第 29 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol. 29 No. 1
1999 年 2 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1999

疲劳裂纹扩展随机模型研究近期进展*

蒋鸣晓† 朱位秋
浙江大学力学系，杭州 310027

摘 要 自 1979 年 Virkler 等人发表揭示疲劳裂纹扩展的统计性质的实验结果以来，各国学者相继提出了多个疲劳裂纹扩展的随机模型. 本文从数学与物理角度对这些模型作了概括与评述，指出了各个模型之间的关系，并对今后应作的进一步研究提出了我们的看法.

关键词 疲劳裂纹扩展，随机模型，疲劳寿命

1 引 言

金属构件的疲劳裂纹扩展 (FCG) 呈现出很强的分散性，即使在严格控制的实验室条件下，宏观上不存在任何差别的试样所得到的实验结果也会相差很大. 这方面最著名的实验是 VHG 实验 [1] 和不同应力水平下的 GD 实验 [2]. 从实验结果可以看出，疲劳裂纹扩展样本路径的分散性很大，并且出现交织，这启发人们用随机的概念和方法研究这一问题.

1989 年， Kozin 和 Bogdanoff[3] 对这一领域的研究给出了专题评述，指出：为了解疲劳裂纹随机扩展 (RFCG)，迫切需要大子样实验；脱离实验或者只依赖于小样本试验来建模是很容易的，重要而困难的是建立一个被实验从多角度证实的模型；只以裂纹长度为进化变量的随机扩展模型将遇到一些难以消除的障碍，包括裂纹长度和另外一个进化变量 (譬如描述裂尖塑性区的量) 的二维模型将是未来 RFCG 建模的有力工具. 1992 年， Sobczyk 和 Spencer 的专著 [4] 系统并且比较全面地介绍和评论了诸多 RFCG 建模方法. 正如 Newby[5] 所指出，该专著过于理论化. 另外，近几年 RFCG 的研究又有了一些新的进展.

国内在这方面也进行过比较深入的理论研究，比如文献 [6, 7]. 大子样实验 [8] 为 RFCG 研究提供了新的数据.

本文将评述近年来这一领域的研究进展，并对未来的研究提出一些看法.

2 随机模型

2.1 概率进化模型

这类模型直接研究作为时间的函数的累积损伤的概率结构，最著名的是 B-Model[9]. 该模型用任务循环 (DC) 将时间离散，并将损伤分割成状态 $i = 1, 2, \cdots, b$, b 表示损坏状态. 这样，

收稿日期：1996-03-01, 修回日期：1998-05-11
* 国家自然科学委员会重大基金和机械强度与振动国家重点实验室开放基金资助项目
† 现地址为：The Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA

损伤累积过程可以用一个离散时间、离散状态 Markov 链来描述，任一时刻的损伤状态完全由初始损伤状态和每一个 DC 循环概率转移矩阵决定

$$\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_{t-1}\boldsymbol{P}_t \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{p}_0=\{\pi_i\}$, π_i 表示 $t=0$ 时，损伤处于状态 i 的概率，并且满足 $\pi_i\geq 0$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{b}\pi_i=1$; $\boldsymbol{p}_t=\{p_t(i)\}$, $p_t(i)$ 表示第 t 个 DC 循环时损伤处于状态 i 的概率，并且满足 $p_t(i)\geq 0$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{b}p_t(i)=1$; $\boldsymbol{P}_j$ 是第 j 个 DC 循环的概率转移矩阵. 在 Markov 链为平稳、单位跳跃 (unit-jump) 时，任一循环的概率转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & p_{b-1} & q_{b-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中，p_i 为在一个 DC 循环内损伤滞留于原状态 i 的概率，q_i 为损伤跳跃到状态 $i+1$ 的概率，并且 $p_i+q_i=1$. 与损伤过程有关的各种随机量的统计信息均可获得.

文献 [10, 11] 在数学处理上进一步完善 B-model. Madsen 等 [12] 讨论了推广 B-model 的可能性与实用性，指出仍以单位跳跃的 B-model 最为实用有效.

