上得到了应用．由于样条单元法与通用有限元法的列式过程完全相同，因而样条单元也可解决复杂形体的结构与非结构的物理问题 [32].

2.3 样条有限点法

样条有限点法是沿一个方向上划分为有限个结点，在有限个点上取三次 B 样条函数，与其正交方向取的三角级数来构造位移场函数，这个方法是秦荣 [8] 于 1979 年提出来的．该法对两边简支的结构情况是比较优越的，可以消除系统方程中的耦合项，使计算更为简单．文献 [8, 10, 33, 34] 应用样条有限点法分析板壳的弯曲问题，文献 [13, 14, 35~37] 应用该法分析板壳的振动与屈曲问题，该法还可求解非线性问题，文献 [29] 应用该法分析板的几何非线性问题，文献 [38] 提出了应用样条有限点法分析高层建筑结构的几何非线性问题．该法所需的输入数据量更少，精度与效率均高，其弱点是对复杂结构的适应性差．为了处理不同的边界条件，何春发 [11] 提出了应用拉格朗日乘子法处理边界条件，从而增强了该法处理复杂边界问题的能力．

1985 年，广西人民出版社出版了秦荣的《结构力学的样条函数方法》一书 [39], 该书内容·

丰富，除了样条函数基本原理及基本方法外，有样条有限点法、样条有限元法、样条子域法、样条配点法等，还有结构振动、结构稳定、结构动力响应等问题.

2.4 样条有限条法

样条有限条法是由吴兹潜，张佑启等 [40] 首先提出来的，他们分别应用在板壳的弯曲问题上. 该法沿一个方向剖分为有限个条元，与其正交方向取样条插值函数作为条元的形函数，其他列式过程与通用有限元完全相同. 文献 [41~45] 应用样条有限条法分析箱形桥、平行四边形板、斜板、曲板桥等弯曲与振动问题. 其缺点是对复杂形结构适应性差. 但该法对集中荷载、中间支承与内力突变等问题适应性强. 文献 [40] 详细介绍了规则形结构，如弹性薄板、扁壳折板与箱形桥等结构的样条有限条法的分析与计算. 书中有丰富的算例及计算成果. 与有限元法相比，它具有推导简易、数据输入量小、未知量少、计算精度好等优点. 此外，样条有限条法能够统一、简单地处理各种复杂边界的问题.

2.5 二元 B 样条有限元法

以上所论的各种样条元，其样条插值函数的选择为：对一维问题，取一元一次、二次、三次等基样条；对二维问题，取乘积型或二重型一次、二次、三次等基样条来构造场函数.

但是，上述这类样条难以处理三角剖分问题. 刘效尧 [46,47] 提出了应用二元二次 B 样条函数构造位移场函数，建立了二元 B 样条有限元计算格式，并在薄板弯曲问题上，作了初步应用. 该法可以处理三角形剖分问题，对非规则形状单元的适应性比乘积型样条函数要强得多，这个领域还正在发展之中. 文献 [47] 详细深入地论述了结构近似分析中的样条有限元方法. 书中除了对一元样条、二重样条、二元样条作了详细深入地介绍外，还对梁、连续梁、格梁结构、斜张桥、弹性地基梁、弹性薄板、加劲薄板、弹性地基板、圆锥壳形体、双曲扁壳、薄壁结构和曲梁桥等弯曲、扭转与振动问题，建立了各型样条元法的计算格式，本书中的理论与方法，算例与数据均很丰富.

2.6 结构动力响应分析的样条有限元法

传统的结构动力响应时程分析方法，在国内外已有不少研究工作. 样条有限元法在结构动力响应问题中的应用，在国内有一些进展，在国外尚未见到有关报导. 文献 [48] 详细介绍了结构动力响应分析的样条有限元法，其中包括高层结构、板壳、厚壁结构、桥梁结构、水工结构及地下结构等动力响应分析. 文献 [49] 应用样条高斯配点法分析加劲板壳的动力响应问题，林文菁，徐次达 [50] 提出样条配点法分析结构动力响应的无条件稳定计算格式. 该法应用三次 B 样条函数构造时域函数，通过振型叠加法逐个计算各个振型的参振作用，计算精度与效率均比较高. 基于瞬时变分原理与状态空间理论，应用样条函数来构造动力位移场函数，可以建立一种样条状态变量法来分析结构动力响应问题 [51].

