

4. 结束语

由上述分析表明,修正的 Dugdale 窄带屈服模型是模拟聚碳酸酯板 I 型运动裂纹的合理模型。混合法确定了快速扩展裂纹顶端附近的应力场,由此并可以计算相应的 J 积分,裂纹尖端张开位移 CTOD 等延性断裂判据。A. S. Kobayashi 等人已用此模型研究铝板裂纹试件的快速撕裂,这对工程实践是非常有意义的。

虽然,光塑性技术在发展、完善之中,可以

看到它能进一步对聚碳酸酯裂纹的弹塑性行为和残余应力状态作深入的研究。

参 考 文 献

- [1] H. F. Brinson, *Exp. Mech.*, 10 (1970), p. 72-77.
 [2] Y. J. Sun, O. S. Lee, and A. S. Kobayashi, *proc. ICF Symp. Fract. Mech., Beijing (1983)*, p. 583-588.

(本文于 1990 年 8 月 3 日收到)

考虑剪切变形影响的叠层梁层间接触应力研究

罗建辉 钟正华 韩军营

(湖南大学, 410082)

提要 本文采用两个广义位移梁理论,求得了叠层梁层间接触应力呈双曲函数的分布规律。得到了几种常见叠层梁弹性接触问题的解。

关键词 弹性叠层梁,接触应力,横向剪切变形

1. 引言

文中的叠层梁是指由数根梁重叠来承受荷载的弹性结构,其特点是不计梁层间摩擦。叠层梁研究的关键问题是求发生接触的区域和层间接触应力。文[1]指出了在梁的接触问题中必须考虑剪切变形的影响。文[3]用能量法求得了层间接触应力的近似解。文[5]讨论了叠层梁的接触规律,但没有考虑剪切变形影响。本文考虑了剪切变形的影响,先对叠层梁的一般情况求解,然后对几种典型梁的问题分析讨论,为解决叠层梁的弹性接触问题提供了有效的方法。

2. 叠层梁层间接触应力的通解

根据两个广义位移梁的理论^[1],采用“共同曲率”假设^[2],对图 1 所示叠层梁有:

$$\begin{aligned} C_1 \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dx} \right) &= q_R - q_0, \\ D_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + C_1 \left(\frac{dW}{dx} - \varphi_1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C_2 \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{d\varphi_2}{dx} \right) &= -q_R, \\ D_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + C_2 \left(\frac{dW}{dx} - \varphi_2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

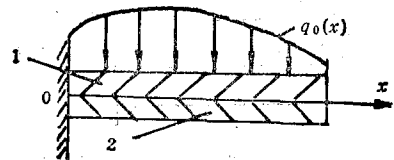


图 1

C_1 和 D_1 , C_2 和 D_2 分别是上梁 1 和下梁 2 的剪切刚度和弯曲刚度, q_R 为层间法向接触应力。由(1)和(2)变换得:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} - K^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} &= \frac{K^2}{D_1 + D_2} \\ &\cdot \left[\frac{D_2}{C_2} \frac{dq_0}{dx} - \int q_0(x) dx + L \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$q_R = D_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{1}{C_2} \int q_0(x) dx - \frac{L}{C_2} \\ - \frac{D_1}{C_1 C_2} (C_1 + C_2) \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $K^2 = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) / \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$, L 为积分

常数。

为简明起见,设梁受均布荷载,即 $q_0(x) = q$ 。求解(3)得 φ_1 和 q_R , φ_2 由(5)确定。

$$\varphi_1 = B_1 + B_2x + H_1\text{ch}(kx) + H_2\text{sh}(kx) + \frac{1}{D_1 + D_2} \left(\frac{qx^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) \quad (6)$$

$$q_R = \frac{D_2q}{D_1 + D_2} - K^3D_1[H_1\text{sh}(kx) + H_2\text{ch}(kx)] \quad (7)$$

式(5)、(6)、(7)是叠层梁受均布荷载作用时的一般解,各积分常数由边界条件确定。在式(6)中,前一项为经典理论所对应,后一项为考虑剪切变形影响所对应,后者呈双曲函数的规律分布。

