用应力偏量不变量表示屈服准则

黄文彬
(北京农业工程大学)

提要 本文对 Tresca 和双剪应力屈服准则，导出用应力偏量不变量 J_2、J_3 表示的公式。

关键词 应力偏量不变量，Tresca 屈服准则，双剪应力屈服准则

对于初始各向同性且不受静水应力影响的塑性材料，其屈服准则应具有如下形式

$$f(J_2, J_3)=0 \tag{1}$$

$$J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

$$J_3=|S_{ij}|$$

这里 S_{ij} 是应力偏量，J_2 和 J_3 是其第二和第三不变量。

对于 Tresca 屈服准则和双剪应力屈服准则，在主应力空间中都有较简单的表达式，而在非主应力空间中，如希望用式 (1) 的形式来表示一般则是比较复杂的。正如文献 [1] 所指出的，目前一般书上对 Tresca 屈服准则所给出的表达式

$$4J_2^3-27J_3^2-36K^2J_2^2+96K^4J_2-64K^6=0 \tag{2}$$

及对双剪应力屈服准则

$$J_3^2-K^2J_2^2+2K^4J_2-K^6=0 \tag{3}$$

都是不正确的，因此人们自然很希望知道这些屈服准则的正确的 $f(J_2, J_3)=0$ 形式究竟如何，本文在这里先给出结果然后予以证明。

Tresca：

$$f_1(J_2, J_3)=\frac{2\sqrt{J_2}}{\sigma_s}\cos\theta-1=0 \tag{4}$$

双剪应力(或最大偏应力)：

$$f_2(J_2, J_3)=\frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_s}\max\left[\left|\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right|,\left|\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right|\right]-1=0 \tag{5}$$

$$\theta=\frac{1}{3}\sin^{-1}g,\quad g=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\frac{J_3}{(J_2)^{3/2}}$$

$$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6} \tag{6}$$

Mises：

$$f_3(J_2, J_3)=\frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_S}-1=0 \tag{7}$$

在简单拉伸即 $\sigma_{11}=\sigma_S$ 时，三个式子将都给出 $f_1=0$，$f_2=0$，$f_3=0$。这时有

$$[\sigma]=\sigma_S\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$[S]=\sigma_3\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}=\frac{1}{3}\sigma_S^2$$

$$J_3=\sigma_S^3\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{2}{27}\sigma_S^3$$

$$g=-1,\quad \theta=-\frac{\pi}{6},$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=1$$

代入后得 $f_1=f_2=f_3=0$。

下面导出这些表达式，先在主应力空间导出用 J_2, J_3 表示的公式，由于这些量是不变量，故可以在非主应力空间中使用。

在主应力空间的 π 平面上来讨论屈服条

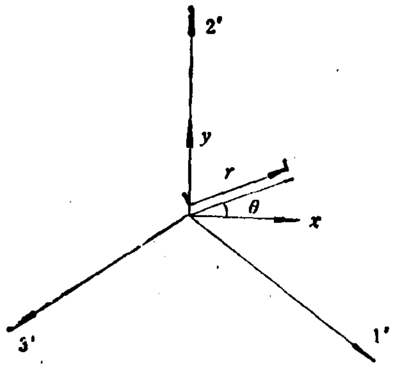

图 1

件，在 π 平面上点的直角坐标 x，y 与极坐标 r,θ 与主应力偏量值 S_1，S_2，S_3 有如下关系[2]（图 1）

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 - S_3) \\ y &= \frac{2S_2 - S_1 - S_3}{\sqrt{6}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2J_2} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2S_2 - S_1 - S_3}{S_1 - S_3} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

如果规定大小次序为

$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3$ 则将有

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \tag{10}$$

在 (9) 式中 r 已与 J_2 相关，现在要设法将 θ 也与 J_2, J_3 相关，为此先将 (9) 式中的 S_1, S_2, S_3 用 r,θ 来表示。这时有

$$S_1 - S_3 = \sqrt{2}\,x = \sqrt{2}\,r\cos\theta$$

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= (S_1 + S_3) - \frac{2}{3}(S_1 + S_2 + S_3) \\ &= \frac{1}{3}(S_1 + S_3 - 2S_2) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3}\,y = -\frac{\sqrt{6}}{3}\,r\sin\theta \end{aligned}$$

