

纹而言,蠕变断裂应力强度因子与粘弹性裂纹体的能量释放率之间,存在与线弹性断裂力学中完全相似的 $G-K$ 关系,因此只要裂纹在原裂纹面内扩展,本文介绍的方法就可推广至复合型裂纹.例如对一般复合型问题,在由(3)式求得 $K_I(t)$ 、 $K_{II}(t)$ 、 $K_{III}(t)$ 之后,可用准则

$$K_I^2(t) + K_{II}^2(t) + 1/(1-\nu)K_{III}^2(t) = K_{Ic}^2$$

进行蠕变断裂分析.因为 I 型、III 型及 I-III 型复合型裂纹一般均在原裂纹面内扩展,另外文献[3]的实验表明 II 型裂纹也可能在原裂纹

面内扩展,故本文介绍的方法有着较为广泛的适用范围.

参 考 文 献

- [1] 周筑宝,蠕变断裂应力强度因子及其应用,固体力学学报,1(1983),p.100.
- [2] 中国航空研究院主编,应力强度因子手册,科学出版社(1981).
- [3] Liebowitz, H., Eftis, J. and Jones, D.L., Proceed. 4th Int. Confer. Fracture (1977), p. 695.

(本文于1989年9月7日收到)

圆筒外壁双边裂纹扭转问题的应力强度因子计算

王 元 汉
(华中理工大学)

摘要 本文提出了一组应力函数,用边界配置法计算了含外壁双边裂纹的扭转圆筒的扭转刚度和 III 型应力强度因子.当内孔很小时,计算结果与含双边裂纹扭转圆筒的已知解一致.同时,本文给出了不同几何尺寸下圆筒扭转的计算结果.所用方法可以用于含外壁双边裂纹的不同形状筒类结构的扭转问题.

关键词 圆筒,双边裂纹,扭转,应力强度因子,边界配置法

空心柱体承受扭转的情形在工程实际中是十分普遍的.但对这类结构的断裂分析并不多见,仅有圆筒外壁单边裂纹的扭转问题,Emery 等人^[1]用有限差分法进行过研究.

边界配置法是计算应力强度因子的一种有效方法,许多 I 型问题用它都得到了满意的结果.崔振源、陈宜周^[2]采用该方法计算了单边裂纹柱体的扭转问题.假设不同的应力函数,作者进一步得到了含中心裂纹、双边裂纹扭转杆的结果.这种方法也可用于含裂纹筒类结构的扭转问题,本文分析含外壁双边裂纹圆筒的扭转情形.

1. 计算公式

根据弹性理论,柱体的扭转问题归结为求

解应力函数 $\phi(x, y)$ 的定解问题^[3]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

$$\phi|_{L_i} = \phi_i \quad (2)$$

应力分量与应力函数之间的关系为

$$\tau_{xz} = \mu\theta \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$\tau_{yz} = -\mu\theta \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

对于本文所讨论的双连通域情形,扭矩 T 为

$$T = 2\mu\theta \left(-\phi_0\Omega_0 + \phi_1\Omega_1 + \iint_{\Omega} \phi dx dy \right) \quad (4)$$

式中 ϕ_0 、 ϕ_1 分别为 ϕ 在外、内边界上的值,它们为常数,且仅一个可任意确定; Ω_0 、 Ω_1 分别为外、内边界包围的面积, Ω 为边界之间的面积.

柱体的扭转刚度为

$$D = \frac{T}{\theta} = 2\mu \left(-\phi_0\Omega_0 + \phi_1\Omega_1 + \iint_{\Omega} \phi dx dy \right) \quad (5)$$

类似文献[2],令

$$\phi(x, y) = u(x, y) - y^2 \quad (6)$$

则(1)、(2)式可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

$$u|_{L_i} = y^2 + \phi_i \quad (8)$$

(7) 式所表示的函数 $u(x, y)$ 是一个调和函数。根据复变函数的性质, 可令 $u(x, y)$ 为某一复变函数的实部或虚部, 则 (7) 式自然满足。同时考虑到裂纹尖端应力奇异性, 以及裂纹面上函数 $u(x, y)$ 的特点, $u(x, y)$ 可设为

$$u(x, y) = \text{Im} \left(\sum_{K=-N}^M E_K \sqrt{z^2 - c^2} z^{K-1} \right) \quad (9)$$