该法引入样条参数及其对时间的导数作为状态变量，建立的状态方程是一阶常系数微分方程组，状态方程的积分为矩阵指数的计算，动力响应的计算变得容易和高效. 所建立的状态变量递推算法，不需要求解线性方程，也不作降阶解耦处理，只作矩阵运算. 由于样条函数是具有解析与数值的双重特性，连续性强，逼近精度高，待求未知量少，计算精度与效率均高. 该法便于精细算法和平行算法相结合，使计算精度与效率得到极大的提高，因此，步长的选取完全不受结构自振特性的制约. 可计算多输入、多输出，时变系统与非线性系统等问题.

3 基于广义变分原理的多变量样条有限元法

3.1 多变量样条有限元法

上节介绍的样条有限元法只有一类基本变量，即位移分量，若要计算另一类变量如应力分

量，则需通过位移函数的若干阶导数或者物理关系式来求得. 一般来说，基本变量精度总是较佳，但另一类变量由于通过基本变量的导数而求得，因而丧失了一些精度. 近几年来，沈鹏程[52]应用乘积型二元三次 B 样条函数来构造多变量场函数，基于二、三类变量的广义变分原理，建立了多变量样条有限元法模型，在计算各类场变量时，无需进行求导，甚至不用物理关系，能直接求得各类场变量的近似解答，从而扩大了弹性结构理论的解题范围. F. Fujii, T. Hoshino[53]最早应用截断式的样条函数建立混合变量法求解板的特征值与弯曲问题. 文献 [54~56] 中，基于混合变分原理建立了多变量样条有限元法求解矩形板的弯曲、振动与稳定性问题；后来，将样条混合元法分别推广应用到弹性地基板[57]与壳体结构的弯曲、振动与稳定性问题[54,56,58]，由于应用乘积型二元三次 B 样条函数独立构造二类场函数，因而所求得的数值结果均有很高的精度，几乎与精确解完全一样. 三类变量广义变分原理[59,60]提出至今已有 40 多年，但是，还未曾有人应用该原理建立多变量有限元模型来求解三类场变量问题. 在文献 [61~64] 中，我们首次提出了应用胡 - 鹫津原理[59,60]与样条插值函数建立三类变量的样条有限元模型，求解了板壳结构的三类变量的近似值，其中包括广义位移 u, v, w 及其导数；广义力 $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y$ 与 M_{xy}；广义应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \chi_x, \chi_y$ 与 χ_{xy}. 对于双曲扁壳，应用样条函数，独立构造三类场函数分别为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{广义力} & \boldsymbol{M} = [M_x\ M_y\ M_{xy}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\delta}_1, \qquad \boldsymbol{N} = [N_x\ N_y\ N_{xy}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\delta}_2 \\ \text{广义应变} & \boldsymbol{S} = [-S_x - S_y - 2S_{xy}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\delta}_3,\ \boldsymbol{J} = [-J_x - J_y - J_{xy}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\delta}_4 \\ \text{广义位移} & \boldsymbol{\Delta} = [u\ v\ w]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\psi}_2\boldsymbol{\delta}_5\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

式中

$$\left.\begin{array}{lll}\boldsymbol{\delta}_1 = [\boldsymbol{S}_1\ \boldsymbol{S}_2\ \boldsymbol{S}_3]^{\mathrm{T}}, & \boldsymbol{\delta}_2 = [\boldsymbol{S}_4\ \boldsymbol{S}_5\ \boldsymbol{S}_6]^{\mathrm{T}}, & \boldsymbol{\delta}_3 = [\boldsymbol{S}_7\ \boldsymbol{S}_8\ \boldsymbol{S}_9]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\delta}_4 = [\boldsymbol{S}_{10}\ \boldsymbol{S}_{11}\ \boldsymbol{S}_{12}]^{\mathrm{T}}, & \boldsymbol{\delta}_5 = [\boldsymbol{S}_{13}\ \boldsymbol{S}_{14}\ \boldsymbol{S}_{15}]^{\mathrm{T}} & \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\psi} = \mathrm{diag}\,[1\ 1\ 1\ ]\boldsymbol{\phi}(x) \otimes \boldsymbol{\phi}(y) \\ \boldsymbol{\psi}_1 = \mathrm{diag}\,[1\ 1\ 2\ ]\boldsymbol{\phi}(x) \otimes \boldsymbol{\phi}(y) \\ \boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\phi}(x) \otimes \boldsymbol{\phi}(y)\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

