

# 计算流体选讲(一)

黄兰洁

(中科院计算中心)

计算流体是对描述流体运动的偏微分方程(或方程组)给出数值解的一门科学。目的在于进一步理解物理现象从而改进工程设计,实用性十分明确。计算流体的内容十分丰富并涉及多种学科:流体力学,偏微分方程,数值分析,计算几何,计算机科学等等。它需要书本文献中的理论和技巧,也需要实际工作中的经验和见解。

在多年工作中我们深刻体会到从一般偏微分方程数值解的基本课程到从事计算流体的研究工作还有相当的距离。为了缩短这个距离,在过去小范围给研究生的讲课和多年讨论班的基础上,今年我们为中国科学院计算中心研究生开了“计算流体选讲”一课。内容包括两大部分:第一部分是偏微分方程部分,内容有

空气动力学方程的数学性质和空气动力学方程边界条件的提法;第二部分是计算方法部分,内容有和前一部分有关的差分近似;还有坐标变换与网格生成,以及几个流场的实际计算等等。目前先整理出第一部分的内容,以比较适用和易于接受的形式介绍作者认为最必需的知识,无疑这方面的内容数学工作者能讲得好得多,但是或许他们对计算流体的需要还不十分清楚。譬如,由于目前大部分理论与实际流场计算的距离常常相差很大,本文为了说明某些问题,不得不在较强形式的条件下来给出作者所需要的某些结论。

本文曾经孙和生教授和管梦涂教授仔细审阅,在此对他们表示感谢。

## 第一章 空气动力学方程的数学性质

本章主要介绍双曲型方程的性质,因为流动中的很多复杂现象是以双曲型方程描述的,如可压无粘流的各种间断,特别是激波。关于粘性流,困难的是小粘性或高  $Re$  数流动的计算;而对高  $Re$  数,除边界层和内层外,在大部分求解区域中,流动可用无粘流方程来描述。另外,双曲型方程的理论,随着计算流体学的发展,也有不少重要的突破。了解和掌握这些内容对于严肃认真的流场计算是很有必要的。

我们首先讨论双曲型方程的特征。这对于计算格式的设计(如迎风格式)和边界的处理(边界条件个数和所需的特征关系)都是基本知识。然后引进广义简单波和广义 Riemann 不变量以及双曲型守恒律的弱解等概念。由于篇幅所限,在此仅概述两个自变量情况的特征并略去空气动力学方程的代数性质部分。

### §1 双曲型偏微分方程的特征——两个自变量 考虑拟线性偏微分方程组

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = C \quad (1.1)$$

其中  $U, C$  为  $m$  维向量;  $A, B$  为  $m \times m$  矩阵;  $A, B, C$  依赖于  $x, y, U$ 。我们列出它的特征性质:

(i) 如果存在偏微分方程的线性组合使所有未知

量都在一个方向微分,这个方向称为特征方向。一条曲线称为特征线,如果在它上面每点的切向都是特征方向。我们说,对特征线偏微分方程(组)表示内微分(切向微分)关系。可见在特征线上不能任意给初值,它必需满足内微分关系,即特征关系,经常称为相容关系。

(ii) 特征线是解的唯一可能的分支线,即对同初值有若干个解;也可以说,它的外导数(非切向导数)不唯一确定。

(iii) 特征线是解可能有间断一阶导数的线。

对某解  $U = U(x, y)$ ,  $A$  和  $B$  是  $x$  和  $y$  的函数,在某点  $(x, y)$  如果

$$\det(A - \lambda B) = 0 \quad (1.2)$$

有  $m$  个实根  $\lambda$ , 互异或对应地有  $m$  个线性无关的  $l$ , 满足  $lA = \lambda lB$ , 即称方程(1.1)为双曲型的(前者为严格双曲型的)。这时

$$\frac{dx}{dy} = \lambda \quad (1.3)$$

就是它的特征方向,以这方向为切向的曲线就是它的特征线。用  $l$  左乘(1.1)得特征关系

$$lB \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = lC \quad (1.4)$$

一维不定常流体力学方程经常写为守恒型

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F = F(U) \quad (1.5)$$

它也可以写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (1.6)$$

设方程是双曲型的, 而  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $A$  的特征值,  $r_1, \dots, r_m$  是相应的(右)特征向量, 那么

$$A = R \Lambda R^{-1} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

其中  $R$  是矩阵  $(r_1, \dots, r_m)$ , 写

$$R^{-1} = L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

其中  $l_i$  就是对应  $\lambda_i$  的左特征向量, (1.6)左乘  $L$ , 得特征关系

$$L \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

其中每一个分量方程即

$$l_i \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.10)$$

我们知道如果方程(1.6)是线性的, 那么(1.10)可写为  $l_i U$  的微分关系, 并  $l_i U$  称为特征变量。

现在指出边界条件的个数。设求解区域的左边界为  $x=0$ 。在此边界上, 对应每一个指向区域内的特征线, 要给出一个边界条件。

当边界个数小于未知量个数, 可以补充对应向外特征方向的特征关系, 实际计算表明用给定的边界条件和这样的特征关系的适当差格式联立求解边界值是最合理且最可靠的。关于边界条件的提法, 将在下一章讨论。