B-model 可以非常好地描述各种随机损伤 (包括 RFCG) 的寿命分布和损伤状态分布. 对单位跳跃的 B-model, 各损伤状态之间的过渡时间是相互独立的 [13], 这与 VHG 实验给出的规律是矛盾的 [14], RFCG 是一个相关性很强的过程，不能用单位跳跃的 B-model 描述. 文 [14] 将 B-model 进行改进，使之具有非 Markov 性，这使建模复杂化，应用性降低. 最近，Rocha 与 Schueller[15] 在均匀随机场的假设下估计了裂纹扩展的相关长度，指出，当离散化时间区间远大于此相关长度时，才可采用 Markov 链模型.

Ghonem 和 Dore[16] 提出了一个不连续的 Markov 模型，指出，只要已知裂纹扩展的平均速率，就可以得到从某种程度上反映了裂纹扩展分散性大小的等概率裂纹扩展曲线族，并用三种不同载荷条件下的 RFCG 实验进行验证 [2]. 但是该模型不能给出任一循环加载后裂纹长度的概率分布以及任一指定裂纹扩展区段上的疲劳寿命的统计信息.

2.2 连续的 Markov 过程模型

假设裂纹扩展过程由以下方程描述

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=f(A,\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

式 (3) 中，$\boldsymbol{r}$ 为不确定的影响因素，它由材料性质决定，$A(t)$ 表征裂纹长度，是一个随机过程. Krausz[17] 指出，即使载荷等外部环境因素是确定的，材料具有均匀的特性，由于裂纹扩展在本质上是分子、原子的不规则热运动引起的，$A(t)$ 仍是随机过程，并且推导了均匀材料下的随机模型. 但由于材料性质完全均匀是不可能的，裂纹扩展的随机性还因裂尖抗裂特性的不确定而引起.

将式 (3) 改写为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=f(A,\overline{r},t)+g(A,t)X(t) \tag{4}$$

式中，$\overline{r}=E[r]$, $E[\cdot]$ 为期望算子，f 和 g 为确定性的函数，$X(t)$ 为随机过程，$f(A,\overline{r},t)$ 表征完全均匀材料结构背景上的裂纹长大速率，$g(A,t)X(t)$ 表征不均匀结构背景引起的裂纹长大速率的随机扰动. 若 $X(t)$ 的相关时间非常短，可视之为单位强度的 Gauss 白噪声 (设其强度已归入 g 内) $N(t)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=f(A,\overline{r},t)+g(A,t)N(t) \tag{5}$$

或

$$\mathrm{d}A=f(A,\overline{r},t)\mathrm{d}t+g(A,t)\mathrm{d}W(t) \tag{6}$$

式中，$W(t)$ 为单位维纳过程. 式 (6) 只是一个形式上的方程，其具体含义取决于恰当的解释. 方程 (6) 应视为 Stratonovich 随机微分方程，而不可理解为 Ito 随机微分方程，这是因为如果式 (6) 为 Ito 方程，两侧做期望运算，将得到 $E[\mathrm{d}A/\mathrm{d}t]=f(A,\overline{r},t)$ 的错误结论，而从式 (3) 可知

$$E\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right]=\overline{f(A,r,t)}\neq f(A,\overline{r},t) \tag{7}$$

将式 (6) 重新写为

$$S:\mathrm{d}A=f(A,\overline{r},t)\mathrm{d}t+g(A,t)\mathrm{d}W(t) \tag{8}$$

与之等价的 Ito 随机微分方程为 [18]

$$I:\mathrm{d}A=\overline{f(A,r,t)}\mathrm{d}t+g(A,t)\mathrm{d}W(t) \tag{9}$$

式中，$S:$ 和 $I:$ 分别表示 Stratonovich 和 Ito 意义上的随机微分方程，两者之间的关系为

$$\overline{f(A,r,t)}=f(A,\overline{r},t)+\frac{1}{2}g(A,t)\frac{\partial g(A,t)}{\partial A} \tag{10}$$

式 (10) 中右端第二项可视为由于不均匀结构背景而引起的所谓 “噪声诱发偏移”(noise-induced shift). 一般地，$\overline{f(A,r,t)}$ 由实验数据拟合得到. 可将它表达为

$$\tilde{f}(A,\tilde{r},t)=\overline{f(A,r,t)} \tag{11}$$

r 为拟合参数，$\tilde{f}$ 的例子如 Paris 公式 [19], f 函数的例子如邢修三 [20] 由位错机理给出的裂纹长大速率公式. 我们可以这样理解，$\tilde{f}$ 是属于宏观范畴，而 f 是属于微观理论范畴的. 由式 (9) 可知，此时 RFCG 被模型化为一维 markov 过程.

