$$N_{xycr}=3.8408 \quad (8)$$

b) 文献[2]的计算结果是:

$$N_{xycr}=3.8336 \quad (9)$$

误差:

$$E=\frac{(3.8408-3.8336)}{3.8336}\approx 0.2\% \quad (10)$$

例三 文献[4]的一个例子,板长等于宽,板的刚度系数比为

$$\frac{D_{11}}{D_{22}}=10 \quad \frac{(D_{12}+2D_{66})}{D_{22}}=1.67$$

根据文献给出的条件,取 $a=b=500$,

$$D_{11}=100000 \quad D_{22}=10000$$

$$D_{12}=4700 \quad D_{66}=6000$$

a) 用公式计算

$$N_{xycr}=12.0688 \quad (11)$$

b) 文献[4]的计算结果

$$N_{xycr}=12.36 \quad (12)$$

误差:

$$E=\frac{(12.0688-12.360)}{12.36}\approx -2.4\% \quad (13)$$

上述三个例子中,使用不同的边长比 $\frac{a}{b}=1.5, 2.5, 1$ 和不同的刚度系数比 $\frac{D_{11}}{D_{22}}=1, 12, 10$,近似计算公式和文献计算结果之间的最大误差是 2.4%。这样的精度完全可以满足实际使用的需要。

本文得到西德 Stuttgart 大学 F. J. Arendts 教授的指导。

参考文献

[1] Leybenzon, L. S., Vibrational Methods for Solution of the Elasticity Problems Gostekhizdat, Moscow, (1943).

[2] Lekhnitski, S. G., Anisotropic Plates: Gordon and Breach Science, (1968).

[3] Seyden, E. Über das Ausbeulen von rechteckigen isotroppen oder orthogonal-anisotropen Platten bei Schubbeanspruchung: Berlin-Adlershof, (1933).

[4] Ashton, J. E., Whitney, J. M., Theory of Laminated Plates: Progress in Material Science series vol IV Technomic, (1970).

[5] Thieleman, W., Contribution to the problem of buckling of orthotropic plates. with special reference to plywood: NACA, Technical Memorandum 1263, (1950).

[6] Timoshenko, Gere, Theory of Elastizity: McGRAW-Hill Book Company, (1961).

(本文于 1989 年 3 月 7 日收到,
于 1989 年 10 月 22 日收到修改稿。)

应变几何理论在应力函数张量研究中的应用

潘家强

(浙 江 大 学)

提要 本文应用应变几何理论的结果研究了一般应力函数张量的性质,给出了应力函数张量的“确定性”,导出了内力系(或边界力系)主矢与主矩由应力函数张量的闭线积分确定的公式。

关键词 应力函数张量,矢量梯度张量,内力系,边界力系

无体力情况满足静平衡方程的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 一般形式为[1-4]

$$\boldsymbol{\sigma}=\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla \quad (1)$$

其中,对称张量 $\boldsymbol{\phi}$ 称为与 $\boldsymbol{\sigma}$ 对应的应力函数张量,∇ 为矢量微分算符。$\boldsymbol{\phi}$ 的存在性已被证明[1],但易举例表明,与同一 $\boldsymbol{\sigma}$ 对应的 $\boldsymbol{\phi}$ 不是唯一的。一个问题是:$\boldsymbol{\phi}$ 究竟能“确定”到什么程度?

应用应变几何理论的结果,可以证明

命题 1 对应于同一应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的应力函数张量 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$,当且仅当彼此相差一个矢量梯度张量 $\boldsymbol{a}\nabla+\nabla\boldsymbol{a}$。如果不计形为 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c}$ 的项,矢量 $\boldsymbol{a}$ 由 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 唯一地确定,其中 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意常矢量,$\boldsymbol{r}$ 为矢径。