本节最后指出, 对轴对称定常超音流方程, 其特征线如图 1.1 所示。直线  $x=x_1$  是“似空”的, 以它做为左边界需给出 4 个边界条件。直线  $x=x_2$  不是似空的, 以它做为左边界只需给出 3 个边界条件, 但不可能从它向右推进计算。

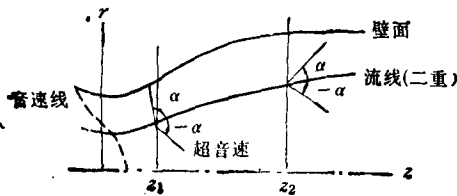


图 1.1

## §2 双曲型偏微分方程的特征——三个自变量 给定拟线性偏微分方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = C \quad (2.1)$$

其中  $U$  和  $C$  为  $m$  维向量,  $A$  和  $B$  为  $m \times m$  矩阵, 且  $A, B, C$  为  $x, y, U$  的函数。

例如二维不定常等熵流动方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 & c^2/\rho \\ 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & c^2/\rho \\ 0 & \rho & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (2.1')$$

特征面  $\phi(x, y, t) = 0$  是这样的曲面: 在它上面给定  $U$ , 不能唯一确定其外导数。做坐标变换  $x, y, t \rightarrow \xi, \eta, \phi$ ; 这里  $\phi$  坐标方向是特征面的法向,  $\xi$  和  $\eta$  方向是其切向。那么(2.1)变为

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ = - \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ - \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + A \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} + C \end{aligned}$$

$\frac{\partial U}{\partial \phi}$  不唯一意味着

$$\det(n_x l + n_y A + n_t B) = 0 \quad (2.2)$$

对某解  $U = U(x, y, t)$ , 在某点  $(x, y, t)$ , 如果对任何实的  $n_x, n_y$ , (2.2)有  $m$  个实根  $n_t$ , 互异或  $n_x A + n_y B$  有  $m$  个线性无关的左特征向量  $l$ , 即称(2.1)为双曲型的。

对(2.1'), 条件(2.2)即

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 & c^2/\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 & \mathcal{L} & c^2/\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial \phi}{\partial x} & \rho \frac{\partial \phi}{\partial y} & \mathcal{L} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2')$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\text{法向量} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = (n_x, n_y, n_t)$$



$$\phi(x, y, t) = 0$$

图 2.1

或

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^2 - c^2\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} = 0$$

即

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (2.2'a)$$

或

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - c^2\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \quad (2.2'b)$$

为了表示的方便,把  $\phi(x, y, t) = 0$  写为  $t = \psi(x, y)$ ,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

那么 (2.2'a) 和 (2.2'b) 分别变为

$$u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 \quad (2.3'a)$$

和

$$\left(-1 + u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - c^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \quad (2.3'b)$$

一般设  $\phi(x, y, z) = 0$  可表示为  $z = \psi(x, y)$ , (各系数中  $U$  已代换为  $u(x, y, z)$ ) (2.2) 是一个一阶非线性偏微分方程

$$Q(x, y, \psi, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (2.3'c)$$

现在把一般单个一阶非线性偏微分方程的术语与以上特殊情况用以下三点对应起来:

(i) 非线性偏微分方程 (2.3'c) 给出解  $t = \psi(x, y)$  可能的切平面向量

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, -1\right).$$

在一点可能的切平面包罗一个 Monge 锥。对应: 可能的特征面的切平面, 即特征平面, 包罗的锥称为特征锥。

(ii) Monge 锥的母线方程是  $Q = 0$  和

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial p}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{dz}{ds} = p\frac{\partial Q}{\partial p} + q\frac{\partial Q}{\partial q} \quad (2.4)$$

其中  $s$  是沿母线的参数。对应: 特征锥的母线方程是 (2.4)。

(iii) 位于解面  $t = \psi(x, y)$  的母线称为“特征线”, “特征线”生成解面。当讨论所有的解面, 母线即“特征线”, 偏微分方程 (2.1) 的特征面方程 (2.3'c) 的“特征线”。对应: 当讨论所有的特征面, 特征锥的母

线称为“次特征线”(bi-characteristics); “次特征线”生成特征锥, 见图 2.2。

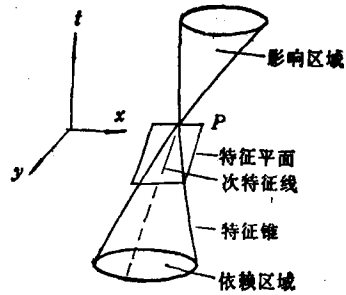


图 2.2

在此指出: 类似两个自变量的情况, 一点  $P$  向上 (正  $t$  方向) 的特征锥面 (characteristic conoid) 内部是  $P$  的影响区域, 而向下的特征锥面内部的是  $P$  的依赖区域。

