等离子非线性扩散问题的积分方程数值分析

赵忠生　朱晓兰

（辽宁大学，数学系）

提要　为了对等离子体密度非线性扩散方程进行数值分析，首先以差商代替微商，然后用对应方程的基本解，使之化为积分方程、再用边界单元法求解.

关键词　非线性，积分方程，边界单元法

等离子体密度非线性扩散的控制方程是

$$A\nabla^2 S^2 = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$S = S(t, r)$ 是等离子体密度，它依赖于时间变量 t 和空间变量 r. A 是常量，不失一般性，令 $A = 1$，则有

$$\nabla^2 S^2 = \frac{\partial S}{\partial t} \tag{1}$$

令 $S^2 = W$，对右端以差商代替微商，由(1)可得

$$\nabla^2 W = \frac{\sqrt{W} - \sqrt{W^0}}{\Delta t} \tag{2}$$

$W^0 = W(0, r)$、$W = W(\Delta t, r)$. 对适当小的 Δt，由(2)可得较好的近似. 如令

$$N = \frac{\sqrt{W^0} - \sqrt{W}}{\Delta t} \tag{3}$$

则有

$$\nabla^2 W + N = 0 \tag{4}$$

设 W^* 是 Laplace 方程的基本解，即

$$\nabla^2 W^* + \delta(r - r_i) = 0 \tag{5}$$

其中 $\delta(r - r_i)$ 是 dirac delta 函数. 用格林公式得到对应于(4)及其定解条件的积分方程

$$\alpha^i W^i + \int_\Gamma P^* W d\Gamma = \int_\Gamma W^* P d\Gamma + \int_\Omega W^* N d\Omega \tag{6}$$

其中 W^i 是 r_i 点的 W 值. 而

$$\alpha^i = \begin{cases} 1 & (i\text{ 点在 }\Omega\text{ 内}) \\ \dfrac{1}{2} & (i\text{ 点在 }\Gamma\text{ 上}) \end{cases} \tag{7}$$

$$P^* = \frac{\partial W^*}{\partial n}, \qquad P = \frac{\partial W}{\partial n} \tag{8}$$

Γ 是区域 Ω 的边界，n 是 Γ 的外法线方向. 对于 i 点在 Ω 内及 Γ 上的两种情况，由(6)、(7)、(8)得

$$W^i + \int_\Gamma P^* W d\Gamma = \int_\Gamma W^* P d\Gamma + \int_\Omega W^* N d\Omega \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}W^i+\int_\Gamma P^*Wd\Gamma=\int_\Gamma W^*Pd\Gamma+\int_\Omega W^*Nd\Omega \tag{10}$$

为了用迭代法求解(9)、(10)，首先根据定解条件取Γ上的可能猜想值W_0及P_0并代入(9)，求出Ω中的W_1，进而得到N_1，再将N_1代入(10)，求出Γ上的W_2及P_2，于是完成了第一次迭代。一般过程是

$$W_n^i+\int_\Gamma P^*W_{n-1}d\Gamma=\int_\Gamma W^*P_{n-1}d\Gamma+\int_\Omega W^*N_nd\Omega \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}W_{n+1}^i+\int_\Gamma P^*W_{n+1}d\Gamma=\int_\Gamma W^*P_{n+1}d\Gamma+\int_\Omega W^*N_nd\Omega \tag{12}$$

考虑到收敛性，可要求W的连续两次值之差小于某一小量ε。余下的问题是用边界单元法将(11)、(12)化为代数方程组。求解(11)时，由于未知量W也包在N_n中，因此化成非线性代数方程组；求解(12)时，N_n为已知，因此化成的是线性代数方程组。求出$W(\Delta t,r)$后，再进一步求$W(2\Delta t,r)$，如此继续下去。

对于m个内点，(11)所对应的非线性代数方程组是下面十分规则的形式

$$\boldsymbol{W}+\mathrm{K}\sqrt{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{F} \tag{13}$$

K是系数方阵，$\boldsymbol{F}$是已知向量。未知向量

$$\boldsymbol{W}=[W_1,W_2,\cdots,W_m]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{W}}=[\sqrt{W_1},\sqrt{W_2},\cdots,\sqrt{W_m}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