由应变几何理论[1],Cauchy 形式的应变

张量 $\boldsymbol{\Gamma}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u})$ 满足应变协调方程 $\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla=0$；反过来，满足应变协调方程的应变张量保证了 Cauchy 形式中 $\mathbf{u}$（位移矢量）的唯一性（单值性），如果不计刚体位移项的话；且 $\mathbf{u}=2\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}+\int_{r_0}^{r}d\boldsymbol{\rho}\cdot[\boldsymbol{\Gamma}+(\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho})]$. 因此，若取 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$，则若应力函数张量 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{a}\nabla+\nabla\boldsymbol{a}$，则 $\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla=\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla$，即 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 对应同一应力张量. 反过来，若 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 对应同一 $\boldsymbol{\sigma}$，则 $\nabla\times(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi})\times\nabla=0$，因而 $\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{a}\nabla+\nabla\boldsymbol{a}$，且

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}d\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla-\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho})] \tag{2}$$

及

$$\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{a}\nabla+\nabla\boldsymbol{a} \tag{3}$$

应指出，文献 [4] 已注意到本命题的充分性，但未指出其必要性. 而只有指出必要性才最终回答了应力函数张量的"确定性"问题.

对于复连域，为保证矢量 $\boldsymbol{a}$ 的"单值性"（不计 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}$ 项），同理可以借用 Voltrra 积分条件[1,2]，规定在内边界上的确定的闭曲线 Γ_i $(i=1,\cdots,n-1;n$ 为连通度)上，$\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi})\times\nabla=0$ 及 $\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla-\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}]$，即条件：对于 n 连通域 $(n>1)$，对应于同一应力分布的任一应力函数在内边界确定闭曲线 $\Gamma_i(i=1,\cdots,n-1)$ 的下列积分具有同样的值：

$$\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\nabla=\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\nabla \tag{4}$$

$$\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}] =\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}] \tag{5}$$

借鉴应变几何理论的结果，可以导出弹性域内（或边界上）曲面 S 上的内力系（或边界力系）主矢和主矩与应力函数张量沿 S 的闭围线积分的关系，其关系为

命题 2 弹性单连域内（或边界上）曲面 S 上的内力系（或边界力系）的主矢 $\boldsymbol{f}$ 和原点主矩 $\boldsymbol{m}$ 可由应力函数张量场 $\boldsymbol{\phi}$ 沿 S 的围线 l 的下列积分确定：

$$\boldsymbol{f}=\oint_{l}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\nabla \tag{6}$$

$$\boldsymbol{m}=\oint_{l}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}] \tag{7}$$

两式均可以应用广义 Stokes 定理证明. (6) 式右边应用广义 Stokes 定理成为 $\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla)dS=\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}dS$，根据应力理论，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 是有向曲面 $\boldsymbol{n}dS$ 上的应力矢量（或边界面元 $\boldsymbol{n}dS$ 上的边界力矢量），故 (6) 式成立. 对 (7) 式右边应用广义 Stokes 定理，借鉴文献 [1] 对 $\boldsymbol{\Gamma}$ 作的相应推导，$\nabla\times[(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}]=-(\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\overset{\times}{\times}\boldsymbol{I}=-(\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\phi}\times\nabla-\boldsymbol{I}:(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)=-(\nabla\times\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}-\nabla\times\boldsymbol{\phi}$，则有 $\oint_{l}\times d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}]=-\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{r}dS=\int_{S}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})dS$，所以 (7) 式成立.

对 n 连通域 $(n>1)$，相应有

$$\boldsymbol{f}=\oint_{l}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\nabla-\sum_{i=1}^{k}\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\nabla \tag{8}$$

$$\boldsymbol{m}=\oint_{l}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}]-\sum_{i=1}^{k}\oint_{\Gamma_i}d\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}] \tag{9}$$

此时曲面 S 构筑在闭围线 l 和内边界确定曲线 Γ_i $(i=1,\cdots,k)$，l 是第 $k+1$ 类闭曲线 $(k\leqslant n-1)$.