方程 (2.3'a) 是一个线性偏微分方程, 可以认为特征锥退化为一根线, 也就是次特征线, 其方程为

$$\frac{dz}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = v, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + p + q = 1 \quad (2.4'a)$$

或

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = v$$

这就是流动的迹线, 通常就称它为 (2.1') 的特征线。方程 (2.3'b) 导致

$$\frac{dx}{ds} = 2(\mathcal{L}u - c^2p), \quad \frac{dy}{ds} = 2(\mathcal{L}v - c^2q), \quad \frac{dz}{ds} = 2\mathcal{L} \quad (2.4'b)$$

或写为

$$\left(\frac{dx}{ds} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} - v\right)^2 = c^2$$

它表示图 2.3(a) 所示的特征锥的母线, 即次特征线。

顺便指出, 对二维定常等熵流 (可直接讨论两个自变量  $x, y$  的情况), 从以上讨论容易看到此时 (2.1')

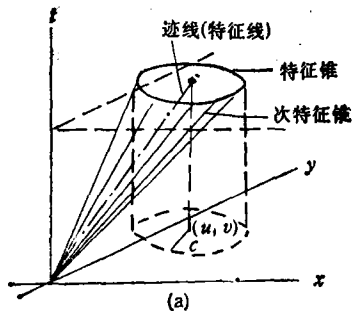


图 2.3(a)

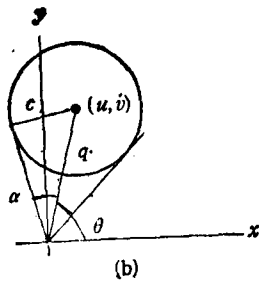


图2.3(b)

中  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  项为 0, (2.2') 中不出现  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , 相当于

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

即特征面都垂直于  $xy$  平面, 记为  $\phi(x, y) = 0$ . 那么迹线变为流线, 它是定常情况下的特征线. 对特征锥, 在亚音速流动的情况, 它包含  $t$  轴, 不存在切锥面并垂直于  $xy$  平面的  $\phi(x, y) = 0$ . 即定常情况下不存在特征线, 这对应椭圆型方程. 在超音速流动的情况, 从特征锥在  $xy$  平面上的投影, 见图 2.3(b), 可知有两个这样的  $\phi(x, y) = 0$ ; 即在定常情况下有两条特征线:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \pm \alpha), \quad \sin \alpha = \frac{c}{q}$$

这里  $q^2 = u^2 + v^2$ . 因此超音速定常方程是双曲型的.

当(2.1)是双曲型的, 对任何实的  $n_x, n_y$ , 不妨设  $n_x^2 + n_y^2 = 1$ , 有  $m$  个线性无关的  $l$ :

$$l(n_x l + n_x A + n_y B) = 0$$

以  $l$  左乘(2.1)得特征关系

$$l \left( \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} \right) = lC \quad (2.5)$$

注意它是一个内微分方程

$$l \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + l \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + A \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = lC$$

对应两个自变量情况的特征线, 这里有:

(i) 如果存在偏微分方程或其线性组合使所有未知量在同一平面上微分, 这个平面称为特征平面. 即对特征面, 偏微分方程(组合)表示内微分方程.

(ii) 对应还有, 在特征面上给初值  $U$ , 一阶外导数不唯一确定.

(iii) 特征面是解可能有一阶外导数的间断面.

进一步有, 这种导数的间断是沿次特征线传播的, 并且一点的扰动沿特征锥的次特征线传播到空间.

在此进一步说明次特征线方向. 设某解

$$U = U(x, y, t),$$

在一点  $(x, y, t)$  考虑

$$Q = \det(n_x l + n_x A + n_y B) = 0 \quad (2.6)$$

即(2.2). 对  $n_x = -\lambda$ ,  $\lambda$  为  $n_x A + n_y B$  的特征值, 令  $l$  和  $r$  分别为对应的左和右特征向量. 微分

$$(n_x l + n_x A + n_y B)r = 0,$$

得

$$(n_x l + n_x A + n_y B)dr + (dn_x l + dn_x A + dn_y B)r = 0$$

左乘  $l$ , 得

$$l(dn_x l + dn_x A + dn_y B)r = 0 \quad (2.7)$$

从(2.6)有

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial n_x} dn_x + \frac{\partial Q}{\partial n_y} dn_y + \frac{\partial Q}{\partial n_t} dn_t = 0 \quad (2.8)$$

类似(2.4), 可导出

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial n_t}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial n_x}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial Q}{\partial n_y}$$

是次特征线方向, 比较(2.7)与(2.8)并规格化, 可得出

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = lAr, \quad \frac{dy}{ds} = lBr \quad (2.9)$$

是次特征线方向.