为了说明本文方法的实质，下面给出一维问题的例。定解问题是

$$\frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2}=\frac{\partial S}{\partial t}\quad(-1<x<1)$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial n}\right|_{x=-1}=1$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial n}\right|_{x=1}=1$$

$$S\,|_{t=0}=x$$

令$S^2=W$，由(11)、(12)用边界单元法得代数方程组。此例的关键是解(13)型的非线性方程组。在Ω内按高斯积分点设置待求向量

表 1

步长	1.0		1.5		2.0	
比较	近似	解析	近似	解析	近似	解析
1	8.8333	8.8441	15.7909	15.7919	24.7384	24.7397
2	1.1025	1.0528	4.1032	4.1050	9.1559	9.1572
3	8.1932	8.2085	14.9348	14.9387	23.6645	23.6688
4	1.3320	1.2880	4.5532	4.5579	9.8236	9.8278
5	7.1954	7.1792	13.5299	13.5380	21.8883	21.8968
6	1.7776	1.7439	5.3762	5.3851	11.0178	11.0263
7	5.9017	5.9214	11.7760	11.7882	19.6425	19.6549
8	2.4731	2.4542	6.5747	6.5874	12.7082	12.7206
9	4.6055	4.6176	9.9006	9.9154	17.1982	17.2131
10	3.4288	3.4266	8.1140	8.1289	14.8162	14.8311

$$W = [W_1, W_2, \cdots, W_{10}]^T$$

控制迭代过程的小量取 $\varepsilon = 0.01$，迭代用的初值取5、10、17等常量。表1列出了时间步长为1、1.5、2时的值。为了说明解的稳定性，表2和表3分别给出了时间步长为0.9、1.4、1.9及1.1、1.6、2.1时的结果。

表 2

步长	0.9		1.4		1.9	
比较	近似	解析	近似	解析	近似	解析
1	7.6900	7.6945	14.1938	14.2423	22.8537	22.7901
2	6.7859	6.8243	3.2877	3.3346	8.0493	7.9868
3	7.0954	7.1025	13.3818	13.4326	21.8229	21.7928
4	8.6763	8.7410	3.6948	3.7439	8.6730	8.6138
5	6.1366	6.1474	12.0523	12.1062	20.1203	20.0651
6	1.2455	1.2557	4.4443	4.4969	9.7924	9.7380
7	4.9738	4.9880	10.3979	10.4548	17.9721	17.9216
8	1.8538	1.8676	5.6449	5.6008	11.3839	11.3340
9	3.7819	3.7981	8.6374	8.6959	15.6411	15.5936
10	2.7101	2.7262	6.9704	7.0284	13.3780	13.3307

表 3

步长	1.1		1.6		2.1	
比较	近似	解析	近似	解析	近似	解析
1	10.1535	10.0756	17.1521	17.4214	26.7256	26.7693
2	1.5738	1.5033	4.6910	4.9554	10.3642	10.4076
3	9.4698	9.3946	16.2551	16.5247	25.6084	25.6548
4	1.8480	1.7820	5.1871	5.4519	11.0756	11.1218
5	8.3592	8.2909	14.7800	15.0498	23.7583	23.8086
6	2.3723	2.3121	6.0878	6.3533	12.3445	12.3945
7	6.9957	6.9347	12.9319	13.2015	21.4144	21.4683
8	3.1762	3.1208	7.3875	7.6541	14.1335	14.1873
9	5.5728	5.5172	10.9460	11.2149	18.8566	18.9127
10	4.2607	4.2071	9.0415	9.3093	16.3555	16.4116

表 4

步长	1.0		1.5		2.0	
比较	近似	解析	近似	解析	近似	解析
1	24.3074	24.7397	49.0731	48.6353	81.0412	80.5309
2	6.8473	9.1572	23.0327	25.2616	47.2105	49.3659
3	23.4555	23.6688	47.9388	47.1290	79.6733	78.5893
4	7.7767	9.8278	24.5671	26.3675	49.3821	50.9023
5	21.9090	21.8968	45.8447	44.6145	77.1279	75.3321
6	9.4038	11.0263	27.2172	28.3086	53.0659	53.5912
7	19.7250	19.6549	42.8109	41.3885	73.3907	71.1221
8	11.6314	12.7206	30.7629	30.9870	57.8761	57.2535
9	17.0858	17.2131	39.0238	37.8086	68.6365	66.4041
10	14.2314	14.8311	34.8508	34.2356	63.2727	61.6401

（下转第39页）

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{QTQ}^T$$

则称 $\mathbf{T}$ 是客观的. 详细论述见[7,8].