3. 层间接触应力分析实例

3.1 悬臂梁受均布荷载,并在自由端受横向集中力和力偶作用,如图2所示。由

$$\varphi_1|_{x=0} = 0, \quad \varphi_2|_{x=0} = 0, \quad M_1|_{x=l} = -M_0, \\ M_2|_{x=l} = 0, \quad Q_1 + Q_2 = q(l-x) + P$$

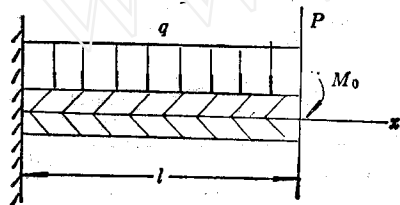


图 2

确定(6)中的积分常数得:

$$\varphi_1 = \frac{1/K^2 - A_1^2}{D_1 + D_2} \left\{ (ql + P) \left[\frac{\text{ch}(kx - kl)}{\text{ch}(kl)} - 1 \right] + q \left[x - \frac{1}{K} \frac{\text{sh}(kx)}{\text{ch}(kl)} \right] \right\} + \frac{D_2M_0}{KD_1(D_1 + D_2)} \frac{\text{sh}(kx)}{\text{sh}(kl)} + \theta_0 \\ \varphi_2 = \frac{1}{D_2} [(D_1 + D_2)\theta_0 - D_1\varphi_1] \\ q_R = \frac{D_1D_2K}{D_1 + D_2} \left\{ \frac{A_1^2 - A_2^2}{C_1 + C_2} \left[(ql + P) \cdot \frac{\text{sh}(kx - kl)}{\text{ch}(kx)} - \frac{q}{K} \right] - \frac{KM_0}{D_1} \right\} \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(kl)} + \frac{D_2q}{D_1 + D_2} \quad (8)$$

式中

$$\theta_0 = \left[q \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^2x}{2} \right) + P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + M_0x \right] / (D_1 + D_2),$$

$$A_i = \frac{C_i}{D_i} \quad (i = 1, 2)$$

由(8)式可知下列情形 q_R 为负: 只受 M_0 作用; 只受 P 作用, 且 $A_1^2 < A_2^2$ 。可见此处共同曲率假设不成立。重新假设它们只在荷载作用处为点接触来求解。

设点接触处集中接触力为 R 。对于图2所示悬臂梁,取 $q = 0$ 得:

$$C_i \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} - \frac{d\varphi_i}{dx} \right) = 0,$$

$$D \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} + C_i \left(\frac{dW_i}{dx} - \varphi_i \right) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

边界条件为:

$$\varphi_1|_{x=0} = 0, \quad M_2|_{x=l} = -M_0, \\ Q_1|_{x=l} = P - R, \quad W_1|_{x=0} = 0 \\ \varphi_2|_{x=0} = 0, \quad M_2|_{x=l} = 0, \\ Q_2|_{x=l} = R, \quad W_2|_{x=0} = 0$$

参见文[4]求解(9)得:

$$\varphi_1 = -\frac{(P-R)}{D_1} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + \frac{M_0x}{D_1} \\ W_1 = \frac{(R-P)}{D_1} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} - \frac{D_1x}{C_1} \right) + \frac{M_0}{2D_1} x^2 \\ \varphi_2 = -\frac{R}{D_2} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right), \\ W_2 = -\frac{R}{D_2} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l}{2} x^2 - \frac{D_2x}{C_2} \right)$$

根据点接触条件, $W_1|_{x=l} = W_2|_{x=l}$ 得:

$$R = \left[\left(\frac{l^2}{3D_1} + \frac{1}{C_1} \right) P + \frac{M_0}{2D_1} \right] / T_0,$$

$$T_0 = \frac{l^2}{3} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

3.2 长为 l 简支梁受均布荷载中点受集中力作用,如图3所示。可以等效为悬臂梁的情形,如图4所示。

4. 层间接触应力和接触状态的讨论

对于共同曲率假设所得的解,若 $q_R \geq 0$; 对于点接触所得的解,若 $\delta(x) = W_2 - W_1 \geq 0$;