关于边界条件的个数, 三个自变量的情况比两个自变量的情况要复杂得多. 求解域的每点都有无穷多个特征平面. 不过, 在边界上可以如下定义“向内”的特征平面, 使类似§1, 对应“向内”的特征平面个数就是边界条件的个数. 设求解域的左边界为  $x = 0$ . 在左边界考虑外法向量  $(n_x, n_y) = (-1, 0)$  的特征平面. 这时(2.2)变为

$$\det(n_x l - A) = 0 \quad (2.10)$$

$n_x$  就是  $A$  的特征值  $\lambda$ . 当  $n_x > 0$ , 称特征平面“向内”, 见图 2.4. 对应每个这样的  $n_x$ , 需给一个边界条件. 从表面上看, 二维不定常问题的边界条件个数的分析好比对应一维不定常问题的分析.

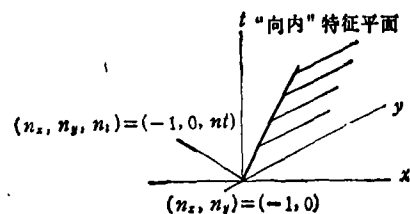


图 2.4

例如, 对(2.1')  $A$  的特征值  $\lambda = u, u \pm c$ . 如果在  $x = 0, u < c$ , 需给两个边界条件; 如果在  $x = 0, u > c$ , 需给三个边界条件; 见图 2.5. 注意, 关键在于  $u$  是亚音还是超音, 而不是流动本身(即  $q$ )是亚音还是超音.

另外, 类似§1, 可补充“向外”特征平面上的特征关系为定边界上的值. 即对  $(n_x, n_y) = (-1, 0), n_x <$

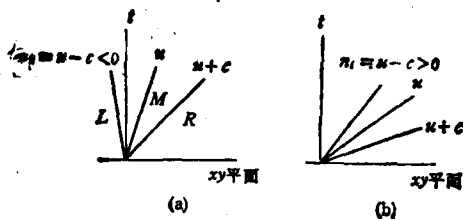


图 2.5

0 或  $\lambda < 0$ , 找出  $A$  的左特征向量  $l$ , 以它左乘(2.1), 得(2.5)的简化

$$l \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + lB \frac{\partial U}{\partial y} = lC \quad (2.11)$$

注意  $\lambda = lAr$ , 其中左、右特征向量是规格化的。再令  $\mu = lBr$ 。根据(2.9)有

$$\lambda = lAr = \frac{dx}{ds} \mu = lBr = \frac{dy}{ds}$$

其中  $s$  是沿次特征线的参数。因此特征关系(2.11)可写为

$$l \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + (lB - l\mu) \frac{\partial U}{\partial y} = lC$$

或

$$l \frac{\partial U}{\partial s} + (lB - l\mu) \frac{\partial U}{\partial y} = lC \quad (2.12)$$

例如对二维不定常等熵流方程(2.1'), 在  $x = 0$ , 当  $u < c$ , 需给出两个边界条件。为确定边界值再用一个特征关系。对应  $\lambda = u - c (< 0$ , “向外”特征平面), 有  $l = (\rho, 0, -c)$ ,  $r = (1/2\rho, 0, -1/2c)$ 。特征关系(2.11)此处为

$$\begin{aligned} & (\rho, 0, -c) \left( \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ & + (\rho v, -\rho c, -cv) \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (2.11') \end{aligned}$$

注意微分都在向外特征平面上, 图 2.6 中  $L$ 。又

$$lB - l\mu = (0, -\rho c, 0), \quad lBr = v,$$

所以以次特征线表示的特征关系(2.12)在此是

$$(\rho, 0, -c) \frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (0, -\rho c, 0) \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

或

$$\rho \frac{\partial u}{\partial s} - c \frac{\partial \rho}{\partial s} - \rho c \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.12')$$

其中

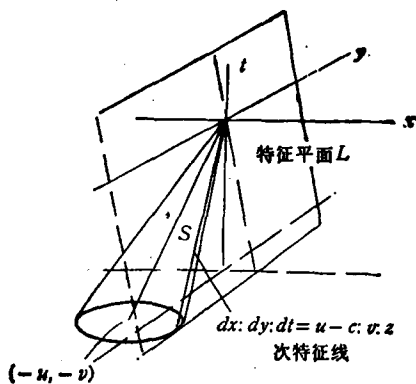


图 2.6

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

从此例可清楚地看到以上选择法向量的投影垂直边界的“向外”特征平面的理由, 即它的向下部分完全位于求解区域内。所有沿此特征面传播到边界点的信息都在区域内。如果适当地差分化, 边界的计算格式所需的值也都在区域内。

对一般的求解区域可经坐标变换后再进行以上的讨论。

最后指出, 边界处理的方法多种多样, 但如 §1 所述, 补充特征关系式是最合理且最可靠的。有关边界条件本身的提法将在第二章讨论。

### §3 广义简单波和广义 Riemann 不变量

在这一节主要把一维不定常的具有两个未知量的简单波和 Riemann 不变量推广到  $m$  个未知量的问题。提及的概念都属于双曲型偏微分方程和近年提出的有关差分格式和它们的分析的基础。

考虑所谓“可约”双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(u) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