其中，$\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \cdots, \boldsymbol{S}_{15}$ 均为待求常数向量

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{S}_1 = \left[\boldsymbol{S}_{-1}^1\ \boldsymbol{S}_0^1\ \boldsymbol{S}_1^1\ \cdots\ \boldsymbol{S}_i^1\ \cdots\ \boldsymbol{S}_N^1\ \boldsymbol{S}_{N+1}^1\right]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{S}_i^1 = \left[S_{-1i}^1\ S_{0i}^1\ S_{1i}^1\ \cdots\ S_{ii}^1\ \cdots\ S_{Ni}^1\ S_{N+1i}^1\right]^{\mathrm{T}}\end{array}\right\} \quad (i = -1, 0, 1, \cdots, M, M+1) \tag{3.4}$$

对于其他各常数向量 $\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \cdots, \boldsymbol{S}_{15}$ 与 $\boldsymbol{S}_1$ 相似；$\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2$ 均与三次 B 样条函数有关；$\otimes$ 为 Kronecker 记号，为两个矩阵乘积，即

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (a_{ij}\boldsymbol{B}) \quad (i, j = -1, 0, 1, \cdots, N, N+1)$$

应用胡 - 鹫津原理[59,60]就有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{F} & 0 & \boldsymbol{E} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{L} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \boldsymbol{\delta}_3 \\ \boldsymbol{\delta}_4 \\ \boldsymbol{\delta}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{Q} \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

式中，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{L}$ 均为矩阵，它们都与三次 B 样条函数有关，详见文献 [64, 52].

应用式 (3.5) 求解双曲扁壳的三类变量共 15 个未知量: 首先求出其常数向量 $S_1, S_2, \cdots, S_{15}$, 利用式 (3.1) 可分别求得广义力、广义应变和广义位移. 通常采用的网格 4×4, 6×6, 8×8, 10×10 可看出其收敛情况, 其自由度分别为 735, 1215, 1815 和 2535. 由于独立设置三类场函数, 在计算过程中, 既不应用物理关系, 又不用微分关系, 直接求解其三类场变量近似值, 对各类场变量均有很高的精度, 详见文献 [52]. 1997 年科学出版社出版了沈鹏程的《多变量样条有限元法》一书. 该书系统阐述了基于广义变分原理、状态空间理论和样条函数理论的多变量样条有限元法及其应用. 书中给出了梁、板、壳的弯曲, 振动与稳定问题的大量数据结果, 此外, 还安排了结构动力响应分析的状态空间法.

3.2 样条状态变量法分析结构动静力响应的统一问题

基于瞬时变分原理与状态空间理论, 应用样条函数来构造动力位移函数, 可以建立一种称为单变量样条状态变量法, 能分析结构动静力响应的统一问题; 若基于瞬时混合变分原理, 应用样条函数独立构造两类动力场函数即位移与力函数, 则可以建立另一种计算格式称为多变量样条状态变量法, 它可以同时求解结构多变量动静力统一问题. 文献 [51] 给出了上述方法的初步应用. 下面, 我们对双曲扁壳的动静力响应问题的求解作一简要介绍. 在齐次边界条件下, 双曲扁壳的瞬时混合能量泛函定义为

$$\Pi_{2p} = \iint_\Omega \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}w\mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}w\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2}\iint_\Omega \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{-1}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2}\iint_\Omega \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b^{-1}\boldsymbol{M}\mathrm{d}\Omega - \iint_\Omega (p_z - c\dot{w} - \rho\ddot{w})w\mathrm{d}\Omega \tag{3.6}$$