下面以平面应变问题和柱体自由扭转问题为例. 平面应变问题的 Maxwell 应力函数张量为 $\boldsymbol{\phi}=\varphi\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$，$\varphi$ 为 Airy 应力函数；对应于

同一应力分布的 Morera 应力函数为 $\boldsymbol{\psi}=-\frac{x_3}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2)-\frac{x_3}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$，两者相差矢量 $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}x_3\varphi\boldsymbol{e}_3$ 的对称梯度张量 $\boldsymbol{a}\nabla+\nabla\boldsymbol{a}$. 柱体自由扭转的 Maxwell 应力函数张量分量取 $\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_2}=x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_1}=-x_3\times\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, 其余元为零. 这里 $\varphi(x_1, x_2)$ 称 Prandtl 应力函数. 取 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{1}{2}x_3\int\varphi dx_2\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{1}{2}\times x_3\int\varphi dx_1\right)\boldsymbol{e}_2$，加上 $\boldsymbol{a}$ 的梯度张量后成为对应于同一应力分布的 Morera 应力函数 $\boldsymbol{\psi}=\left(\frac{1}{2}\int\varphi dx_1\right)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2)-\left(\frac{1}{2}\int\varphi dx_2\right)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$，或写作 $\frac{\partial\psi_{23}}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi_{32}}{\partial x_1}=\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\partial\psi_{31}}{\partial x_2}=\frac{\partial\psi_{13}}{\partial x_2}=-\frac{\varphi}{2}$，其余元为零。

显然，从命题 1 还可以推论：对应于一定的 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 Maxwell 形式的应力函数张量总是存在的，其它形式的应力函数张量均可由 Maxwell 形式添加某个矢量的梯度张量张而得到. 由此，可以把形式最简单的 Maxwell 形式作为应力函数的“基本形式”. 同时，讨论“应力函数有几种形式”的问题通过命题 1 也就获得了新的解释。

由命题 2，对平面应变问题，记 φ 为 Airy 应力函数，则

$$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_1\oint_l\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_3+\boldsymbol{e}_2\oint_l\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_3$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}=&-\boldsymbol{e}_1\oint_l x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_3+\boldsymbol{e}_2\oint_l x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_3\\&+\boldsymbol{e}_3\oint_l\left(\varphi-x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)dx_3\end{aligned}$$

对柱体自由扭转，记 φ 为 Prandtl 应力函数，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}=&-\boldsymbol{e}_1\oint_l\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_1\right)dx_2\\&-\boldsymbol{e}_2\oint_l\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_2\right)dx_1\\&+\boldsymbol{e}_3\oint_l x_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}=&-\boldsymbol{e}_1\oint_l x_3\left[\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_2-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dx_1\right.\\&\left.-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2\right]-\boldsymbol{e}_2\oint_l x_3\left[x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1\right.\\&\left.-\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_1-x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)dx_2\right]\\&-\boldsymbol{e}_3\oint_l\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_2\right)x_1dx_1\\&-\left(\int\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_1\right)x_2dx_2\end{aligned}$$

最后，我们给出 (2)、(3)、(6)、(7) 式在笛卡尔坐标

$$\begin{aligned}a_i=&c_i+e_{ijk}b_jx_k+\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}[\psi_{ij}-\varphi_{ij}\\&+e_{inm}e_{npq}(\psi_{jp,q}-\varphi_{jp,q})(x_m\\&-X_m)dX_j\end{aligned}\tag{2a}$$

式中 $\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，$\psi_{ij}$ 和 φ_{ij} 作为 (X_1, X_2, X_3) 的函数；

$$\psi_{ij}=\varphi_{ij}+a_{i,j}+a_{j,i}\tag{3a}$$

$$f_i=\oint_l e_{ipq}\varphi_{jp,q}dx_j\tag{6a}$$

及

$$m_i=\oint_l(\varphi_{ij}+e_{inm}e_{npq}\varphi_{jp,q}x_m)dx_j\tag{7a}$$

参 考 文 献

[1] 武际可，王敏中，弹性力学引论 (1981).
[2] 杜庆华等，弹性理论 (1986).
[3] Sternberg, E., Structural Mechanics (1960).
[4] Puré, A.I., Three Dimensional Problems of The Theory of Elasticity (1964).

(本文于 1989 年 2 月 5 日收到)