即  $A$  仅依赖于  $U$  且非齐次项为 0, 如(1.6)。对  $m = 2$ , 有如下的 Riemann 不变量。把特征关系

$$l_1 \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

$$l_2 \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

写为

$$l_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0 \text{ 沿 } C_1: \frac{dx}{dt} = \lambda_1, \quad (3.2a)$$

$$l_2 \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \text{ 沿 } C_2: \frac{dx}{dt} = \lambda_2, \quad (3.2b)$$

(3.2a) 即

$$l_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + l_{12} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = 0$$

因为存在积分因子使  $\mu_1 l_1 du_1 + \mu_2 l_2 du_2 = dJ_1$ , 所以有

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha} = 0 \text{ 或 } J_1 = r(\beta) \quad (3.3a)$$

同理得

$$\frac{\partial J_1}{\partial \beta} = 0 \text{ 或 } J_1 = s(\alpha) \quad (3.3b)$$

一般积分因子不容易找出, 但对一维不定常等熵流动方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

熟知

$$J_1 = \frac{u}{2} + \frac{c}{r-1}, J_2 = -\frac{u}{2} + \frac{c}{r-1}.$$

现在我们列出对  $m=2$  简单波的特性:

(i) 作为定义可以用: 对所有  $\beta, J_1(u_1, u_2) = \text{常数} = r_0$ ; 那么有

(ii)  $u_1 = u_2(u_1)$ , 当  $\frac{\partial J_1}{\partial u_1} \neq 0$ ;

(iii) 可是沿  $C_1$  又有  $J_2(u_1, u_2) = s(\alpha)$ , 从而  $u_1 = \text{常数}, u_2 = \text{常数}$ , 因此  $C_1$  特征线是直线;

(iv) 另外, 邻常态是简单波, 因为  $J_1 = r_0$ ; 譬如说, 沿特征线  $C_1$  传递邻常态的区域, 见图 3.1.

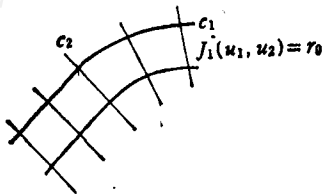


图 3.1

对  $m \geq 3$ , 一般不存在积分因子使  $\mu(l_1 \cdot 1 du_1 + l_2 \cdot 2 du_2 + \dots + l_m \cdot m du_m)$  为全微分. 所以以下用特性(ii)推广简单波的概念; 即

$$U = U(u_1) = U(\xi), \xi = \xi(x, t)$$

代进(3.1), 得

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial t} l + \frac{\partial \xi}{\partial x} A \right) \frac{dU}{d\xi} = 0$$

可见  $\frac{dU}{d\xi}$  是  $A$  的右特征向量对应特征值  $\lambda$ , 而  $\lambda$  满足

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$A$  有  $m$  个特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . 若对  $\lambda_i$  (3.4) 成立, 则  $\xi = \text{常数}$  或  $U(\xi) = \text{常数}$  沿特征线

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(U(\xi));$$

从而此族特征线是直线, 特性 (iii). 此时称这样的区域为  $\lambda_i$  广义简单波区域. 而  $U$  在这简单波中由

$$\frac{du_1}{r_{11}} = \frac{du_2}{r_{12}} = \dots = \frac{du_m}{r_{1m}} \quad (3.5)$$

定出. 这导致  $m-1$  个线性无关的关系

$$\begin{aligned} J_1^m(u_1, \dots, u_m) &= \text{常数} \\ &\vdots \\ J_{m-1}^m(u_1, \dots, u_m) &= \text{常数} \end{aligned} \quad (3.6)$$

称为  $\lambda_i$  广义 Riemann 不变量, 特征 (i). 在  $(u_1, \dots, u_m)$  空间里, (3.6) 相交成曲线, 记为  $\Gamma_i$ , 它的切向即  $r_i$ , 对每个  $J_i(u_1, \dots, u_m) = \text{常数}$ , 有

$$\frac{\partial J_i}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial J_i}{\partial u_m} du_m = 0$$

或可写为

$$\nabla_u J_i \cdot r_i = 0 \quad (3.7)$$

这也可以用来定义  $\lambda_i$  广义 Riemann 不变量. 最后指出, 邻常态也是广义简单波, 特征 (iv).

一维不定常 Euler 方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

即(3.1)其中

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ S \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ p\rho/\rho & 0 & pS/\rho \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

这里  $S = C_0 \log(p/\rho r) + \text{常数}$ ,  $p = p(\rho, S)$ ,  $c^2 = p\rho$ . 容易得出  $A$  的特征值  $\lambda$  和对应右特征向量  $r$  是

$$\lambda = u \quad r = \begin{pmatrix} pS \\ 0 \\ -p\rho \end{pmatrix}; \quad \lambda = u + c \quad r = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda = u - c \quad r = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$$

对  $\lambda = u$ , 从(3.5)得广义 Riemann 不变量

$$du = 0, J^1 = u = \text{常数}$$

$$dp = \rho d\rho + pS dS = 0, J^2 = p = \text{常数}$$

那么  $\nabla_u J^1 = (0, 1, 0)$ ,  $\nabla_u J^2 = (p\rho, 0, pS)$ , 可见都满足(3.7), 即  $\nabla_u J \cdot (pS, 0, -p\rho) = 0$ .

