$$\int_0^{2\pi}\int_{\bar r_0}^1 f(\bar r)\bar r d\bar r d\varphi = \pi\int_{\bar r_0}^1 f(\bar r)d\bar r^2 = \pi f(\bar r)\bar r^2\Big|_{\bar r_0}^1$$

$$-\pi\int_{\bar r_0}^1 \phi\bar r^2 d\bar r = -\pi\frac{H}{2}\bar r_0^2$$

$$-\pi\int_{\bar r_0}^1 \frac{\bar r^2\phi}{(1-\phi^2)^{1/2}}d\bar r$$

由 (9)、(10) 两式可得

$$\int_1^{\bar r_0}\frac{\bar r^2\phi}{(1-\phi^2)^{1/2}}d\bar r \Big/ \left[\int_1^{\bar r_0}\frac{\phi}{(1-\phi^2)^{1/2}}d\bar r\right]^3 = \frac{4V_1}{\pi h^3} \tag{11}$$

上式的积分方程不易直接求解，在给定 V_1 后，可利用迭代求根法解 $\bar r_0$，较为简便的方法是给定 $\bar r_0$ 反求 V_1，将它们的关系绘成图表，实际应用时，再由 V_1 查出对应的 $\bar r_0$。图 5 和图 6 分别是 $\bar r_0 = 0.5, \theta = 0°$ 和 $\theta = 45°$ 时 V_1 与 Ω 的关系曲线。

在求得 $\bar r_0$ 后，由 (9) 式可得 a，最后由 (1) 式求出 $f(r)$。若 (11) 式无解，则说明Ω已超

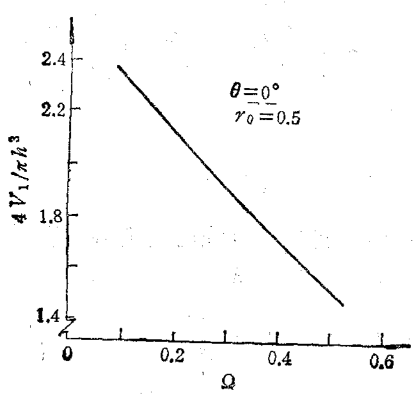

图 5 V_1-Ω 曲线

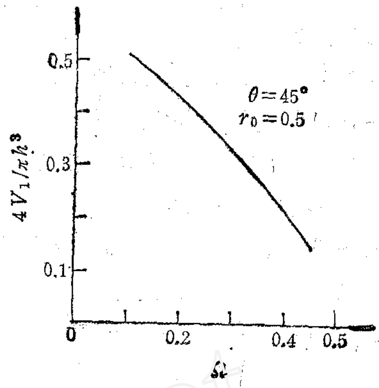

图 5 V_1-Ω 曲线

出临界转速，液面已破裂。

5. 结束语

本文较为全面地分析了失重状态下旋转液体的静力特性，揭示了失重后液体的特殊性质，分析结果为进一步研究失重旋转液体的动力学特性奠定了基础，对于航天飞行器的设计有指导意义和参考价值。

参 考 文 献

[1] 王照林，充液系统动力学与航天高技术问题，力学进展，18，3 (1988)。

[2] 周叮，失重环境下圆柱形容器内稳态旋转液体的液面形状，航空学报，12，1 (1991)。

[3] 曾凡才、王照林，微重力作用下旋转轴对称容器内液体静表面形状分析，力学与实践，8，2 (1986)。

[4] 周叮、丁文镜，微重力状态下旋转对称刚性容器中液体晃动研究，上海力学，8，1 (1987)。

[5] Princen,, H. M., Measurement of interfacial tension from the shape ot a rotating drop, *J. Colloid Interface Sci.*, **23**, 99 (1967)

(本文于 1991 年 1 月 5 日收到)

旋转柱面间流体的螺旋运动

汪 仲 清

(石油大学，257062，山东东营)

提要 本文讨论了两无限长柱面之间流体的螺旋运动，算出了这种运动中流体对两柱面的作用力．这些结果可用于讨论石油开发及地质勘探钻井过程中钻井液流动的一些问题．

关键词 螺旋运动，石油开发，钻井液

1. 前言

在石油开发和地质勘探钻井过程中，钻井液在泵的驱动下通过空心钻柱流入井底，由钻头向井底喷射后带着岩屑沿着钻柱与井壁组成

的环形空间流出地面。在这环形空间中，由于钻柱的旋转和钻井液的粘滞性，泥浆液正是在两旋转柱面间作螺旋运动。本文将在柱坐标系中对这一运动的力学问题进行研究。

由对称性考虑，这种运动在柱坐标系（r，φ，z）中具有如下形式

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = v_1(r), \quad v_z = v_2(r) \tag{1}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} v_1|_{r=R_1} = \Omega R_1, \quad v_1|_{r=R_2} = 0 \\ v_2|_{r=R_1} = 0, \quad v_2|_{r=R_2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 R_1 是内柱面（钻柱）的半径，R_2 是外柱面(井壁)半径，Ω 是内柱面的转动角速度，钻柱向地层推进速度很小，已被忽略。对于加速运动的流体，压强不是各向同性的。

$$p_r = p_1(r) + p_2(z); \quad p_\varphi = p_z = p_2(z) \tag{3}$$

式中 $p_1(r)$ 是由于液体转动而产生的附加压强，$p_2(z)$ 可以表示成

$$p_2(z) = [\rho g(l - z) + p_0] + \Delta p \tag{4}$$

其中 l 为井的深度，p_0 是大气压强，则 Δp 是推动流体运动的压强差。

2. 运动方程与求解

由流体力学知道，不可压缩的粘滞性流体的运动由纳维尔-斯托克斯（Navie-Stokes）方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta \boldsymbol{v} \tag{5}$$