与式 (6) 对应的 Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK) 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}(mp)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\sigma^2 p) \tag{12}$$

式中，$p=p(a,t\mid a_0)$ 为裂缝长度的转移概率密度，漂移系数和扩展系数为

$$m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[A(t+\Delta t)-A(t)\mid A(t)=a]}{\Delta t}=\tilde{f}\,|_{A=a} \tag{13}$$

$$\sigma^2=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E\{[A(t+\Delta t)-A(t)]^2\mid A(t)=a\}}{\Delta t}=g^2\,|_{A=a} \tag{14}$$

下面通过文献评述揭示漂移系数和扩散系数是如何获得的.

(1) 通过 f 得到 RFCG 模型 [7,20]

邢修三认为：疲劳断裂过程是一非平衡的不可逆的动力学过程，位错滑移及其相互作用是微裂纹成核长大的微观物理基础，微裂纹演化过程是随机性的．他从位错机理出发，得到了函数 f 的表达式 (在文 [20] 中称为迁移长大速率)．他认为：通常，在 FPK 方程中，当迁移速率与涨落系数的起因截然不同时，两者之间不存在确定的函数关系；但当两者起因于同一事物的不同方面时，就应存在确定的函数关系，对所讨论的疲劳裂纹长大这样的非平衡态问题，虽然迁移长大来自平均结构背景，涨落长大来自不均匀涨落，实际上两者都来自实际金属的微观结构，因而密切相关．按此思想经数学推导，得到涨落系数 (漂移系数)．此文将引入的白噪声视为 Stratonovich 白噪声，与我们前面的讨论是一致的．

(2) 通过 $\widetilde{f}$ 来得到 RFCG 模型 [21]

对损伤演化随机微分方程

$$\mathrm{d}D = f(D,t)\mathrm{d}t + G(D,t)\mathrm{d}W(t) \tag{15}$$

Woo 和 Li 认为，$f(D,t)$ 应等同于具有确定性形式的损伤演化方程 (当 D 代表裂纹长度时，函数 f 由断裂力学中的疲劳裂纹扩展公式给出)；由于在损伤力学中，损伤变量 D 是作为统计平均值引入的，具有确定性形式的损伤演化方程就已经包括了由于不平均结构背景而引起的"噪声诱发偏移"，式 (15) 被视为 Ito 随机微分方程，这与我们前面的讨论也是一致的．另外，他们还假定 $f(D,t)$ 与 $G(D,t)$ 之比为常数．

(3) Sobczyk[22] 采用基于断裂力学的反映平均趋势的 FCG 方程

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \widetilde{f}(a,\widehat{\boldsymbol{r}},t) \tag{16}$$

注意，上式不代表 $E\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right]$，不同于式 (7) 与 (11)，只保留了 $E\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right]$ 方程的形式，$\widehat{\boldsymbol{r}}$ 为待定参数，将其右端乘一均值为 m_x 的平稳高斯白噪声 $X(t)$，得随机化方程

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \widetilde{f}(A,\widehat{\boldsymbol{r}},t)X(t) = \widetilde{f}(A,\widehat{\boldsymbol{r}},t)[m_x + \widetilde{X}(t)] \tag{17}$$

其中，$E[\widetilde{X}(t)] = 0,\ m_x = E[X(t)]$．Sobczyk 将上式解释为 Stratonovich 随机微分方程，即

$$S: \mathrm{d}A = \widetilde{f}m_x\mathrm{d}t + \widetilde{f}\sigma\mathrm{d}W(t) \tag{18}$$

