

$$\cdot \exp[-(t - t_0) \cdot E_1/\eta_1]$$

式中,  $\sigma_s$  为应力,  $\varepsilon_L, \varepsilon_s$  为加、卸载过程中的应变,  $t$  为实验时间,  $t_0$  为加载历时,  $E_1, \eta_1, E_0, A, B$  为模型的五个参数。

用模型来表征材料的性能, 需要确定材料的模型参数。根据该模型的蠕变方程, 按照最小二乘法原理, 编制了压缩和拉伸蠕变实验的曲线拟合程序 PARAM, 通过输入有关实验数据, 便可以方便地拟合出模型的五个参数, 见表 6。可见, 曲线拟合的相关系数  $R$  都高于 0.98, 这种相关性是目前常见模型所达不到的, 由此更进一步证明了所提出的模型的合理性及表征沥青混合料蠕变性能的有效性。

#### 4. 结论

(1) 结合由蠕变实验所得的蠕变曲线, 分析了沥青混合性的高、低温蠕变特性。

(2) 评价了常见流变学模型的性能, 提出了“四单元五参数”模型, 导出了该模型的蠕变方程, 并拟合了沥青混合料的模型参数, 曲线拟合的结果进一步证明了所提出的模型的有效性。

(3) 各种沥青混合料的模型参数确定以

后, 便可利用该模型代替沥青混合料, 非常方便而有效地用于沥青路面高低温性能的研究。此外, 它还可用于沥青混合料的组成设计及路面结构设计, 并成为沟通这两种设计的桥梁, 从而弥补现行的沥青混合料设计同路面结构设计相互独立的缺陷, 有关情况另文讨论。

本课题的研究得到了同济大学道路交通系朱照宏教授的指导, 傅裕寿同志在本文撰写过程中提出了有益的建议并予以热情鼓励, 特此致谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Monismith, C.L., First International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements, 2(1962), pp. 476—496.
- [2] Ven de Loo, P.J., Creep Testing, a Sample Tool to Judge Asphalt Mix Stability, Proc. AAPT, 43(1974), pp. 253—270.
- [3] Bolck, H. J. B. A., Fifth International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements, 1(1982), pp. 303—319.
- [4] 徐世法, 采用粘弹性理论预估沥青路面车辙, 同济大学硕士研究生毕业论文(1988)(导师朱照宏)。
- [5] 毛晓燕, 改性沥青混合料低温松弛特性的研究, 同济大学硕士研究生毕业论文(1988)。

(本文于 1990 年 11 月 8 日收到)

## 单元系列模型及其在闽江水系的应用

陈毓龄 陈捷

(东南大学, 210018)

**摘要** 河流环境规划和管理中, 经常采用一维的物质迁移模型, 本文介绍了一个比较简单而适用的单元系列模型。此模型需要知道与模拟河段的物理特性有关的参数, 即单元数  $k$  和时间常数  $\alpha$ 。这些参数已经通过闽江流域沙溪河段的染色剂示踪试验求得。继而预测了模拟河段中每个单元随时间而变化的物质浓度。物质浓度预测值与实测值拟合良好。

**关键词** 迁移, 移流, 弥散, 单元系列, 模型

### 1. 引言

为了改进污水排放到河流的管理和制定河

流水系的环境规划, 经常应用水质模型来进行控制。通常采用移流弥散模型(AD 模型)和单元系列模型(CIS 模型)两种数学描述方法来分析河流中含有可溶解物质或悬浮物污水的移流和弥散的迁移过程。

可溶解物质和悬浮物在河流中的迁移是沿着河谷底线的移流、趋向河岸的横向混合、回水截留和由于河岸和河底的不规则性所形成的分流区综合作用的结果。水质模拟中河流迁移的预测和分析, 过去一直用 AD 模型, 但是天然河

流的几何形状通常比较复杂,并且河流中的流速和紊动随空间和时间的变化非常显著,只用一个系数,即纵向弥散系数来概括前面所述的复杂过程显得十分困难。因此,人们试图采用不同于弥散系数的其它总体参数来描述天然河道的物质迁移过程。美国 Stefan, H. G., 和 Bank, R.B. 做了大量的工作,并为单元系列模型的建立奠定了基础。作者在前人研究的基础上,第一次在国内建立了适用于河流环境规划