应用乘积型二元三次 B 样条函数来构造双曲扁壳二类场函数分别为

广义力场函数

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}(x,y,t) &= [M_x(x,y,t), M_y(x,y,t), M_{xy}(x,y,t)]^{\mathrm{T}} = \\ &\quad \mathrm{diag}\,[\boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y) \quad \boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y) \quad \boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y)]\boldsymbol{r}_1(t) \\ \boldsymbol{N}(x,y,t) &= [N_x(x,y,t), N_y(x,y,t), N_{xy}(x,y,t)]^{\mathrm{T}} = \\ &\quad \mathrm{diag}\,[\boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y) \quad \boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y) \quad \boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y)]\boldsymbol{r}_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

位移场函数

$$w(x,y,t) = \boldsymbol{\phi}(x)\otimes\boldsymbol{\phi}(y)\boldsymbol{d}(t)$$

式中

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}^1(t) \\ \boldsymbol{b}^1(t) \\ \boldsymbol{c}^1(t) \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}^2(t) \\ \boldsymbol{b}^2(t) \\ \boldsymbol{c}^2(t) \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

$\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)$ 和 $\boldsymbol{d}(t)$ 均为与时间有关的样条参数向量, 为了简便起见, 下面将 t 符号省略. 其中

$$\boldsymbol{\phi}(x) = [\phi_{-1}(x) \quad \phi_0(x) \quad \phi_1(x) \ \cdots \ \phi_N(x) \quad \phi_{N+1}(x)] \quad (x = x, y) \tag{3.9}$$

其具体算式详见文献 [65], $\otimes$ 为 Kronecker 符号.

将式 (3.7) 代入式 (3.6), 应用瞬时混合变分原理, 得双曲扁壳动静力响应的系统方程为

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{S}_b & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_p & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

式中, $\boldsymbol{S}_b, \boldsymbol{S}_p, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{M}$ 均为矩阵表达式, 都与三次 B 样条函数有关 [51].

根据式 (3.10), 可得

$$r_1 = S_b^{-1}Hd, \quad r_2 = S_p^{-1}Qd \tag{3.11}$$

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F \tag{3.12}$$

$$K = (H^{\mathrm{T}}S_b^{-1}H + Q^{\mathrm{T}}S_p^{-1}Q) \tag{3.13}$$

$$F = \iint_{\Omega} p_z \phi^{\mathrm{T}}(x) \otimes \phi^{\mathrm{T}}(y)\mathrm{d}\Omega \tag{3.14}$$

现取样条参数 d 及其对时间的一阶导数 $\dot{d}$ 为状态变量, 则式 (3.12) 转化为样条状态变量方程, 即有

$$\dot{q} = Dq + P, \quad q = \begin{Bmatrix} d \\ \vdots \\ \dot{d} \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -M^{-1}K & \cdots & -M^{-1}C \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ M^{-1}F \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

应用状态空间法求解式 (3.15), 得状态变量 d 与 $\dot{d}$, 根据式 (3.12) 求得 $\ddot{d}$. 将 d 代入式 (3.11) 分别求出 r_1 与 r_2, 再由式 (3.7) 分别求得位移、速度、加速度, 弯矩与薄膜力的动力响应量. 若将式 (3.10) 右端项中, 取 P 与时间无关, 不计质量与阻力, 则可求得静力问题的响应值. 在样条状态变量法中, 对空间域应用样条有限元; 对时间域, 应用状态空间法, 该法是我们最近提出来的, 在求解结构动静力响应的统一问题上, 很有发展前景.

4 结论与展望

综上所述, 20 多年来, 计算力学中的样条有限元法已获得了长足的发展; 在弹塑性力学、固体力学、流体力学、岩土力学、地基与基础、结构动静力学、厚薄板壳、叠层板壳、加劲板壳、高层建筑结构、线性与非线性问题、动力学中的多输入与多输出和时变与时不变系统等问题, 都得到了应用与发展. 其次, 从单变量发展到多变量问题 [57,58,61~64,66,67]; 从规则区域发展到非规则区域问题 [12,26,30,31]; 从静力问题发展到振动、稳定与动力响应问题 [24,33,35,36,50,51,55,56,68~71]; 从结构问题发展到流体等非结构问题 [5,32]; 从线性发展到非线性问题等 [29,72,73]. 到目前为止, 根据不完全的资料初步统计, 在国内外期刊与学术会议上, 大约发表了 200 余篇有关样条有限元法的论文, 本文摘录了数十篇; 在国内已出版了有关样条有限元法方面的书籍 9 本 [2,39,40,47,48,52,65,74,75] 和 2 套计算程序 [40,65]. 有些文献未收录在这里, 敬请读者谅解.