对  $\lambda = u + c$ , 从(3.5)得

$$dS = 0, J^3 = S = \text{常数}$$

$$du - \frac{c}{\rho} d\rho = 0, J^4 = u - \int \frac{c}{\rho} d\rho = \text{常数}$$

在它们相交的曲线上, 由  $S = \text{常数}, p = p(\rho) (= A\rho^2, A \text{常数})$ , 可得  $J^4 = \frac{u}{2} - \frac{c}{r-1}$ . 这与等熵流,  $m=$

2, 的情况一样, 但在此广义 Riemann 不变量在广义简单波区域内不变, 由  $\nabla_u J = (0, 0, 1)'$ ,  $\nabla_u J' = (-c/\rho, 1, \theta)$ ,  $\theta$  非 0 元素, 可见都满足(3.7),

$$\nabla_u J \cdot (\rho, c, 0)' = 0.$$

类似对  $\lambda = u - c$ , 得广义 Riemann 不变量

$$J' = s = \text{常数}$$

$$J' = u + \int \frac{c}{\rho} d\rho = \text{常数}$$

在此也说明常用术语——特征场线性退化和真正非线性的意思。设定出  $U(\xi)$ , 令  $c(\xi) = \lambda(U(\xi))$ , 那么从(3.4)得  $\xi = \xi_0(x - c(\xi)t)$ , 其中  $\xi_0(x)$  是(3.4)的初值, 即  $U(\xi) = U(\xi_0(x - c(\xi)t))$ 。对线性方程  $\frac{dc(\xi)}{d\xi} = 0$  即  $c(\xi) = c$ , 波形随时间不变; 由此

启发定义: 当

$$\frac{d\lambda(U(\xi))}{d\xi} = \nabla_U \lambda \cdot r = 0 \quad (3.8)$$

称特征场  $(\lambda, 1)$  为线性退化的, 而当

$$\nabla_U \lambda \cdot r \neq 0 \quad (3.9)$$

称特征场为真正非线性的。再看标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中  $a(u) = f'(u)$ , (3.8)对应  $a'(u) = 0, u = \text{常数}$ , 即  $f(u)$  是直线。(3.9)对应  $a'(u) \neq 0$ , 设它  $> 0$ , 那么  $f''(u) > 0$ , 即  $f(x)$  是凸函数。

例如上面 Euler 方程, 对  $\lambda = u, \nabla_U \lambda = (0, 1, 0)'$ , 显然满足(3.8), 相应特征场是线性退化的, 而对  $\lambda = u + c, \nabla_U \lambda = (c_\rho, 1, c_\theta)'$ , 可导出

$$\nabla_U \lambda \cdot r = c_\rho \rho + c = \frac{\rho + 1}{2} c \neq 0,$$

满足(3.9), 相应的特征场是真正非线性的; 对  $\lambda = u - c$ , 相应特征场也是真正非线性的。

有关特征场的定义不限于可约方程, 并可推广到多维问题。

#### §4 双曲型守恒律的弱解

各种间断-疏散波, 接触间断或滑移面, 和激波的计算在计算流体界和计算数学界都属于主攻方向。它的研究已有三、四十年的历史, 促进了有关数学理论和计算方法的发展, 内容十分丰富。这些内容在很多计算流体书中都有详细介绍; 在本课不做为重点。本节仅给出弱解的几个等价定义。在差分格式的推导和理论分析中, 各有各的用处。关于弱解的唯一性, 虽然在近年的流场计算中已成为实际问题, 但是在此只能提及。

我们知道对双曲型守恒律

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

其中通量  $F = F(U)$ , 即使初值

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad (4.2)$$

是充分光滑的, 随时间增长, 同族特征线可能相交, 即解可能有间断。所以必须推广经典解的概念。

逐段光滑函数  $U(x, t)$  称为(4.1)的弱解的三个等价定义:

I. 在光滑区,  $U$  是(4.1)的经典解。而在间断线  $x = x(t)$  上 (间断速度  $v = \frac{dx}{dt}$ ), 满足

$$(U_+ - U_-)v = F_+ - F_-, \quad (4.3)$$

其中下标 +, - 表示间断的两侧。(4.3)称为间断解的 Rankine Hugoniot 条件。

II. 对任意区域  $Q$ , 边界  $\partial Q$  逐段光滑,  $U$  满足

$$\oint \partial Q U dx - F dt = 0 \quad (4.4)$$

III. 对每个充分光滑并当  $|x| + t$  充分大时为 0 的试验函数  $\varphi(x, t)$ ,  $U$  满足

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) U_0(x) dx = 0 \quad (4.5)$$

(说  $U$  是初值问题(4.1), (4.2)的弱解)。

定义 II 中(4.4)可从(4.1)用散度定理得出并可直接用于离散方程 ( $Q$  取为长方形区域); 从(4.4)又可方便地得出间断解的 Rankine Hugoniot 条件 ( $Q$  取为包括间断线段并宽度趋于 0 的区域)。