式中“Im”表示取虚部, M 、 N 为幂函数项数, E_K 为待定实系数, c 为坐标原点到裂纹尖端的距离, 裂纹位于 x 轴上。

按图 1 所示的坐标系, (9) 式可展开为

$$u(x, y) = \sum_{K=-N}^M E_K \sqrt{r_1 r_2} r^{K-1} \times \left[\cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin(K-1)\vartheta + \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \cos(K-1)\vartheta \right] \quad (10)$$

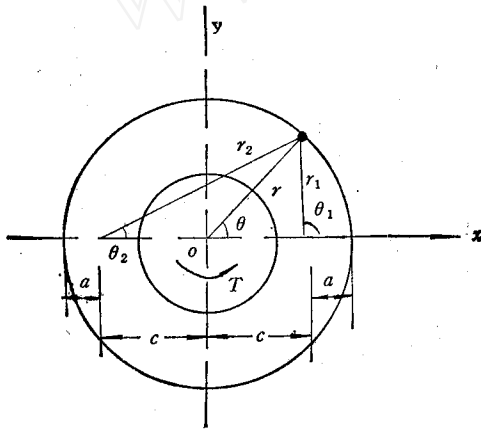


图 1 含外壁双边裂纹扭转圆筒

如果取 $\phi(x, y)$ 在外边界上的常数 $\phi_0 = 0$, 由 (8) 式知:

$$u|_{\text{裂纹面}} = 0$$

不难验证, (10) 式所示的函数使上式恒成立。

这样, 剩下问题是使函数满足内边界和外边界(除裂纹面)上的边界条件。让 $u(x, y)$ 在边界上每一点都严格满足 (8) 式是困难的。作

力学与实践

为近似解, 我们可在内、外边界选取一定数目的点, 令 (8) 式成立, 从而由联立方程确定待定系数 E_K 和未知常数 ϕ_1 。进而应力函数 $u(x, y)$ 由 (10) 式, $\phi(x, y)$ 由 (6) 式确定, 扭转刚度由 (5) 式确定, 其中积分通常采用数值积分。

当应力函数及扭转刚度确定后, 由 (3) 式可确定剪应力分量:

$$\tau_{xz} = \mu \vartheta \left\{ \sum_{K=-N}^M -E_K \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \times \left[K r^K \left(\cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \cos K\vartheta + \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin K\vartheta \right) - c^2(K-1)r^{K-2} \left(\cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \times \cos(K-2)\vartheta + \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \times \sin(K-2)\vartheta \right) \right] + 2y \right\} \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = -\mu \vartheta \sum_{K=-N}^M E_K \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \times \left[K r^K \left(\cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin K\vartheta - \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \cos K\vartheta \right) - c^2(K-1)r^{K-2} \left(\cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \times \sin(K-2)\vartheta - \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \times \cos(K-2)\vartheta \right) \right] \quad (12)$$

裂纹端的应力强度因子由下式确定:

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \pm c} \sqrt{2\pi(r \mp c)} e^{-i\alpha} \tau_{yz}|_{r=\pm c} \quad (13)$$

式中 α 为裂纹与 x 轴夹角。对右边裂纹, $\alpha = \pi$ 。由 (12)、(13) 式, 得

$$K_{III} = \mu \vartheta \sqrt{\pi} \sum_{K=-N}^M E_K c^{K-0.5} \quad (14)$$

为将应力强度因子无量纲化, 可令

$$F_{III} = K_{III}/K_0,$$

其中

$$K_0 = \tau_0 \sqrt{\pi a}$$

式中 τ_0 为圆筒外表面处的剪应力

$$\tau_0 = \frac{2R_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad (15)$$

