$$x_c = \frac{1}{7621} \times \int_0^{10} \frac{22 \times 2 \times \xi\left(-10.96 - \frac{\xi}{2}\sin 3.61\right) d\xi}{2} = -1.61\text{cm} = -16.1\text{mm}$$

$$y_c = \frac{-1}{1465} \times \int_0^{10} \frac{22 \times 2\xi\left(8.58 - \frac{\xi}{2}\cos 3.61\right)}{2} d\xi = -3.94\text{cm} = -39.4\text{mm}$$

应力互换定律在平面应力分析中的应用

张 仲 毅

（华 工 汉 口 分 院）

剪应力互等定律是材料力学中常用的一个定律．如所周知，它是应力互换定律在两微面相互垂直时的一种特殊情形．当两微面不相互垂直时应力互换定律对分析问题更显方便．一般空间应力状态的应力互换定律的证明可见于弹性理论书籍[1]．本文仅对平面应力状态用材料力学的方法作简单的证明，并举例说明它在平面应力分析中的应用．

证明　从处于平面应力状态的某点取出角度为 α，厚度为 1 的楔形微体，夹角两侧边的微面分别为 p、q 面，其上的应力记为 σ_p，τ_p 及 σ_q、τ_q（图 1）．

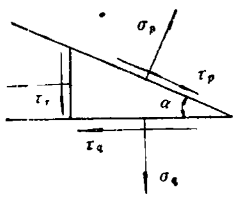


图 1

用一垂直于 q 面且垂直于微体上下表面的截面 r 截出一脱离体，设 r 面上的应力为 σ_r，τ_r，若 dA 为 p 面的面积，c 点为 p 面的形心，由力矩平衡关系，有

$$\Sigma M_c = 0.$$

即

$$-\tau_q dA\cos\alpha \times \frac{dA}{2}\sin\alpha + \tau_r dA\sin\alpha \times \frac{dA}{2}\cos\alpha = 0$$

化简得 $\tau_r = \tau_q$，此即剪应力互等定律．

设 n_q 为 q 面的法线，由 n_q 方向力的平衡，有 $\Sigma N_q = 0$，即

$$\sigma_q dA\cos\alpha + \tau_r dA\sin\alpha - \sigma_p dA\cos\alpha + \tau_p dA\sin\alpha = 0$$

整理得　$-\sigma_q\cos\alpha - \tau_q\sin\alpha = -\sigma_p\cos\alpha + \tau_p\sin\alpha$

或简记为　$\sigma_{qp} = \sigma_{pq}$

此即应力互换定律，即 q 面上的应力在 p 面法线上的投影等于 p 面上的应力在 q 面法线上的投影．从推导过程可知，其物理意义表示沿两微面法线中的任一条方向力的平衡．

应用　因为应力互换定律不涉及微体的微面积，故可较方便地推导平面应力状态下斜截面上应力的公式，或者求解某些类型的问题．如推导斜截面上应力公式（图 2），由斜截面与垂直截面之间及斜截面与水平截面之间的应力互换关系可得

$$-\sigma_\alpha\cos\alpha - \tau_\alpha\sin\alpha = -\sigma_x\cos\alpha + \tau_x\sin\alpha$$

$$-\sigma_\alpha\sin\alpha + \tau_\alpha\cos\alpha = -\sigma_y\sin\alpha + \tau_y\cos\alpha$$

解此方程组，并注意 $\tau_x = \tau$，可得斜截面上应力公式

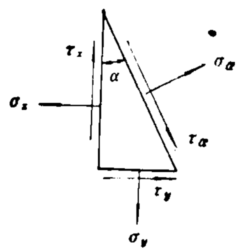


图 2

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x\cos 2\alpha$$

再举一算例，二向应力状态如图 3 所示，应力单位为 MN/m^2，试求另一主应力．

解：由垂直截面与斜截面之间的应力互换关系可

得

$$-80\cos 60° = -50\cos 60° - \tau\sin 60°$$

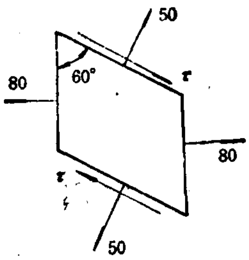


图 3

由此解得 $\tau = 10\sqrt{3}$ MN/m² 再用一水平截面截出一脱离体，由斜截面与水平截面之间应力互换关系可得

$$-50\cos 30° + 10\sqrt{3}\sin 30° = -\sigma\cos 30°$$

解出另一主应力为 $\sigma = 40$MN/m²

另外的应用,或许是更为重要的应用,就是快速地检查斜交截面上应力是否合理. 例如文[2]的题 8-14 图(图 4). 由应力互换定律得

$$45\cos 30° + 25\sqrt{3}\sin 30° = 95\cos 30° - 25\sqrt{3}\sin 30°$$

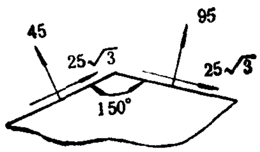


图 4

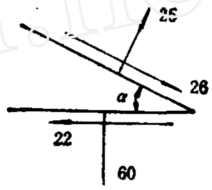
移项即知此式恒成立. 说明文[2]的题 8-14 图是正确的. 可是有些现行教材却忽视了这个问题,如文[3]第七章的题 6 图(图 5),由应力互换定律可得

$$-25\cos\alpha + 26\sin\alpha = -22\sin\alpha - 60\cos\alpha$$

整理得 $35\cos\alpha = -48\sin\alpha$

因为 $\alpha < \frac{\pi}{2}$,显然上式是不成立的. 故文[3]第七章题 6 图是不正确的. 由此可知文[4]对这个问题的解答也是不正确的.

总之,应力互换定律在平面应力状态下推导简单,物理意义明确,既可用于公式推导,也可用于实际问题的解算和检查. 因此建议材料力学在编写或讲授剪应力互等定律时可稍加引伸, 增加应力互换定律的内容.



单位为MPa

图 5

参 考 文 献

[1] 王龙甫,弹性理论(1978),25.
[2] 刘鸿文,材料力学上册(1982),321.
[3] 单辉祖,材料力学教程(1982),228.
[4] 刘观新、潘孝禄,材料力学学习指导(1987)116.

梁的刚度及弯矩突变时的差分处理

王 维 袁 祥 忠

(西 南 石 油 学 院)

积分等解析方法求梁挠度的基本方程是挠曲线近似微分方程 $v'' = \frac{M}{EI}$,因此无论是 M 还是 EI 突变,都将使 v'' 出现不连续性问题. 本文将考虑 v'' 的不连续性问题,导出求解挠度的一般中央差分方程.

1.差分点取在刚度或弯矩突变处时的差分方程

设图 1 所示挠曲线 v 在结点 x_i 发生曲率突变,即设 $v''_{i-} \neq v''_{i+}$(左导数不等于右导数). 将挠曲线函数在点 x_i 展开,并略去步长的 3 次以上的项,可得

$$v_{i-1} = v_i - v'_i h_L + \frac{1}{2} v''_{i-} h_L^2$$

$$v_{i+1} = v_i + v'_i h_R + \frac{1}{2} v''_{i+} h_R^2$$

解得

$$v_{i-1}h_R - v_i(h_L + h_R) + v_{i+1}h_L = \frac{h_L h_R}{2}(v''_{i-}h_L + v''_{i+}h_R) \tag{1}$$

特别地,当 $h_L = h_R = h$ 则有