对二维空间的双曲型守恒律

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

其中  $F = F(U), G = G(U)$ 。逐块光滑函数  $U(x, y, t)$  称为弱解的定义是:

I. 在光滑区  $U$  是(4.6)的经典解。设  $\sigma(x, y, t) = \text{常数}$  为解的一个间断面,

令

$$\vec{n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2},$$

$\sigma(x, y, t)$  二常数

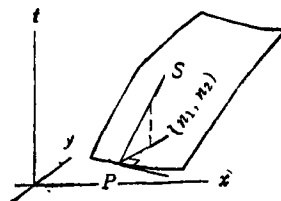


图 4.1

$$n_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x} / \vec{n}, \quad n_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial y} / \vec{n},$$

那么  $(n_1, n_2)$  是  $xy$  平面上间断线的单位法向量, 而

$$v = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} / \vec{n}$$

是间断线的法向速度<sup>1)</sup>。在间断面上 $U$ 满足

$$[U]t = [F]n_x + [G]n_y \quad (4.7)$$

这里符号 $[W] = W_+ - W_-$ , 下标+, -表示间断的两侧。

II. 对任意区域 $Q$ , 边界 $\partial Q$  逐块光滑, 其外法向量 $n = (n_x, n_y, n_t)$ ,  $U$  满足

$$\iint_{\partial Q} (n_x U + n_x F + n_y G) dS = 0 \quad (4.8)$$

III. 对每个充分光滑并当 $|x| + |y| + t$  充分大时为0的试验函数 $\varphi(x, y, t)$ ,  $U$  满足

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F + \frac{\partial \varphi}{\partial y} G \right) dx dy dt \\ & + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, y, 0) U(x, y, 0) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

关于定义等价性的证明, 可见文[5]; 对二维方程组的证明与对一维标量方程相同。例如 $I \Rightarrow II$ , 令 $H = (U, F, G)$ , 先注意在间断面上(4.7)可写为 $[H_n] = 0$ 。在任意 $Q$ 中, 如果解光滑, 用 Gauss 定理, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial Q} (n_x U + n_x F + n_y G) dS \\ & = \iiint_Q \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dV = 0 \end{aligned}$$

如果有间断面 $S$ 把 $Q$ 切成两个区域 $Q_-$ 和 $Q_+$ ;  $Q_-$ 的边界为 $\partial Q_-$ , 包括 $S_-$ ;  $Q_+$ 的边界为 $\partial Q_+$ ; 包括 $S_+$ , 那么

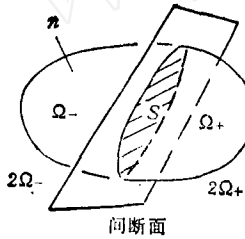


图 4.2

$$\begin{aligned} \iint_{\partial Q} H_n dS &= \left( \iint_{\partial Q_-} + \iint_{\partial Q_+} \right) H_n dS \\ &= \iint (H_+ - H_-) n dS = 0 \end{aligned}$$

因为对 $\partial Q_-$ ,  $\partial Q_+$ 积分为0如上, 而对 $S$ 有 $[H_n] = 0$ 。

当讨论包括弱解, 有时说(4.1)或(4.6) 在弱意义下成立。

如果有非齐次项, 如(4.1)右边有 $c$ , 依赖于 $U$ , 那么(4.4)的左边增加 $\iint c dx dt$ , (4.5) 的重积分号下增加 $\psi c$ 项, 但 $RH$ 条件(4.3)不变。

我们也知道初值问题(4.1), (4.2)的弱解是唯一的。对一维不定常空气力学方程, 在间断解中根据

熵增条件选出唯一的真实解, 对一般双曲型守恒律(4.1), 也希望能选出它的唯一的真实解, 为此也考虑它的所谓的熵函数: 即标量 $\mathcal{Q}(U)$ :

(i)  $\mathcal{Q}$  是 $U$ 的凸函数, 即 $\left( \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial u_i \partial u_j} \right)$  矩阵正定

(ii)  $\mathcal{Q}$  满足 $\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$ 。这里 $\mathcal{L}(u)$  称为熵通量。

这样在光滑区 $u$  满足外加的一个守恒律:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dots \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \end{aligned}$$

对应的熵条件是

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \leq 0 \quad (4.10)$$

在弱意义下。

对逐段光滑函数, 熵条件的意思是:

I. 在光滑区,  $u$  满足(4.10)其中取等号而在间断线上,  $u$  满足

$$(\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) - s(\mathcal{Q}_+ - \mathcal{Q}_-) \leq 0 \quad (4.11)$$

II. 对任意区域 $Q$ , 边界 $\partial Q$  逐段光滑,  $U$  满足

$$\int_{\partial Q} \mathcal{Q} dx - \mathcal{L} dt \leq 0 \quad (4.12)$$

III. 对每个充分光滑并当 $|x| + t$  充分大时为0的非负试验函数,  $U$  满足

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathcal{Q} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathcal{L} \right) dx dt \\ & - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) \mathcal{Q}(U_0(x)) dx \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