众所周知, 在工程、物理与各科学与技术领域中的问题, 其数学模型大多可以归结为偏微分方程 (组) 的边初值问题, 若能找到相应的变分原理, 特别是广义变分原理, 就可以建立与应用多变量样条有限元法直接求解各种问题的多类场变量的近似值, 这是很有发展前景的.

对暂态历程问题, 沿空间域可采用有限元、样条元等离散技术; 沿时间域采用解析的状态空间法, 还可以采用精细算法与平行算法, 使计算精度与效率得到极大的提高.

对于两类场变量 (应力与位移) 的结构动静力响应的统一问题, 基于混合变分原理与状态空间理论, 应用样条元建立动静力响应的统一方程, 因为独立设置二类场函数, 故对二类变量

均有较高的计算精度．对多输入与多输出，时变与时不变，线性与非线性等系统都将有发展前景．

随着计算数学中的多元样条函数理论研究的进展，应用多元样条构造任意单元形体的形函数，使样条有限元发展到复杂结构上的应用，可望不久的将来能获得突破性进展，从而使得计算力学中的样条有限元法进一步深入发展，前景令人鼓舞．

参 考 文 献

1 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 1977

2 龙驭球．新型有限元引论．北京：清华大学出版社， 1992

3 Kardestuncer H 主编．有限元法手册．诸德超，傅子智等译．北京：科学出版社， 1996

4 Antes H. Bicubic fundamental splines in plate bending. *Int J Num Meth Eng*, 1974, 8: 503~511

5 Cheri G, Cella P. Spline-blended approximation of Hartmann's flow. *Int J Num Meth Eng*, 1974, 8: 529~536

6 石钟慈．样条有限元．计算数学， 1979 (1): 50~72

7 何广乾，周润珍，林春哲．样条函数法在解板壳问题中的应用．建筑结构学报， 1981, 2(2): 1~9

8 秦荣．样条有限点法．数值计算与计算机应用， 1981 (2): 68~81

9 袁驷．样条矩形元．计算结构力学及其应用， 1984, 1(2): 41~47

10 王建国，沈鹏程．样条函数法解圆柱壳问题．土木工程学报， 1984, 17(2): 75~85

11 何春发．样条有限点法的注记．数值计算与计算机应用， 1984 (1): 1~15

12 朱明权．解任意四边形板弯曲问题的样条有限元法．计算数学， 1987 (1): 23~42

13 朱述尧．用样条有限点法解薄板动力问题．上海力学， 1981, 2(4): 23~29

14 蒋持平．用样条有限条法分析中厚度矩形板的自由振动和稳定问题．振动与冲击， 1983 (3): 24~30

15 Fan S C, Cheung Y K. Analysis of shallow shells by spline finite strip method. *Engng Struct*, 1983 (5): 255~263

16 刘效尧．样条单元族及其在桥梁结构中的应用．土木工程学报， 1983 (2): 10~20

17 Boor C D. On calculation with B Splines. *Approximation Theory*, 1972 (6): 50~62

18 Antes H. Plattenberechnung mit fundamental splinefunktionen. *ZAMM*, 1974, 54: 182~183

19 Antes H. Fundamental splinefunktionen bei einer variations verfahren zur balkenberechnung. *Vissenschaftli Che Zeitschrift der Hochschule fur Architektur und Bauwesen Weimar*, 1972, 19: 131~134

20 Antes H. Splinefunktionen bei der plattenbercchnung mittels Spannungfunktionen. *Vissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule fur Architektur und Bauwesen Weimar*, 1975, 22: 135~137

21 Soni S R, Rao K S. Vibration of non-uniform rectangular plates: a spline technique method of solution. *J Sound and Vibration*, 1974, 35: 35~45

22 Soni S R. Quintic splines in vibrations of nonuniform annular plates. *Int J Computers & Structures*, 1974 (4): 1269~1279