的单元系列模型。

## 2. 单元系列模型的基本方程

本节将介绍模拟河流中可溶解物质或悬移物质迁移的单元系列公式,此公式即为具有纵向弥散现象的混合单元系列模型。图1所示为河流中流量为  $Q$  的恒定均匀流。设河流由称为单元的一系列等体积单元体所组成,单元数为  $k$ 。

在可溶解物质释放之前,即时间  $t < 0$ , 在

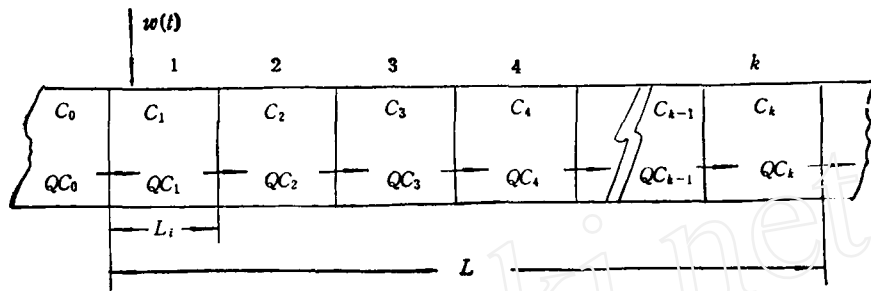


图1 模拟河段的单元系列简图

1, 2, ..., k 的所有单元中,迁移物质的浓度为零。在时间  $t = 0$  时,单元1开始接受污水负荷  $W(t)$ 。经过某一时段,可以认为每个单元内的污水是完全混合的,即流出某一个别单元的污水浓度等于在该单元内的污水浓度。这样,第一个单元的质量迁移一般方程为<sup>[1]</sup>

$$V \frac{dC}{dt} = W(t) - QC - KVC \quad (1)$$

式中  $V$  为一个单元的体积;  $C$  为在单元内的污水浓度;  $t$  为时间;  $W(t)$  为进入此单元的外部质量输入率;  $Q$  为河流流量;  $K$  为物质消耗的动力学变化率。

式(1)可变换成

$$\frac{dC}{dt} + \left( \frac{Q}{V} + K \right) C = \frac{W(t)}{V}$$

令  $\alpha = \frac{Q}{V} + K$ ,  $\alpha$  为时间常数,则

$$\frac{dC}{dt} + \alpha C = \frac{W(t)}{V}$$

积分后得浓度解为

$$C = e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{W(\tau)}{V} e^{\alpha \tau} \cdot d\tau$$

对一个具有脉冲特性的突然释放输入,  $W(t) = M\delta(t)$ , 其中  $\delta(t)$  为 Dirac delta 函数。从物理意义说,  $\delta(t)$  函数表示单位质量的示踪物以无穷大的浓度集中进入一个无穷小空间的一种排放方式,而  $M\delta(t)$  则表示进入很小空间的浓缩质量  $M$ 。可以用  $\delta(t)$  函数表示初始浓度的分布。当  $t \neq 0$  时,  $\delta(t) = 0$ , 而  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ 。

当  $t = 0$  时,质量为  $M$  的第一单元浓度为

$$C_1 = e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{M\delta(\tau)}{V} e^{\alpha \tau} d\tau = \frac{M}{V} e^{-\alpha t} \int_0^t \delta(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau$$

根据  $\delta(t)$  函数的特性,当  $t = 0$  时,

$$\int_0^t \delta(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau = e^{\alpha \cdot 0} = 1,$$

$$C_1 = \frac{M}{V} e^{-\alpha t} \quad (2)$$

可用类似的方法计算第  $i$  单元的浓度

$$V \frac{dC_i}{dt} = QC_{i-1} - Qi - KVC_i \quad (3)$$

$$\frac{dC_i}{dt} + \alpha C_i = \frac{Q}{V} C_{i-1}$$

积分后得浓度解为

$$C_i = \frac{Q}{V} e^{-\alpha t} \int_0^t C_{i-1} e^{\alpha \tau} d\tau \quad (4)$$

第  $k$  单元浓度解为<sup>[2]</sup>

$$C_k = \left(\frac{M}{V}\right) \left(\frac{Q}{V}\right)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t} \quad (5)$$

式(5)为一个突然排放并流经几个单元的物质浓度时间关系式。应用此关系式时需知被模拟河段的物质消耗动力学变化率  $K$ ，时间常数  $\alpha$  以及单元数  $k$ 。