式中，σ 为 $\widetilde{X}(t)$ 的强度．与式 (18) 相应的 Ito 方程为

$$I: \mathrm{d}A = \overline{f}\mathrm{d}t + \widetilde{f}\sigma\mathrm{d}W(t) \tag{19}$$

式中

$$\overline{f} = \widetilde{f}m_x + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{f}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial A} \tag{20}$$

参数 $\widehat{\boldsymbol{r}}$ 和 σ 要由实验数据最终获得．

Lin 和 Yang[23] 将式 (17) 中的 $X(t)$ 放松为相关时间短的随机过程，运用随机平均原理 [24,25]，所得模型与 Sobczyk 的模型属于同一类型．

关于 Ito 和 Stratonovich 随机微分方程的讨论可参阅文献 [26]．

总之，将 RFCG 过程中的随机扰动视为白噪声，裂纹扩展为扩散的 Markov 过程，数学处理方便完善，可以获得任意时刻裂纹长度的概率分布以及任意裂纹扩展段上的寿命分布．但正如 Kozin 和 Bogdanoff[27] 所指出，由于此类模型所给出的是独立增量过程，这与 VHG 实验规

律明显矛盾，至少它对于 VHG 试验所用材料的 RFCG 分析是不适用的. Newby[28] 证明了此类连续的 Markov 过程与单位跳跃的离散的 Markov 过程模型是等价的.

2.3 相关过程模型

对一个 RFCG 模型，不仅要求它能够很好地描述某个 RFCG 实验结果，还应具有较好地预测在实验条件发生变化时的 RFCG 行为的能力. Langley[29] 将 RFCG 模型分类评述，着重讨论了各种模型在改变初始裂纹长度时对疲劳寿命方差的预测能力，发现一个具有较好描述能力的模型，其预测能力可能很差，由他给出的具有最佳预测能力的模型对疲劳寿命方差的预测误差仍达 23% 之多.

为了描述一个相关性很强的 RFCG 过程，并使模型具有较强的预测其它实验及使用条件下 RFCG 分散性的能力，一个合理的推广是将式 (4) 中的 $X(t)$ 构造为强相关的过程.

Spencer 等提出了一个两态模型 [30~32]，引入辅助随机过程 $Z(t)$ 和非负函数 g，令 $X(t) = g[Z(t)]$，将 RFCG 用如下常微分方程组表达

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = F[A(t)]g[Z(t)] \\ &\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = Q[Z(t)] + \xi(t) \\ &A(0) = A_0, \quad Z(0) = Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中，$\xi(t)$ 为以 $2/\pi S_0$ 为强度的高斯白噪声，$[A(t), Z(t)]^{\mathrm{T}}$ 为一扩散的矢量 Markov 过程，通过函数 Q 和 g 的选取，可保证 $A(t)$ 具有实验数据所给出的相关特性. 针对疲劳裂纹扩展过程的非减性，并将 Q 取为最简单的线性函数，设

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = F[A(t)]\exp[Z(t)] \\ &\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = -\zeta Z(t) + \xi(t) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中，ζ 是过程 $Z(t)$ 的相关系数，对上式作 Ito 或 Stratonovich 解释均可，其对应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}[F(a)g(z)p] - \frac{\partial}{\partial z}[Q(z)p] + \pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{23}$$

式中，$p = p(a, z, t \mid a_0, z_0)$ 为矢量 $[A, Z]^{\mathrm{T}}$ 的转移概率密度. 进一步可以得到疲劳可靠性函数和疲劳寿命的矩所满足的方程，应用混合差分法可有效求解.

如将 $Z(t)$ 的平稳过程段作为式 (22) 的辅助过程，则对应于 Yang 等人的平稳对数正态随机过程模型 [33]. 在那里 RFCG 分析是通过 Monte Carlo 模拟和一阶二次矩法获得的.

相关模型具有非常好的描述与预测不同裂纹扩展区段上疲劳寿命分散性的能力. 但是由于 ζ 和 S_0 依赖于实验载荷水平，而关系如何从现有的实验资料 [2] 无法得到，这样，在目前该模型尚无法做到由一种载荷下的实验获得的模型参数预测不同载荷水平下的 RFCG[32].