可解出

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,r\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2}r\left(-\sqrt{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,r\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$S_2 = -(S_1 + S_3) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r\sin\theta$$

$$\begin{aligned} J_3 = S_1S_2S_3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} r^3\sin\theta \\ &\quad\times \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} r^3\sin\theta\left(\sin^2\theta - \frac{3}{4}\right) \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{r^3}{4}\sin 3\theta \\ &= -\left(\frac{4}{3}J_2\right)^{3/2}\frac{\sin 3\theta}{4} \end{aligned}$$

$$3\theta = \sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{3}\,J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\,\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ S_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\,\sin\theta \\ S_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\,\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

对 Tresca 屈服准则，当规定 $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{6}$ 时为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_S$$

注意到

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 = S_1 - S_3 &= \sqrt{2}\,r\cos\theta \\ &= 2\sqrt{J_2}\cos\theta \end{aligned}$$

上式可改写为

$$f_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_S} - 1 = \frac{2\sqrt{J_2}\cos\theta}{\sigma_S} - 1 = 0$$

对于双剪应力屈服准则，这等价于最大偏应力屈服准则，即

$$\max(|S_1|, |S_2|, |S_3|) = \frac{2}{3}\sigma_S$$

由于 $S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3$，这时有可能

$$S_1 = \frac{2}{3}\sigma_S, \text{或} \quad S_3 = -\frac{2}{3}\sigma_S$$

故可表示为

$$\max\left(\frac{3}{2}\left|S_1\right|,\ \frac{3}{2}\left|S_3\right|\right)=\sigma_S$$

改写成

$$f_2=\frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_S}\max\left(\left|\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right|,\right.$$
$$\left.\left|\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right|\right)-1=0$$

例:

$$[\sigma]=\sigma_S\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$[S]=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.2\\ 0.2 & 0.2 & -0.5\end{bmatrix}$$

$$J_2=0.34\sigma_S^2,\ J_3=-0.007\sigma_S^3$$

$$g=\frac{3\sqrt{3}\times 0.007}{2(0.34)^{3/2}}=\frac{0.03637}{0.3965}$$
$$=0.09173$$
$$\theta=0.03062$$
$$\cos\theta=0.9995$$
$$\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0.8503,$$
$$\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-0.8809$$
$$f_1=1.1662-1=0.1662>0$$
$$f_3=1.01-1=0.01>0$$
$$f_2=0.8897-1=-0.11<0$$

从上式看出该应力状态违反 Tresca 与 Mises 屈服准则，但不违反双剪应力屈服准则。

参考文献

[1] 赵彭年，关于 Tresca 屈服条件的表达式，力学与实践，11,2(1989),53.
[2] 王仁、黄文彬，塑性力学引论，北京大学出版社(1982)，66.

(本文于 1989 年 4 月 19 日收到)

Wilson 非协调元在温度应力分析中的应用

唐永进　王勖成

(清华大学工程力学系)

提要　本文给出了将 Wilson 非协调元用于温度应力分析的理论推导及收敛条件。通过算例证明了采用线性单元计算温度，使用相应的非协调元计算位移和应变是一种好的匹配方案。

关键词　非协调元，温度应力，收敛条件

1. 引言

Wilson[1] 最初提出非协调之时，没有考虑温度应力，在有些通用程序中，因表达格式不正确，而导致计算结果失真[2]。本文导出了非协调元用于温度应力分析的正确表达格式，同时给出了非协调元收敛条件的证明。

采用位移元进行温度应力计算时，产生误差的另一个重要因素是应变的精度与温度的精度不匹配。本文通过采用非协调元计算位移和应变，用协调元计算温度，使这个问题得到了解决。

2. 非协调元用于温度应力分析

在考虑变温 T 时，弹性应力应变关系为:

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{(0)}) \tag{1}$$

其中 $\varepsilon_{kl}^{(0)}$ 是变温引起的初应变张量。

$$\varepsilon_{kl}^{(0)}=\begin{cases}\alpha T & (k=l)\\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

最小位能原理是总位能 π_p 的变分为零。

$$\pi_p=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(0)}\varepsilon_{ij}-f_iu_i\right)d\Omega-\int_{S_\sigma}\bar{T}_iu_ids \tag{2}$$

其中 f_i 和 $\bar{T}_i$ 分别是给定的体积力和边界面力，u_i 是位移向量，S_σ 是域 Ω 的给定外力的边界。

Wilson 非协调元的位移可表示为