## 2. 河流的迁移系数

图2所示为一个略为理想化但很典型的浓度时间记录曲线，虽然没有确定质量浓度函数  $C(t)$ ，但可引入浓度矩的概念来说明这特性曲线的某些重要特性。应用浓度  $C(t)$  的前四个矩已可满足浓度  $C(t)$  曲线所要求的精确度。

### (1) 零次矩

$$m_0 = \int_0^{\infty} C(t) dt \quad (6)$$

参数  $m_0 = M/Q$ ，表示单位流量所含的质量(见图2)，其中  $Q$  为河流流量； $M$  为突然排放的物质总量。

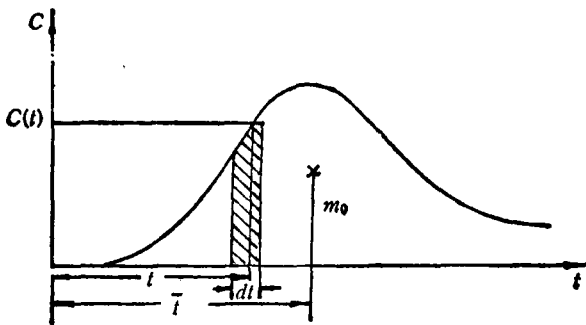


图2 浓度时间关系曲线的零次及一次浓度矩

为了计算  $m_0$  值，将理论浓度函数式(5)代入方程(6)

$$m_0 = \int_0^{\infty} C(t) dt = \int_0^{\infty} \left[ \frac{M}{V} \left( \frac{Q}{V} \right)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t} \right] dt$$

$$= \frac{M}{V} \left( \frac{Q}{V} \right)^{k-1} \frac{1}{\alpha^k (k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{k-1} d\tau$$

式中  $\tau = \alpha t$ ， $\tau$  为虚拟时间变量。

因为 gamma 函数  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{k-1} d\tau (k \geq 0)$ ，

而且  $\Gamma(k) = (k-1)!$ ，故

$$m_0 = \frac{M}{Q} \left( \frac{Q}{V} \right)^k / \alpha^k \quad (7)$$

### (2) 一次矩

$$m_1 = \int_0^{\infty} C(t) t dt / \int_0^{\infty} C(t) dt \quad (8)$$

参数  $m_1 = \bar{t}$ ，确定释放物质在时间轴上的中心位置(见图2)，在方程(8)中

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} C(t) t dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{M}{V} \left( \frac{Q}{V} \right)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t} \right] t dt \\ &= \left[ \frac{M}{Q} \left( \frac{Q}{V} \right)^k / \alpha^{k+1} (k-1)! \right] \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^k d\tau \end{aligned}$$

Gamma 函数  $\Gamma(k+1) = k!$ ，从而

$$m_1 = \frac{\int_0^{\infty} C(t) t dt}{\int_0^{\infty} C(t) dt} = \frac{\frac{M}{Q} \left( \frac{Q}{V} \right)^k \frac{k}{\alpha^{k+1}}}{\frac{M}{Q} \left( \frac{Q}{V} \right)^k \frac{1}{\alpha^k}}$$

因此， $m_1 = \bar{t} = k/\alpha$  (9)

### (3) 二次矩

$$m_2 = \frac{\int_0^{\infty} C(t) (t - \bar{t})^2 dt}{\int_0^{\infty} C(t) dt} \quad (10)$$

参数  $m_2$  就是方差  $\sigma^2$ ，反映了物质沿河流的纵向弥散情况，并且表示浓度  $C(t)$  关系曲线沿时间轴的一种宽度的尺度(见图2)。

用类似方法，由式(10)可求出

$$m_2 = \sigma^2 = k/\alpha^2 \quad (11)$$

### (4) 三次矩

$$m_3 = \int_0^{\infty} C(t) (t - \bar{t})^3 dt / \int_0^{\infty} C(t) dt \quad (12)$$

参数  $m_3$  即偏斜度  $S$ ，这说明浓度  $C(t)$  曲线的非对称性(见图2)。这种非对称性是由于实际河流中的速度分布，或者由于分流区中物质的卷吸又随后释放而引起的。通常卷吸会产生一个很大的偏斜度。