Lin 等 [34] 提出了一个将 $A(t)$ 视为非扩散过程的模型，在那里，$X(t)$ 被假设为随机脉冲序列，应用累积量截断方法获得疲劳寿命的矩. 同样，我们无法知道 $X(t)$ 中的模型参数与试验条件的关系，故也无法用来预测.

基于对数正态随机过程模型与二阶近似，Yang 与 Manning[35] 最近提出了一个简单的随机裂纹扩展分析方法，该法是对数正态随机变量模型的推广，它保持了对数正态随机变量模型的简单性，又计及了裂纹扩展的相关性. 与实验结果的比较表明，该法比对数正态随机变量模型更为精确，用起来也很容易.

2.4 计及两种分散性的模型

从 VHG 实验结果可以知道，在严格控制的实验条件下的 RFCG 分散性表现为，(1) 低频现象：裂纹有保持最初扩展趋势的倾向； (2) 高频现象：每一 FCG 样本都是非光滑的． 2.3 节中介绍的模型将两种随机混合在一起．分别考虑两种随机性有可能对 RFCG 有进一步的认识，并构造出具有更好描述和预测能力的模型．将 RFCG 过程用如下方程表达

$$\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = f(A, t \mid \Theta)X(t, A) \tag{24}$$

式中，随机向量 Θ 计及低频现象，随机过程 $X(t, A)$ 计及高频涨落．

Ortiz 和 Kiremidjian[36] 针对 VHG 实验运用时间序列分析方法研究 $X(t, A)$ 的结构，在文献 [37] 中分析了疲劳寿命的低阶矩．Ditlevsen[38] 将式 (24) 离散化，并采用 Paris-Erdorgan 公式，推导得到单个试件的裂纹在给定区段内的扩展循环周数服从逆高斯 (Inverse Gaussian) 分布，并用 VHG 实验验证 [39]．Dolinski[40,41] 的模型具有初步预测不同载荷水平下的 RFCG 的能力．对 $X(t, A) = X(A)$ (模型 1) 与 $X(t, A) = X(t)$ (模型 2) 两种情形，本文作者 [42] 用随机平均法与全概率公式研究了方程 (24)，得到了一定初始裂纹长度条件下，裂纹长度与循环周数方差之间关系的解析表达式．并与 VHG 实验结果及 Langley[29] 给出的具有最佳预测能力的模型作了比较 (见图 1～ 图 3)，由图可见，本文作者提出的这两

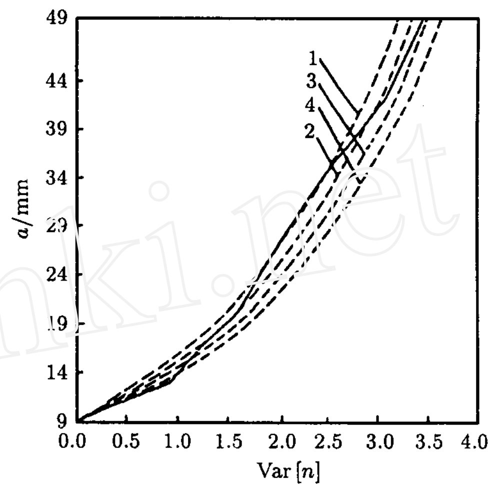

图 1 模型 1 预测的裂纹从初始长度 $a_0 = 9\,\mathrm{mm}$ 扩展到 a 所需循环次数方差 ($\times10^{-8}$)
实线：实验结果；虚线 1: $\widetilde{\sigma}^2 = 1.5\times10^{-5}$；虚线 2: $\widetilde{\sigma}^2 = 2.0\times10^{-5}$；虚线 3: $\widetilde{\sigma}^2 = 2.5\times10^{-5}$；虚线 4: $\widetilde{\sigma}^2 = 3.0\times10^{-5}$．$\widetilde{\sigma}^2$ 为模型 1 中的一个参数