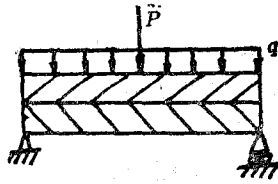


图 3

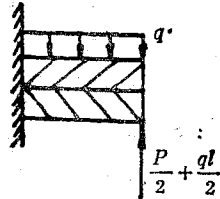


图 4

则所求解为实际的弹性接触解。以下各图中 q_R 的分布由如下参数计算而得:

$$D_1 = 2.5 \text{ MN} \cdot \text{m}^2, C_1 = 10^3 \text{ MN},$$

$$D_2 = 12.49 \text{ MN} \cdot \text{m}^2, C_2 = 512 \text{ MN}$$

A 为经典理论解, B、C 和 D 为本文的结果, 所对应的梁长分别为 1m、2m 和 5m。图中的横坐标为 x/l 。

4.1 当上下梁刚度相同, 即 $A_1^2 = A_2^2$ 时, 可知 $q_R = \frac{1}{2} q \geq 0$, 从而两梁总是自然地贴合, 层间应力呈均布状态。这与直梁的经典理论解一致。

4.2 悬臂梁只受力偶作用。显然 $q_R < 0$, 而点接触反力 $R > 0$, 又

$$\delta(x) = \frac{M_0}{2D_1} x(l-x) \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) xl + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right] / T_0 > 0,$$

则实际状态为点接触。

4.3 简支梁只受均布荷载作用。总有 $q_R > 0$ 。图 5、图 6 分别对应于 $A_1^2 > A_2^2$,

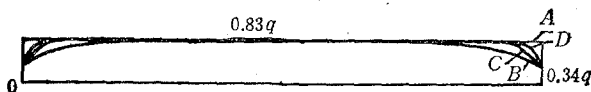


图 5

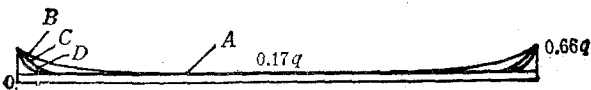


图 6

$A_1^2 < A_2^2$, 后者由前者两梁互换位置得到。实际状态为完全接触。

4.4 悬臂梁只受均布荷载作用。当 $A_1^2 > A_2^2$ 时, q_R 如图 7 所示, 梁在大部分长度上是完全接触的, 但共同曲率假设在 $x = 0$ 附近不成立。当上下梁互换后, 即 $A_1^2 < A_2^2$, q_R 如图 8 所示。实际状态为完全接触。

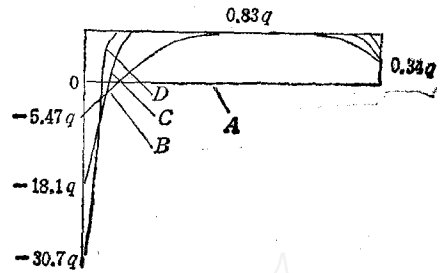


图 7

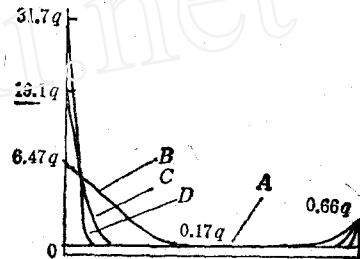


图 8

4.5 悬臂梁只受集中力作用。当 $A_1^2 > A_2^2$ 时, $q_R < 0$, 而 $R > 0$, 又

$$\delta(x) = \frac{P(A_1^2 - A_2^2)}{6C_1C_2T_0} x(2l-x)(l-x) > 0,$$

故实际状态为点接触。两梁互换后, 即 $A_1^2 < A_2^2$, q_R 如图 9 所示, 实际状态为完全接触。

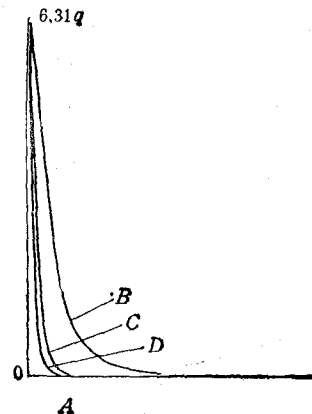


图 9

4.6 简支梁中点受集中力。当 $A_1^2 > A_2^2$ 时, q_R 如图 10 所示。实际状态为完全接触。文 [3] 中的结果与本文解析解相差较大。上下梁互换后, 即 $A_1^2 < A_2^2$, 与第 5 点讨论类似, 知点接触发生在中点及两端点。