用类似的方法,也可由式(12)求出偏斜度。

$$m_3 = S - 2k/\alpha^3 \quad (13)$$

上述参数  $m_0, \bar{i}, \sigma_i^2$  和  $S$  的表示式仅是所取单元数  $k$  的简单函数。

### 3. 单元系列模型在闽江流域的应用

图3显示了闽江流域沿沙溪的三明市和沙县之间一个染色剂投放站和四个测站的位置。在三明市下游15公里处的投放站投放了罗丹明B染色剂。在投放站下游的1160m、1668m、2260m和2860m处,依次设立了1号、2号、3号和4号测站。

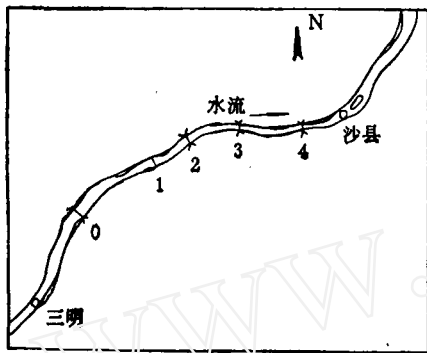


图3 闽江流域沙溪中游的示踪河段

为了求得流经两个测站之间单位时间内染色剂的物质消耗变化率  $K$ , 需要用测得的浓度与时间关系曲线的零次矩和一次矩

$$K = \frac{\Delta M / \Delta t}{(M_u + M_d) / 2} \quad (14)$$

式中  $\Delta M$  为总质量的损失;  $\Delta M = M_u - M_d = Q(m_{0u} - m_{0d})$ ;  $M_u$  和  $M_d$  分别为河段内上下游测站的溶解物质或悬浮物的总质量;  $\Delta t$  为平均移流的时间差值;  $\Delta t = \bar{i}_d - \bar{i}_u$ 。

从两个测站的实测资料可求得河段中的时间常数  $\alpha$  和单元数  $k$

$$\begin{aligned} \bar{i}_d - \bar{i}_u &= k_{d-u} / \alpha \\ \sigma_{i_d}^2 - \sigma_{i_u}^2 &= k_{d-u} / \alpha^2 \end{aligned}$$

从而可得

$$\alpha = \frac{\bar{i}_d - \bar{i}_u}{\sigma_{i_d}^2 - \sigma_{i_u}^2} \quad (15)$$

$$k_{d-u} = \alpha(\bar{i}_d - \bar{i}_u) \quad (16)$$

我们选择2号测站和4号测站之间的河段做为算例,以表示特定河段染色剂示踪试验参数的确定方法。

2号测站:

$$m_{0u} = 332.16(\mu\text{g}/\text{l} \cdot \text{min});$$

$$m_{1u} = 27.06(\text{min});$$

$$m_{2u} = 54.56(\text{min}^2);$$

$$m_{3u} = 364.12(\text{min}^3).$$

4号测站:

$$m_{0d} = 314.80(\mu\text{g}/\text{l} \cdot \text{min});$$

$$m_{1d} = 62.97(\text{min});$$

$$m_{2d} = 290.94(\text{min}^2);$$

$$m_{3d} = 7452.30(\text{min}^3).$$

根据两测站的各浓度矩继而可算出

$$K = \frac{\Delta M}{\Delta t} \cdot \frac{2}{M_u + M_d} = 0.0015(\text{min}^{-1})$$

$$\alpha = \frac{\bar{i}_d - \bar{i}_u}{\sigma_{i_d}^2 - \sigma_{i_u}^2} = 0.15(\text{min}^{-1})$$

$$k_{d-u} = \alpha(\bar{i}_d - \bar{i}_u) = 6$$

模拟河段的其它已知条件为: 河流流量  $Q = 245\text{m}^3/\text{s}$ ; 河流平均过水断面面积  $A = 460\text{m}^2$ ; 河段长度  $L = 1192\text{m}$ ; 单元长度  $L_i = L/k = 198.7\text{m}$ ; 单元体积  $V = A \cdot L_i = 91386.7\text{m}^3$ ; 投放染色剂重量  $M = 5.0\text{kg}$ 。根据上述已知条件可计算出各单元的预测浓度值  $C(t)$  和各单元扩散云的迁移平均时间  $\bar{i}_d = k_{d-u}/\alpha + \bar{i}_u$ 。