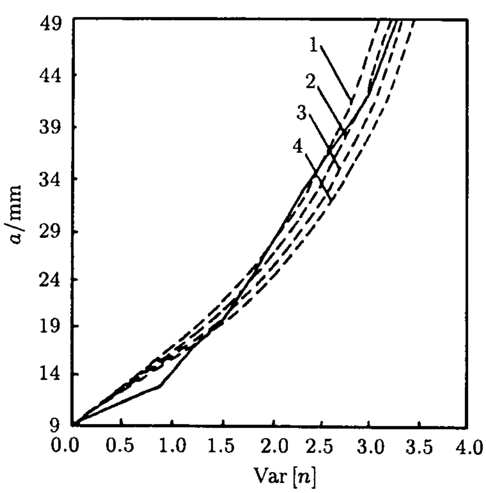

图 2 模型 2 预测的裂纹从初始长度 $a_0 = 9\,\mathrm{mm}$ 扩展

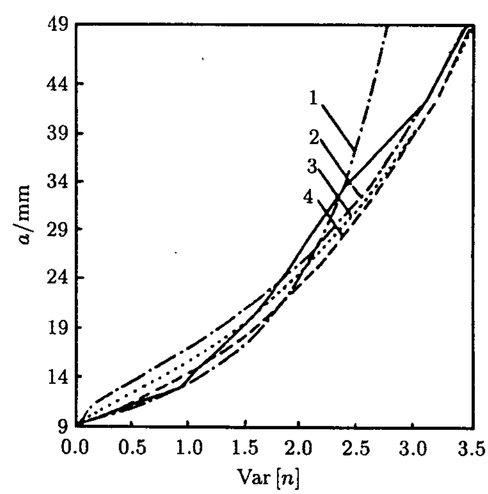

图 3 裂纹从初始长度 $a_0 = 9\,\mathrm{mm}$ 扩展到 a 所需循环

[redacted]

个模型比 Langley 的模型与实验更为一致，也具有更强的预测能力.

计及两种分散性的方法还被用来分析低周 RFCG 过程 [43,44].

2.5 基于原子键破裂的模型

疲劳裂纹扩展的经验关系 (现象学模型) 一般只在测量与试验过的范围内适用，用经验方程外插是危险的. 对疲劳裂纹扩展性态的可靠预测只有在物理原理基础上才有可能，这就需要从材料的微观结构出发研究疲劳裂纹扩展. 在这方面，除了前面提到的邢修三的位错滑移理论 [7,20], 还有原子键破裂理论. Krausz 与 Krausz[45] 认为，裂纹扩展的过程乃是由应力与热激活引起的原子键破裂与修复的净结果. 由于微观结构 (包括成分与缺陷) 的不均匀性及热涨落的动态性，即使实际材料的宏观成分、工作条件、几何形状及尺寸相同，疲劳裂纹扩展也是一个随机过程. 基于这一思想，邢修三与 Krausz[46] 提出了热激活断裂理论，将疲劳裂纹扩展与基本的物理常数联系起来. Kozin 与 Bogdanoff[47,48] 指出，在 VHG 实验中，FCG 的分散性主要由材料性态的变化引起，其次是载荷、温度及环境的变化的影响，而由实验技术引起的误差影响最小. 他们从微观的反应率理论 [49] 出发，构造了 FCG 的概率模型，并通过与实验数据的比较确定模型中某些参数. 该模型主要计及了材料的变化性，同时也明显地包含载荷与温度，表明 FCG 对温度十分敏感. 从而，他们提出通过提高温度来加速 FCG 试验，也讨论了为预测目的如何使实验量最少的问题.

3 结 语

自 VHG 数据公布以来，疲劳裂纹扩展的随机性这一事实已被普遍承认与重视，近 10 多年来，许多学者试图建立疲劳裂纹扩展的随机模型，来解释这一事实. 本文简要地评述了在这方面的努力结果，应该说，所提出的多数模型在不同程度上获得了成功，但还没有一个令人十分满意的. 大多数疲劳裂纹扩展的随机模型属现象学性质，乃从断裂力学或损伤力学出发，由确定性的疲劳裂纹扩展模型经随机化导得，少数模型则从材料的微观结构出发，由基本的物理规律导得. 不管哪类模型，它们的成功与否都需通过与实验结果的比较来判定. 鉴于疲劳裂纹扩展的随机性乃主要由材料在微观与细观结构的不确定性引起，后一类模型应更为合理，更具有预测性，但这方面的努力也还只是初步的，尚需人们作出更大的努力.