和连续性方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 求解，式中 ρ 为流体的密度，η 是粘滞系数，张力张量取如下形式

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

边界上单位面积受力 $\boldsymbol{P}$ 为

$$P_i = -\sigma_{ik}n_k = pn_i - \sigma_{ik}n_k \tag{7}$$

右边第 1 项是流体的常压力，第 2 项是施于表面的摩擦力，由粘滞性引起，故

$$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$$

称为粘性应力张量。$\boldsymbol{n}$ 是法向单位矢量，对流体表面来说是朝外的，而对固体表面是朝内的。

在柱坐标系中方程（5）和（7）式的各分量具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2}\right) \\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

连续性方程

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{9}$$

在本问题中连续性方程自动地得到满足。

张力张量分量是

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p_r + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p_\varphi + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right) \\
\sigma_{zz} &= -p_z + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\sigma_{r\varphi} &= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right) \\
\sigma_{\varphi z} &= \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) \\
\sigma_{zr} &= \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

在定常流动情况下，$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$，将（1）和（3）式代入方程（8）后，给出以下三个方程

$$\frac{dp_1}{dr} = \rho\frac{v_1^2}{r} \tag{11}$$

$$\frac{d^2v_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr} - \frac{v_1}{r^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d^2v_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_2}{dr} + \frac{\Delta p}{\eta l} = 0 \tag{13}$$

其中压力梯度已用 $\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{l}$ 代替，$\Delta p = p(0) - (\rho gl + p_0)$ 是驱动流体运动的压力差.

方程 (12)、(13) 之解分别具有如下形式

$$v_1 = ar + \frac{b}{r} \tag{14}$$

$$v_2 = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + A\ln r + B \tag{15}$$

式中 a、b 和 A、B 是四个积分常数. 将边界条件 (2) 式代入 (14) 和 (15) 两式，确定常数后给出

$$v_\varphi = v_1 = -\frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\cdot r + \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r} \tag{16}$$

$$v_z = v_2 = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln\frac{r}{R_2}\right] \tag{17}$$

这就是流体在边界条件 (2) 下作螺旋运动 (1) 式的具体表达式.

根据 (17) 式可以计算出环形空间截面上的流量

$$Q = 2\pi\rho\int_{R_1}^{R_2} r v_z dr$$

$$= \frac{\pi\rho\Delta p}{8\eta l}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right] \tag{18}$$

由方程 (11) 求出由于流体旋转而产生的附加压强

$$p_1(r) = \int \rho\frac{v_1^2}{r}dr$$

$$= \frac{\rho\Omega^2 R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2}\left[\frac{1}{2}r^2 - 2R_2^2\ln r - \frac{R_2^4}{2r^2}\right] + c$$

当 $r = R_2$ 时的边界条件是 $p_1(r)|_{r=R_2} = 0$，确定积分常数 c 后给出

$$p_1(r) = \frac{\rho\Omega^2 R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2}\left[\frac{1}{2}(r^2 - R_2^2) - 2R_2^2\ln\frac{r}{R_2} - \frac{R_2^4}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)\right] \tag{19}$$

从表达式 (10) 可以求出粘性应力张量

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma'_{rr} = 0,\ \sigma'_{\varphi\varphi} = 0,\ \sigma'_{zz} = 0 \\
&\sigma'_{r\varphi} = -\frac{2\eta\Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\cdot\frac{1}{r^2} \\
&\sigma'_{\varphi z} = 0 \\
&\sigma'_{zr} = \frac{\Delta p}{4l}\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{r} - 2r\right)
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

3. 结论

本文考虑了钻井液在井中的螺旋运动后，得出了由于转动而引起的附加压强公式 (19). 同时，根据 (7) 式和 (19)、(20) 两式可以确定钻井液对钻柱和井壁单位面积上的作用力.

3.1 钻柱单位面积上受力

正压力

$$N_1 = p_2(z) - p_1(R_1)$$

$$= p_2(z) - \frac{\rho\Omega^2 R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)^2}\left[R_1^4 - R_2^4 + 4R_1^2R_2^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right] \tag{21}$$

横向摩擦力

$$\sigma'_{r\varphi}|_{r=R_1} = -2\eta\frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{22}$$

竖向摩擦力

$$\sigma'_{rz}|_{r=R_1} = \frac{\Delta p}{4lR_1}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}} - 2R_1^2\right] \tag{23}$$

3.2 井壁单位面积上受力

正压力

$$N_2 = p_2(z) \tag{24}$$

横向摩擦力

$$\sigma'_{r\varphi}|_{r=R_2} = -2\eta\frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{25}$$

竖向摩擦力

$$\sigma'_{rz}|_{r=R_2} = \frac{\Delta p}{4lR_2}\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}} - 2R_2^2\right) \tag{26}$$

这些结果可用于研究石油开发和地质勘探钻井过程中泥浆流动时摩擦影响、泥饼的形成等问题.

（本文于 1990 年 9 月 1 日收到）