为了数值计算,编制了一个 FORTRAN 77

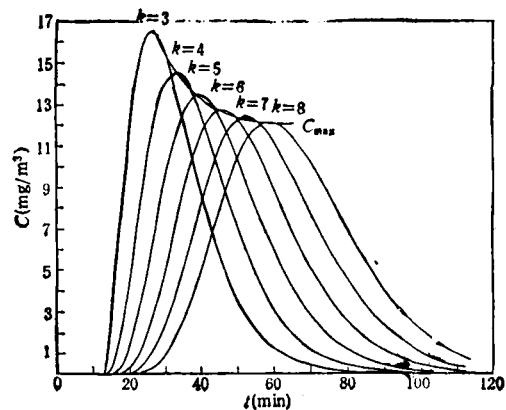


图4 模拟河段各单元的浓度时关系曲线

计算程序。图4为数值计算的结果，图上显示了各单元及模拟河段的最大浓度值。

单元系列模型也可应用于静态情况下可溶解物质或悬浮物浓度的预测，在这种情况下，模型的表达式可以简化，对任何一个单元的质量迁移一般方程为

$$V \frac{dC_i}{dt} = QC_{i-1} - QC_i - KVC_i \quad (3)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{Q}{V} C_{i-1} - \alpha C_i, \quad \alpha = \frac{Q}{V} + K$$

在静态条件下， $\frac{dC_i}{dt} = 0$ ，故  $C_i = \frac{Q}{\alpha V} C_{i-1}$ 。

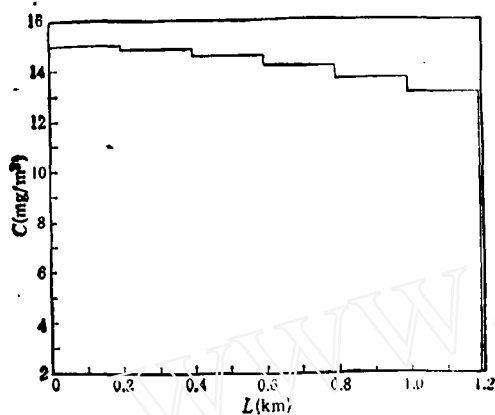


图5 静态情况下模拟河段各单元的浓度变化曲线

系列中第  $k$  单元的物质浓度为  $C_k$

$$C_k = (Q/\alpha V)^{k-1} C_1 \quad (17)$$

设2号测站某种物质的浓度  $C_1 = 15 \mu\text{g/l}$ ， $K = 0.0015 \text{min}^{-1}$ ，静态条件下  $Q = 250 \text{m}^3/\text{s}$ ，要求预测模拟河段各单元的污染物质浓度。图5表示了数值计算的结果。

### 5. 结论

单元系列模型的基本方程是一维常微分方程，它取代了移流弥散模型的偏微分方程，在描述河流物质迁移和数值计算上具有显著的优点。

单元系列模型的总体参数是系列单元数  $k$ ，根据模拟精度的要求，模拟河段可以进一步细分。每个单元是完全混合的。

本文作者感谢福建省环境科学研究所为此课题研究提供了染色剂示踪试验数据。

### 参 考 文 献

- [1] Stefan, H.G., Demetracopoulos, A.C., Cell-in-series simulation of river transport, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 107, HY6(1981).
- [2] 陈毓龄, 混合河流中物质迁移的模拟, *长江水资源保护*, 8(1988).

## 脆性材料概率强度的研究\*

李桂青 方建桥

(武汉工业大学工程结构抗震研究所)

**摘要** 本文基于混凝土材料的破坏性实验，建立了材料内部缺陷的多类裂纹模型，并由此推导出了脆性材料的概率强度分布式。理论分析与实验结果吻合较好。

**关键词** 脆性材料，裂纹，概率强度

### 1. 问题的提出

在目前的统计断裂力学研究中，将材料内部缺陷简化为某一种形状的裂纹。在多轴应力

状态下，认为脆性材料的强度  $P_f$  服从以下分布

$$P_f = 1 - \exp\left[-\int_V n(\Sigma) dV\right] \quad (1)$$

式中  $n(\Sigma)$  为在一定应力状态  $\Sigma$  下，单位体积(或面积)的破坏概率， $V$  为体积(或面积)

由文献[1]，经过简单推导得出在任意应力状态下

\* 国家教委博士点基金资助项目。