式中 R_2 和 R_1 分别为圆筒外、内半径。

2. 计算结果

2.1 与圆轴结果对比

含双边裂纹圆轴扭转问题曾由 Tweed 等^[4] 用积分变换方法进行过研究。为了考察本文方法的有效性, 首先计算 R_1/R_2 比值很小情形, 将计算结果与圆轴问题解进行比较。

取圆筒外半径 $R_2 = 1$, 内半径

$$R_1 = 0.01.$$

由于问题的对称性, 可取一半截面进行计算。对应不同裂纹长度, 取幂函数项数 $M = N = 20$, 内外边界上配点按等角度分布, 配点个数 $N_1 = N_2 = 60$ 。选取较多配点, 用最小二乘法求解, 通常可得较好结果。

按本文方法计算的应力强度因子 K_{III}/K_0 值与文献 [4, 5] 结果对比列于表 1。由表可见, 对应不同裂纹长度, 两种方法所得对应结果相符得都很好。考虑到圆筒内径很小, 且位于扭转杆的中心, 对扭转结果影响很小。由两种不同方法所得结果的一致性, 说明本文方法具有良好的精度。

表 1 圆筒 ($R_1 = 0.01$) K_{III}/K_0 值及与圆轴结果比较

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
本文结果	0.9661	0.9550	0.9647	0.9885	1.0191	1.0427	0.0354	0.9545	0.7409
文献 [4,5]	0.965	0.954	0.965	0.991	1.021	1.045	1.034	0.950	0.740

2.2 不同尺寸的圆筒结果

对于不同内、外半径比 R_1/R_2 , 和不同裂纹长度与筒厚比 $a/(R_2 - R_1)$ 的情形, 计算了圆筒的扭转刚度和应力强度因子。计算结果列于表 2 和表 3, 并绘于图 2、图 3。