见文[6]。

例如对一维空气动力学守恒律, (4.1) 其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ I \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (I + p)u \end{pmatrix}$$

这里单位体积的能量 $I$ 与 $\rho, \rho$ 的关系是

1) 对曲面 $\sigma(x, y, t) = \text{常数}$ , 其法向量为 $\left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)$ 。考虑曲面上某曲线 $x = x(t), y = y(t)$ , 上

的一点 $P$ , 让 $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$

除以 $\tilde{n}$ 。曲面割 $xy$ 平面的曲线上 $P$ 处的单位法向量为 $(n_1, n_2)$ 。以 $s = n_1 \frac{dx}{dt} + n_2 \frac{dy}{dt}$ 知 $P$ 在法向的速度为 $s$ 。



$$p = (r-1)\left(\epsilon - \frac{\rho u^2}{2}\right).$$

所定义的熵函数和熵通量是

$$w = -\rho S, \quad \mathcal{L} = -\rho u S \quad (4.14)$$

见文[8].

以上熵函数、熵通量、和熵条件的定义也可以推广到多维的情况。熵函数与方程的某些代数性质也有一定的关系,可见文[8].

对单个守恒律,  $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0$ , 解的唯一性问题已完善解决,熵条件与激波条件(特征线相交)等价,并耗散消失条件(右边为  $\epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  的方程的解  $u_\epsilon \rightarrow u$ , 当  $\epsilon \rightarrow 0$ )即保证熵条件.

对方程组守恒律,当所有特征场真正非线性、当激波弱证明了熵条件与激波条件(同族特征线相交)等价,耗散消失条件也保证熵条件。对特征场或真正非线性或线性退化也有类似结论。但唯一性仅有一些结果,尚在研究之中。

对多维问题,特别对其它类型的问题,情况很复杂,有满足熵条件的非真实解,也有不满足熵条件的真实解。

在此提及这些内容为了说明计算间断解除了使用所谓的守恒型格式,还需从多方面保证其数值结果的可靠性。

## 参 考 文 献

- [1] Courant, R. and Hilbert, D., *Method of Mathematical Physics V. II*, Interscience Publishers (1962).
- [2] Courant, R. and Friedrichs, K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers (1948).
- [3] Jeffrey, A., *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, London, Pitman (1976).
- [4] Jeffrey, A. and Taniuti, T., *Nonlinear Wave Propagation with Application to Physics and Magneto-hydrodynamics*, New York, Academic Press (1964).
- [5] 李德元,守恒律与守恒差分格式 (1984).
- [6] Harten, A., Lox, P. D., and van Leer, B., On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM Rev.*, 25(1983), 35-61.
- [7] Lax, P. D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM Reg. Conf. Series Lecture in Appl. Math. 11(1972).
- [8] Harten, A., On the Symmetric Form of Systems of Conservation Laws with Entropy, *J. Comput. Phys.*, 49(1983), 151-164.
- [9] Nixzi, A. and Engquist, B., Selected Topics in the Theory and Practice of Computational Fluid Dynamics, *J. Comput. Phys.*, 72(1987), 1-69.

## 对教育研究栏几篇文章的讨论

白 伏 英

(北京航空航天大学)

(一)

1988年第4期田泽同志在“现行材料力学教材的某些商榷”一文中对一般平面应力状态确定最大应力  $\sigma_{\max}$  的方位角导出两个式子:

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\alpha_0 = \mp \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

对第一式右边取“+”号,第二式右边取“-”号时,所得  $\alpha_0$  角,就是  $\sigma_{\max}$  的方位角。1989年第2期“对现行材料力学的某些商榷的商榷”一文认为上文的结论仅适用于特殊情况。本文认为田泽同志的结论是正确的,如果该文说明三角函数有两个解,两式的相同解就是  $\sigma_{\max}$  的方位角,或所选的算例不是  $\alpha_0 = 45^\circ$  的特殊情况,则不会有第二文中提出的问题。

(二)

1989年第4期“纯弯梁纵向截面上的挤压力”一文中认为梁受力后,纵向纤维由直线形式变为弧线形式,公式推导过程中静力平衡的受力图不论是整体的还是微体的,均取受力后的几何尺寸学研究对象,因而得出,纯弯梁纵向截面上的挤压应力如果不存在,则在横向不能保持平衡,所以文中认为纵向纤维单向受力的假设造成了破坏平衡条件的结果。

材料力学一系列的理论和公式都是根据小变形导出的,所谓小变形是指变形相对于杆件的尺寸来说,变形是可以略而不计的微量,变形是在线性范围内,力作用点的位置不因变形而有所改变,在用力学方法分析内外平衡时不论是取整体的,还是微段的,都按结构原来的几何图形,因而在推导纯弯梁纵向截面上的正应力时,在力学方面所取受力体的纵向纤维仍为直线,因而得出在纯弯梁纵向纤维之间无挤压的结论。