23 Raggett G F, Stone J A R, Wilson P D. On the use of cubic splines to solve certain circular plate problems. *Int J Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974 (4): 39~45

24 Shen P C, Huang D D, Wang Z M. Static, vibration and stability analysis of stiffened plates using B spline functions. *Int J Computers & Structures*, 1987, 27(1): 73~78

25 Wang Gang, Thomas Hsu C T. Static and dynamic analysis of arbitrary quadrilateral flexural plates by B3 spline functions. *Int J Solids & Structures*, 1994, 31(5): 657~667

26 袁驷．应力分析的样条单元． [博士论文]．清华大学， 1984

27 范重，龙驭球．样条中厚壳单元．特种结构， 1990 (2): 3~9

28 Fan Zhong, Long Yuqiu. A Linear analysis of tall buildings using spline element. *Engng struct*, 1991, 13: 27~33

29 范重，龙驭球．几何非线性样条单元．航空学报， 1990, 11(9): 521~525

30 Fan S C, Luah M H. New spline finite element for plate bending. *ASCE J Engineering Mechanics*, 1990, 116(3): 709~720

31 Fan S C, Luah M H. New spline finite element for analysis of shells of revolution. *ASCE J Engineering Mechanics*, 1992, 118(6): 1065~1081

32 Ali A H, Gardner G A, Gardner L R T. A Collocation solution for Burgers equation using cubie B spline finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, 100(3): 325~338

33 Shen P C, Wang J G. Static analysis of cylindrical shells by using B spline functions. *Int J Computers & Structures*, 1987, 25(6): 809~816

34 Shen P C, Wang J G. A semianalytical method for static analysis of shallow shells. *Int J Computers & Structures*, 1989, 31(5): 825~831