参 考 文 献

1 Virkler D A, Hillbery B M, Geol P K. The statistical nature of fatigue crack growth. *ASME J Engng Mater Technol,* 1979, 101: 148～153

2 Ghonem H, Dore S. Experimental study of the constant probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engng Fract Mech,* 1987, 27: 1～25

3 Kozin F, Bogdanoff J L. Recent thoughts on probabilistic fatigue crack growth. *ASME Appl Mech Rev,* 1989, 42(11): S121～S127

4 Sobczyk K, Spencer B F Jr. Random Fatigue: From Data to Theory. Academic Press Inc, 1992

5 Newby M. *Int J Fatigue,* 1993, 15(3): 247～248

6 王中，高镇同. 随机损伤过程和依赖于时间的随机损伤分布. 力学学报，1988, 20(6): 551～556

7 邢修三. 非平衡统计断裂力学基础. 力学进展，1991, 21(2): 153～168

8 廖敏. 概率疲劳及概率断裂力学研究. [博士学位论文]. 西北工业大学，1993

9 Bogdanoff J L, Kozin F. Probabilistic Models of Cumulative Damage. New York: Wiley and Sons, 1985

10 Granted et al. Fracture mechanical Markov chain growth model. *Engng Fract Mech,* 1991, 38(6): 475～489

11 Zhao H. An improved probabilistic model of fatigue crack growth. *Eng Fract Mech,* 1993, 46(4): 773～780

12 Madsen H D, Krenk S, Lind N C. Methods of Structural Safety. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1985

13 Bogdanoff J L. A new cumulative damage model-part 1. *ASME J Appl Mech,* 1978, 45: 246～250

14 Bogdanoff J L, Kozin F. Probabilistic models of fatigue crack growth-II. *Engng Fract Mech,* 1984, 20: 255～270

15 Rocha M M, Schueller G I. A probabilistic criterion for evaluating the goodness of fatigue crack growth models. *Engng Fract Mech,* 1996, 53: 707~731

16 Ghonem H, Dore S. Probabilistic description of fatigue crack growth in polycrystalline solids. *Engng Fract Mech,* 1985, 21(6): 1151~1168

17 Krausz A S. The random walk theory of crack propagation. *Engng Fract Mech,* 1979, 12: 499~504

18 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992

19 Paris P, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation law. *ASME J Basic Engng,* 1963, 85: 528~534

20 邢修三. 疲劳断裂非平衡统计理论 -I, 疲劳微裂纹长大的位错机理和统计特性. 中国科学 A 辑, 1986, 31: 501~510

21 Woo C W, Li D L. A general stochastic dynamic model of continuum damage mechanics. *Int J Solids Structures,* 1992, 29: 2921~2932

22 Sobczyk K. Modeling of random fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1986, 24: 609~623

23 Lin Y K, Yang J N. On statistical moments of fatigue crack propagation. *Engng Fract Mech,* 1983, 18(2): 243~256

24 Stratonovich R L. Topics in the Theory of Random Noise. Vol 2. New York: Gordon and Breach, 1967

25 Khasminskii R Z. A limit theorem for the solution of differential equations with random right hand sides. *Theory of Probability and Application,* 1966, 11: 390~405

26 Van Kampen N G. Ito versus Stratonovich. *J Statis Phys,* 1981, 24: 175~187

27 Kozin F, Bogdanoff J L. Analysis of stochastic equation models of crack growth. In: Probabilistic Methods in Mechanics of Solids and Structures, Stockholm, 1984. 93~101

28 Newby M J. Markov models for fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1987, 27(4): 477~482

29 Langley R S. Stochastic models of fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1989, 32(1): 137~145

30 Spencer B F Jr, Tang J. A Markov process model for fatigue crack growth. *J Engng Mech ASCE,* 1988, 114(12): 2134~2157

31 Spencer B F Jr, Tang J, Arley M E. A stochastic approach to modeling fatigue crack growth. *AIAA J,* 1989, 27(11): 1628~1635