$\mathbf{F}$ 是双点张量,当观察者变换时,有

$$\mathbf{F} \to \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{QF} \tag{15}$$

从而有

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{QF} - \mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T) \tag{16}$$

$$\tilde{K}^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{w}}^2 \neq K^2$$

由此可以看出 $\mathbf{w}$ 和 K 都不是客观的. 由 $\tilde{\mathbf{w}}$ 和 $\tilde{K}$ 可以直接写出

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{w}} + (1 \pm \sqrt{1 - \tilde{K}^2})\tilde{\mathbf{w}}^2/\tilde{K}^2 \tag{17}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}^T) - \mathbf{I} - (1 \pm \sqrt{1 - \tilde{K}^2})\tilde{\mathbf{w}}^2/\tilde{K}^2 \tag{18}$$

由上两式可以看出, 当观察者改变时, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{S}$ 都不按照通常的客观张量的规律变换. $\tilde{\mathbf{S}}$ 不仅是 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{Q}$, 而且还是 $\mathbf{R}$ 的一个相当复杂的函数. 这样的 $\mathbf{S}$ 能否作为应变的度量并进入本构关系要认真研究.

需要特别指出, 观察者的变换同时引起 K 的变化. 因此, 同一变形, 对某一观察者可能不存在"和分解", 而换一个观察者, 则分解又可能存在, 这只要取 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{F}$ 的极分解中的转动张量的逆就行了. 如前面所提到的简单剪切的例子, 只要观察者绕 $\boldsymbol{K}$ 转过一个合适的角度, 即可将 $\mathbf{F}$ 变为对称, 这时"和分解"就可毫无困难地进行了.

"和分解"对观察者的这种强烈依赖性, 使得对于一个非均匀的大变形场, 可能找不到一个统观全局的观察者, 使得对所有点的变形梯度, "和分解"都存在. 在这种情况下, 无法使用这种分解.

4. 结论

有限变形梯度"和分解"的思想源于无穷小变形的加法分解, 有着简单和便于应用的优点. 但是也存在着以前的讨论文章和本文所指出的缺陷一分解有限制条件, 并非对所有的变形都能进行; 分解不唯一, 这可能通过对 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{S}$ 附加某种限制条件来消除; 作为应变度量的 $\mathbf{S}$ 并不客观. 这些都限制了"和分解"的应用范围和被接受程度.

本文的讨论中使用了张量的不变表示, 所得到结论的正确性不因坐标系的选择而改变. $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{S}$ 是张量, 这是 $\mathbf{F}$ 是张量的自然延伸.

顺便指出, "和分解"所得到的应变张量的物理分量和云纹几何所得出的应变分量的表达式尚不足以证明有限变形条件下"和分解"的正确性. 这一分解, 作为无穷小变形加法分解的延伸, 当然适用于小变形, 和小变形条件下进行的实验符合是可以理解的. 但是不能由此推及**有限变形**.

"和分解"作为小变形理论, 是能够被人们所接受的, 将其用于有限变形, 尚需更多研究.

作者希望看到简单剪切大变形((14)式)当 $\gamma > 2$ 的"和分解"形式, 或指出这种变形不可能发生的物理条件; 也希望看到对于 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ 和 $\mathbf{F} = -\mathbf{I} + 2\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3$ 的分解, 以期进行进一步的讨论.

[本文于 1990 年 4 月收到]

(上接第 42 页)

表 4 是根据表 1 中的数值, 计算下一个步长所得的结果. 各表中按高斯积分点给出了十个点的值. 为了便于比较, 各种情况都给出了解析解的精确值.

参 考 文 献

[1] Du Qinghua, Boundary Element, Pergamon Press, (1986).
[2] Brebbia, C. A., Walker, S., Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth, (1980).
[3] 赵忠生, 马德录, 等离子扩散问题的边界单元法, 核聚变与等离子体物理, (1985).
[4] 赵忠生, 计算电机电磁场的一种新方法, 大电机技术, (1984).

(本文于 1990 年 4 月收到修改稿)