35 Shen P C, Wang J G. Solution of governing differential equations of vibrating cylindrical shells by using B spline functions. *Int J Numerical Methods for Partial Differential Equations.* 1986 (2): 173～185
36 Shen P C, Wang J G. Vibration analysis of flat shells by using B spline functions. *Int J Computers & Structures,* 1987, 25(1): 1～10
37 沈鹏程，王建国. 样条函数法分析扁壳振动及其在微型机上的实施. 振动与冲击， 1987 (2): 64～69
38 秦荣，梁爱明. 高层框架分析的新方法. 工程力学， 1988, 5(2): 35～45
39 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 南宁：广西人民出版社， 1985
40 吴兹潜，张佑启，范寿昌. 结构分析的样条有限条法. 广州：广东科技出版社， 1985
41 Cheung Y K, Fan S C. Static analysis of right box girder bridges by spline finite strip method. In: Proc Instn Civil Engnrs, 1983. Part 75: 311～323
42 Chen M J, Tham L G, Cheung Y K. Spline finite strip for parallelogram plate. In: Proc of Int Conf on Accuracy Estimates and Adaptive Reinements in Finite Element Computation. Lisbon, Portugal, 1984: 95～104
43 Fan S C, Cheung Y K. Flexural free vibrations of rectangular plates with complex supported conditions. *J Sound and Vibration,* 1984, 93: 81～94
44 Than L G, Li W Y, Cheung Y K, Chen M J. Bending of skew plates by spline finite strip method. *Int J Computers & Structures,* 1986, 22: 31～38
45 Cheung Y K, Than L G, Li W Y. Application of spline finite strip method in the analysis of curved slab bridges. In: Proc ASCE, Journal of Eng Div, 1986, 112: 43～54
46 刘效尧. 二元 B 样条有限单元法. 数值计算与计算机应用， 1988 (3): 129～138
47 刘效尧. 样条函数与结构力学. 北京：人民交通出版社， 1990
48 秦荣. 计算结构动力学. 南宁：广西师范大学出版社， 1997
49 Shen P C, Huang D D. Dynamics analysis of stiffened plates and shells using spline Gauss collocation method. *Int J Computers & Structures,* 1990, 36(4): 625～629
50 林文菁，徐次达. 样条配点法分析结构动力响应的无条件稳定计算格式. 力学学报， 1988, 20(4): 353～362
51 沈小璞，余景平，陈荣毅. 样条元状态空间法分析结构动力响应问题. 合肥工业大学学报， 1998, 12(3)
52 沈鹏程. 多变量样条有限元法. 北京：科学出版社， 1997
53 Fujii F, Hoshino T. Discrete and non-discrete mixed methods applied to engenvalue problems of plates. *J Sound and Vibration,* 1983, 87(4): 525～535
54 Shen P C, Kan H B. The multivariable spline element analysis for plate bending problems. *Computers & Structures,* 1992, 40: 1343～1349
55 Shen P C. Stability analysis for plates using multivariable spline element method. *Computers & Structures,* 1992, 45(5/6): 1073～1077
56 Shen P C. Vibration analysis for plates using multivariable spline element method. *Int J Solids & Structures,* 1992, 29: 3289～3295
57 沈鹏程，何沛祥. 多变量样条有限元法分析弹性地基上矩形板的弯曲、振动与稳定. 应用数学与力学， 1997, 18(8): 725～734
58 沈鹏程，余景平，查毅军. 样条混合元法解板壳问题. 计算物理， 1995, 12(4): 515～522
59 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京：科学出版社， 1981
60 Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1975
61 沈鹏程，何沛祥. 基于三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法. 见：第三届全国计算力学学术会议论文集. 北京：科学出版社， 1992. 232～235
62 Shen P C, He P X. Bending analysis of plates and spherical shells by multivariable spline element method based on generalized variational principle. *Int J Computers & Structures,* 1995, 55(1): 151～157
63 沈鹏程，何沛祥. 多变量样条有限元法. 固体力学学报， 1994, 15(3): 234～243
64 沈鹏程，何沛祥，沈小璞. 基于胡 - 鹫津原理的多变量样条有限元法分析扁壳问题. 土木工程学报， 1996, 29(4): 10～20
65 沈鹏程. 结构分析中的样条有限元法. 北京：水利电力出版社， 1992
66 沈鹏程，何沛祥，沈小璞. 多变量样条元法分析中厚板的弯曲. 工程力学， 1993 (增刊): 219～224
67 沈鹏程. 多变量样条有限元法的进展. 工程力学， 1995 (增刊): 163～169
68 Mizusawa T, Kajita T, Naruoka M. Vibration of skew plates by using B spline functions. *J Sound and Vibration,* 1979, 62: 301～308
69 Mizusawa T, Kajita T, Naruoka M. Vibration of stiffened skew plates by using B spline functions. *Int J Computers and Structures,* 1979, 10: 821～826
70 Mizusawa T, Kajita T, Naruoka M. Buckling of skew plate structures using B spline functions. *Int J Num Meth Engng,* 1980, 15: 87～96

71 Mizusawa T, Kajita T, Naruoka M. Vibration and buckling of plates of abruptly varying stiffnesses. *Int J Computers and Structures*, 1980, 12: 689~693

72 Fujii F. A simple mixed formulation for elastica problems. *Int J Computers & Structures*, 1983, 17: 79~88

73 宋卫平. 中心分布压力作用下圆底扁维壳的大挠度问题. 工程力学, 1988, 5(2): 21~28

74 秦荣. 样条边界地法. 南宁: 广西科技出版社, 1988

75 徐次达. 固体力学加权残值法. 上海: 同济大学出版社, 1987

THE DEVELOPMENTS OF SPLINE FINITE ELEMENT METHOD IN COMPUTATIONAL MECHANICS

Shen Pengcheng

Computer Center, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

He Peixiang

Dept. of Mechanics and Mechine, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract This paper reviews the developments of the spline finite element method based on the variational principle, the theory of spline function and the state space theory during the last twenty years. It includes the application of cut spline function in mechanics, as an early development, the advantages and disadvantages of spline finite element, spline finite point and spline element, the application of multivariable spline finite element method and spline state variable method in dynamic response.

Keywords variational principle, spline function, state space theory, spline finite element method

《力学进展》加入"中国期刊网"的声明

为适应我国信息化建设需要，扩大作者学术交流渠道，本刊已加入《中国学术期刊 (光盘版)》和"中国期刊网". 作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付. 如作者不同意将文章编入该数据库，请来稿时声明，本刊将做适当处理.

《力学进展》编辑部