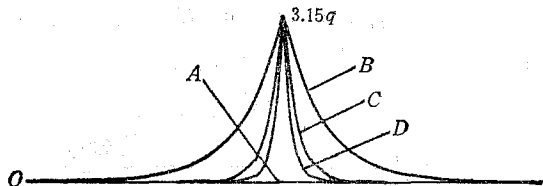


图 10

5. 结论

5.1 若 $A_1^2 = A_2^2$, 本文结果与经典理论一致。

5.2 在 q_R 的分布图中, 平直部分与经典理论对应, 变化部分对应于剪切变形影响, 且梁越短, 影响越显著。

5.3 在接触状态的分析中, 共同曲率法作为试探性方法是很有效的, 即使对于悬臂梁受均布荷载的情形, 也能以求得的部分接触区间为下步试探的初值, 反复迭代, 直至求出符合实

际的弹性接触解。

5.4 梁的接触状态与剪切变形有关。例如在悬臂梁受集中力时, 将上下梁互换, 本文结果将从点接触变成完全接触状态。而经典理论解总是得到按刚度分配的集中接触反力和完全接触状态, 即上下梁互换而接触状态不变。

当然, 在弹性接触问题中, 不只是剪切变形的影响, 法向正应力也有影响。但本文对于弹性接触问题给出了比经典理论更合理的物理描述, 为解决这一类问题提供了有效方法, 这对于解决工程应用中的弹性接触问题更具有实际的意义。

参 考 文 献

- [1] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社 (1981).
- [2] 帕尔希潘斯基, П. П. 汽车的钢板弹簧(宁开平译), 人民交通出版社 (1958).
- [3] 罗开彬, 考虑剪切变形影响时叠层梁层间接触压力分析, 力学与实践, 2(1987).
- [4] 罗建辉, 郑建龙, 考虑横向剪切变形影响非均匀变截面梁的弯曲问题, 湖南大学学报, 2(1989).
- [5] 黄文彬等, 弹性梁间接触压力规律的研究, 力学与实践, 1(1989).

(本文于 1990 年 7 月 20 日收到)

径向分布外压力作用下圆环失稳临界压力的突变理论解法

潘 岳

(青岛冶金矿山大学, 266520)

张 培 国

(山东纺织工学院, 266033, 青岛)

提要 用突变理论方法验证了受均匀压缩圆环失稳的临界压力。从圆环突变模型的分叉集方程看到, 圆环可以在高于各临界压力的情况下发生相应波数的失稳。文中给出在径向分布力作用下, 圆环失稳前后其中层位移的近似表达式。

关键词 圆环, 失稳临界压力, 突变理论

1. 引言

受均匀压缩薄圆环失稳临界压力的求法^[1,2]是: 假设圆环突然发生一小变形, 如果所设变形与外力保持平衡, 则此时的外压力即为临界压力。据此, 求出小变形后的环内弯矩, 将

其代入具有圆弧中线的薄杆变位曲线微分方程, 通过解方程来求得圆环失稳的临界压力。

2. 圆环系统的力学模型

设圆环受力后具有两个对称坐标的位移

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n} \cos 2n\theta \quad (1)$$

或具有一个对称坐标的位移

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n+1} \sin (2n+1)\theta \quad (2)$$

式(1)、(2)中的 θ 从图 1 中水平位置量起。 ω_{2n} 、 ω_{2n+1} 分别为 $\theta = 0^\circ$ 与 $\theta = 90^\circ$ 时圆