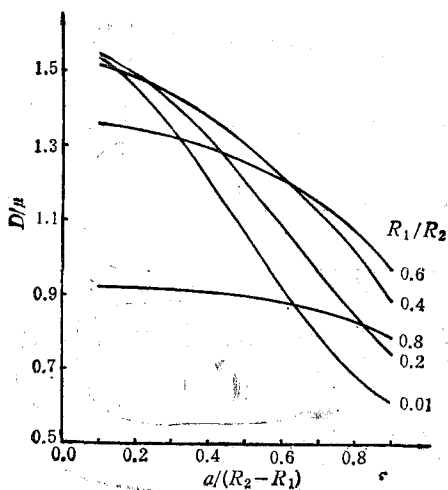


图 2 圆筒 D/μ 变化曲线

由表 2、图 2 可见, 对某一确定 R_1/R_2 值,

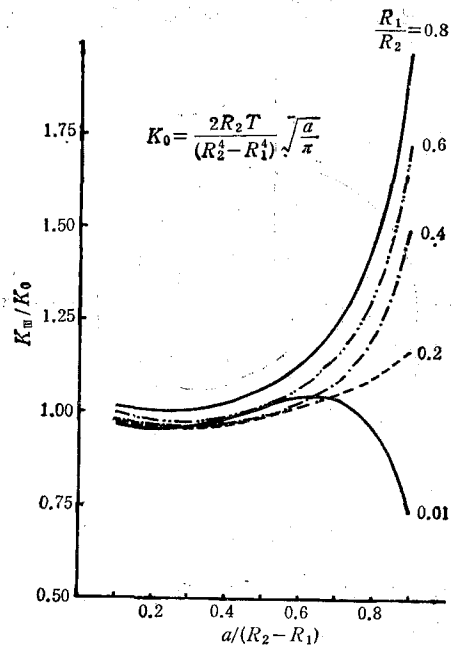


图 3 圆筒 K_{III}/K_0 变化曲线

D/μ 值随着裂纹长度的增加而减小, 并且对应 R_1/R_2 较大的曲线, 下降速度较快, 对应不同

表2 圆筒 D/μ 计算结果

$\frac{R_1}{R_2}$	$a=0$ [公式(16)]	$a/(R_2 - R_1)$								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	1.5708	1.5426	1.4651	1.3521	1.2156	1.0683	0.9241	0.7943	0.6914	0.6235
0.2	1.5683	1.5508	1.4989	1.4207	1.3223	1.2100	1.0909	0.9706	0.8550	0.7444
0.4	1.5305	1.5213	1.4909	1.4437	1.3818	1.3073	1.2234	1.1276	1.0202	0.8899
0.6	1.3672	1.3629	1.3505	1.3279	1.2971	1.2576	1.2098	1.1513	1.0783	0.9753
0.8	0.9274	0.9267	0.9233	0.9177	0.9087	0.8974	0.8838	0.8642	0.8370	0.7904

表3 圆筒 K_{III}/K_0 计算结果

$\frac{a/(R_2 - R_1)}{R_1/R_2}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	0.9661	0.9550	0.9647	0.9885	1.0191	1.0427	1.0354	0.9545	0.7409
0.2	0.9724	0.9554	0.9562	0.9687	0.9907	1.0190	1.0513	1.0883	1.1711
0.4	0.9857	0.9629	0.9604	0.9689	0.9896	1.0244	1.0859	1.2012	1.4957
0.6	0.9945	0.9789	0.9772	0.9890	1.0157	1.0629	1.1466	1.3088	1.7257
0.8	1.0172	1.0050	1.0150	1.0306	1.0664	1.1273	1.2352	1.4421	1.9679

$\frac{R_1}{R_2}$ 值情形,如果裂纹很小(如 $a/(R_2 - R_1) \rightarrow 0.1$), D/μ 值接近于对应的无裂纹圆筒扭转刚度比值,后者即材料力学中的转动惯量 J_p [6]:

$$\frac{D}{\mu} = J_p = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) \quad (16)$$

由图3可见,当裂纹长度比值 $a/(R_2 - R_1)$ 不大时 (≤ 0.6), 不同 $\frac{R_1}{R_2}$ 圆筒 K_{III}/K_0 计算结果相差不多;当 $a/(R_2 - R_1)$ 值较大时 (≥ 0.7), 不同 $\frac{R_1}{R_2}$ 圆筒计算结果相差越来越大。特别对

应 $\frac{R_1}{R_2} = 0.01$ 的曲线,表明 R_1/R_2 很小时,

K_{III}/K_0 值在裂纹长度进一步增加时

$$(a/(R_2 - R_1) \geq 0.7)$$

反而急剧下降。这种变化与 R_1/R_2 较大圆筒变化规律不同。由此也说明研究圆筒规律的必要性。

2.3 收敛性检验

为了考察假设函数和计算方法的收敛性,

计算中改变幂函数项数 M 、 N 以及内、外边界配点个数 N_1 、 N_2 。为简单起见,每次仅有一个参数进行变化。结果表明,只要这些参数不是很小时,计算结果总是令人满意的。

3. 结论

本文提出了一组复应力函数,采用边界配置法计算了圆筒外壁双边裂纹的扭转问题。本文仅以圆筒为例,其方法适用于不同形状空心柱体,两边裂纹长度也不一定要求相等。实践表明,本文方法简单有效,计算量小,精度较高,可推广应用用于其他更复杂扭转问题的断裂分析。

参 考 文 献

- [1] Emery, A. F., Segedin, C. M., *J. bas. Engng.*, 94(1972), 387-393.
- [2] 崔振源,陈宜周,固体力学学报,4(1981), 503-511.
- [3] 王龙甫,弹性理论,科学出版社(1978).
- [4] J. Tweed, D. P. Rooke, *Int. J. Engng. Sci.*, 10(1972), 801-812.
- [5] 中国航空研究院, 应力强度因子手册, 科学出版社(1981), 407页.
- [6] 孙训方,方孝淑,陆耀洪,材料力学,上册(1964).

(本文于1989年11月26日收到)