32 Tang J, Spencer B F Jr. Reliability solution for the stochastic fatigue crack growth problem. *Engng Fract Mech,* 1989, 34(2): 419~433

33 Yang J N, et al. Stochastic crack growth models for applications to aircraft structures. In: Provan J W Ed. Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability. Martinus Nijhoff, Dordrocht, 1987. 171~211

34 Lin Y K, Wu W F, Yang J N. Stochastic modeling of fatigue crack propagation. In: Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures, Stockholm, Springer, Berlin, 1985. 103~110

35 Yang J N, Manning S D. A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis. *Engng Fract Mech,* 1996, 53: 677~686

36 Ortiz, Kiremidjian. Time series analysis of fatigue crack growth rate data. *Engng Fract Mech,* 1986, 24: 657~675

37 Ortiz, Kiremidjian. Stochastic modeling of fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1988, 29(3): 317~334

38 Ditlevsen D. Random fatigue crack growth — a first passage problem. *Engng Fract Mech,* 1986, 23: 467~477

39 Ditlevsen D, Olesen R. Statistical analysis of the Virkler data on fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1986, 25(2): 177~195

40 Dolinski K. Formulation of a stochastic model of fatigue crack growth. *Fatigue Fract Engng Mater Struct,* 1993, 16(9): 1007~1019

41 Dolinski K. Comparison of a stochastic model of fatigue crack growth with experiments. *Fatigue Fract Engng Mater Struct,* 1993, 16(10): 1021~1034

42 Jiang M X, Zhu W Q. Stochastic modeling of fatigue crack growth under constant amplitude loading. *Acta Mechanica Solida Sinica,* 1996, 9(2): 169~178

43 Al-Sugair F H, Kiremidjian. A semi-Markovian model for low-cycle elastic-plastic fatigue crack growth. *Engng Fract Mech,* 1990, 37(3): 691~696

44 Al-Sugair F H, Kiremidjian. Low-cycle fatigue data-statistical analysis and simulation. *Engng Fract Mech,* 1990, 37(3): 691~696

45 Krausz A S, Krausz K. Fracture Kinetics of Crack Growth. Boston MA: Kluwer Academic, 1988

46 邢修三, Krausz A S. 热激活断裂统计理论. 力学学报, 1990, 22(5): 589~601

47 Kozin F, Bogdanoff J L. Cumulative damage model for mean fatigue crack growth based on the kinetics theory of thermally activated fracture. *Engng Fract Mech,* 1990, 37: 995~1010

48 Kozin F, Bogdanoff J L. Cumulative damage model for fatigue crack growth based on reaction rate theory-II. *Engng Fract Mech,* 1992, 41(6): 873~896

49 Krausz A S, Eyring H. Deformation Kinetics. New York: John Wiley, 1975

RECENT DEVELOPMENTS IN MODELING OF RANDOM FATIGUE CRACK GROWTH

Jiang Mingxiao Zhu Weiqiu

Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

Abstract Since Virkler et al. published their experimental results exposing the statistical nature of fatigue crack growth, many models of random fatigue crack growth have been proposed so far. In the present paper these models are summarized and reviewed concisely from both mathematical and physical points of view. The relationship among these models is pointed out. Some remarks on the further research need are also given.

Keywords fatigue crack growth, stochastic model, fatigue life

《力学进展》1997 年度影响因子名列全国第 7 名列物理力学类第 1 名

根据中国科技信息研究所信息分析中心发布的“1997 中国科技论文统计与分析”报告，《力学进展》的影响因子为 0.870, 在所选的 1214 种中国科技期刊中名列第 7 名，单项列物理力学类期刊的第 1 名. 另据中国科学院文献情报中心中国科学引文数据库的统计，《力学进展》的影响因子为 0.5287, 同样名列物理力学天文类期刊的第 1 名. 以上两个数字之所以不同，主要是由于这两个系统的期刊源不同.

1997 年影响因子的计算方法为：

$$\text{影响因子} = \frac{\text{某刊 1995 年和 1996 年发表的论文在 1997 年的被引频次}}{\text{该刊 1995 年和 1996 年发表的论文数}}$$

它反映了期刊影响力的大小.

《力学进展》编辑部 供稿