梁内剪应力公式一种新的讲法

肖 芳 淳

(西南石油学院)

本文鉴于过去讲梁内剪应力公式时，讲的方法虽然很多，但归根到底不外乎两种，一种是从弯曲正应力的分布出发来推导公式，结果使学生感觉繁杂，难以理解，占的课时也不少；另一种是直接介绍公式，不加推证，这样，使学生囫囵吞枣，知其然不知其所以然. 因此，这两种讲法的共同缺点，就是过份强调了教师的主导作用，忽视了学生的主体作用. 为了克服这个缺点，本文作者认为讲课教师应由学生熟悉公式入手，从分析问题出发，讲思路，讲方法，着重把思维方法教给学生，以发挥其主体作用. 下面来谈谈如何讲法.

在讲这个公式时，教师先从弯曲正应力分布谈起，顺势提出本讲要讲的是剪应力分布问题，然后在梁内切取单元体，由静平衡条件得出剪应力与弯曲正应力的微分关系式，再把弯应力公式代入后进行积分，由梁顶或梁底剪应力为零的边界条件，以确定含 x 未知量的积分参数，最后便得梁内的剪应力公式[1]. 现把这种新的讲法，具体加以介绍.

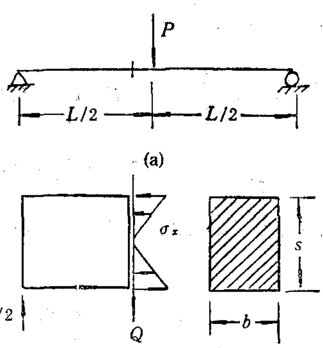

图 1

如图1所示一矩形截面梁的弯曲正应力公式为

$$\sigma_x = -\frac{My}{I_z} \tag{1}$$

此式表示梁内正应力的分布规律，而剪应力在梁内截面上又是怎样分布的呢?

一般说来，弯曲正应力是支配梁强度计算的主要因素，但在某些情况下，例如一些跨长较短截面较窄而高的梁，仍能维持其稳定状态，其剪应力就可能有相当大的数值，此时有必要进行剪应力的强度校核，因而在此讨论剪应力的分布.

在图1中，设一宽为 b 高为 h 的矩形截面梁，其截面上沿 y 轴方向有剪力 Q，如若 $h>b$，则可以假设横截面上任意点处的剪应力 τ_x 都平行于剪力 Q，且距中性轴等远各点上的剪应力相等. 这时横截面上任意点处的剪应力计算公式为

$$\tau_x = \frac{QS_z}{I_z b} \tag{2}$$

式中，Q 为横截面上的剪应力；I_z 为整个横截面对中性轴 z 的惯矩；b 为横截面在所求剪应力处的宽度；s_z 为横截面上剪应力 τ_x 所在的横线至边缘部分的面积(即图2中的阴影部分)对中性轴的静矩.

下面结合矩形截面说明横截面上剪应力的计算公式(2)的推证方法.

在梁内切取厚度为1的一个单元体，不计体力，如图3所示. 由图可知，由于 σ_x，τ_x 沿 x 方向发生变化

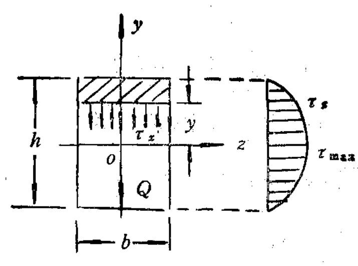

图 2

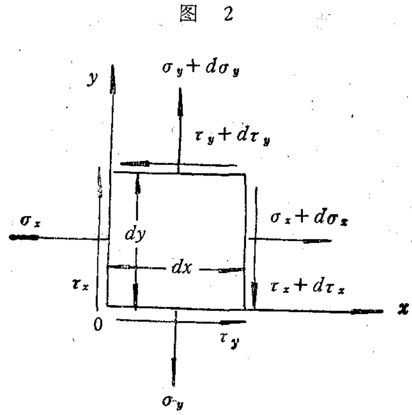

图 3

而有

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$d\tau_x = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx$$

由于 σ_y,τ_y 沿 y 方向发生变化而有

$$d\sigma_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$d\tau_y = \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy$$

根据剪应力互等定律 $\tau_y = \tau_x$,由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) 1 \cdot dy - \sigma_x \cdot 1 \cdot dy - \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy\right) 1 \cdot dx + \tau_x \cdot 1 \cdot dx = 0$$

或

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

同理可得

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

把(1)式代入(3)中得

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} = -\frac{y}{I_z} \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{Qy}{I_z} \qquad (5)$$

上式积分得

$$\tau_x = -\frac{Q}{I_z} \frac{y^2}{2} + C_1(x) \qquad (6)$$

当 $y = \pm \frac{h}{2}$ 时,$\tau_x|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0$,于是可以求得

$$C_1(x) = \frac{Q}{2I_z} \frac{h^2}{4}$$

把上式代入(6)式得

$$\tau_x = \frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (7)$$

若以 s 表示梁截面对中性轴的静矩,则矩形截面的静矩为

$$s = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (8)$$

因而(7)式改写为

$$\tau_x = \frac{Qs}{bI_z} \qquad (9)$$

这就是梁内任一截面的剪应力分布公式[1]. 当 b、I_z 为常值时,则最大剪应力公式为

$$\tau_{x\max} = \frac{Q_{\max} s_{\max}}{bJ_z} \qquad (10)$$

对于矩形截面梁来说,梁内截面上的最大剪应力公式为

$$\tau_{x\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \qquad (11)$$

把(7)式代入(4)式中,考虑 $\frac{\partial Q}{\partial x} = q$ 得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{1}{2I_z} \frac{\partial Q}{\partial x}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

上式积分之,得

$$\sigma_y = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3\right) + C_2(x) \qquad (12)$$

根据 $y = 0$, $\sigma_y|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0$, 则有

$$C_2(x) = \frac{q}{2I_z} \frac{h^3}{12}$$

以之代入(12)式中得

$$\sigma_y = \frac{q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{h^3}{12}\right) \qquad (13)$$

由于 $q = 0$, (13)式足以说明各纵向纤维之间互不挤压这个假设是完全正确的.

综上所述,这种讲法,不仅教会学生"学会"而且教会学生"会学",充分调动了学生学习的主动性和积极性,培养了学生创造性思维能力,故不失为一种新的讲法.

参 考 文 献

[1] 顾震隆,短纤维复合材料力学,国防出版社 (1987),226—231.

关于弹性力学中的几个特殊不定解问题

贾 普 荣

(西 北 工 业 大 学)

1. 序言

弹性力学中的平面楔形体受力问题,早已被人们所研究,许多重要结果可从[1-4]等著作中找到. 通常都是根据弹性解的唯一性定理,选择适当的应力函数,