表 1

1.基变换	$e = Ai$	$i = Be$	$e^T = i^TQ$	$i^T = e^TP$
2.矢量的坐标变换	$v^{(e)} = Av^{(i)}$	$v^{(i)} = Bv^{(e)}$	$v^{(e)T} = v^{(i)T}Q$	$v^{(i)T} = v^{(e)T}P$
3.并矢的坐标变换	$D^{(e)} = AD^{(i)}A^T$	$D^{(i)} = BD^{(e)}B^T$	$D^{(e)} = Q^TD^{(i)}Q$	$D^{(i)} = P^TD^{(e)}P$
4.矢量的变换	$v^{(i)} = AV^{(i)}$ $v^{(e)} = AV^{(e)}$	$Bv^{(i)} = V^{(i)}$ $Bv^{(e)} = V^{(e)}$	$Qv^{(i)} = V^{(i)}$ $Qv^{(e)} = V^{(e)}$	$v^{(i)} = PV^{(i)}$ $v^{(e)} = PV^{(e)}$
5.转动的合成 绕连体轴	$A = A_2A_1$	$B = B_1B_2$	$Q = Q_1Q_2$	$P = P_2P_1$
5.转动的合成 绕固定轴	$A = A_1A_2$	$B = B_2B_1$	$Q = Q_2Q_1$	$P = P_1P_2$

3.刚体有限转动顺序的颠倒

设过固定点 o 有 n 条轴线 L_1、L_2、…、L_n，这 n 条轴线可视需要解释为连体轴或固定轴. 刚体绕 L_i 作有限转动，转角为 φ_i，相应的方向余弦矩阵为 A_i($i=1,2,\cdots,n$). 如上所述，当 L_i 为连体轴时，A_i 在连体基上写出；当 L_i 为固定轴时，A_i 在固定基上表示. 则

$$A = A_n \cdots A_2 A_1$$

表明，刚体依次绕连体轴 L_1、L_2、…、L_n 转动的结果，与按相反的顺序，依次绕固定轴 L_n、L_{n-1}、…、L_1 转动的结果相同.

$$A = A_1 A_2 \cdots A_n$$

表明，刚体依次绕固定轴 L_1、L_2、…、L_n 转动的结果，与按相反的顺序，依次绕连体轴 L_n、L_{n-1}、…、L_1 转动的结果相同.

刚体绕固定点 o 按一定顺序作相继有限转动的最终结果，与颠倒其转动顺序而进行这一系列相继有限转动的最终结果，一般地是不同的. 而上述结果说明，如果在颠倒转动顺序的同时，改变转轴所连的基，可以得到相同的最终结果.

4.刚体的复位

设有过固定点 o 的 n 根连体轴线 L_1、L_2、…、L_n；和 n 根固定轴线 L_1'、L_2'、…、L_n'，在刚体转动前，L_i' 与 L_i($i=1,2,\cdots,n$) 重合. 刚体绕 L_i 或 L_i' 的转角为 φ_i，相应的方向余弦矩阵为 A_i，不同的是，绕 L_i 时 A_i 在连体基上写出，绕 L_i' 时 A_i 在固定基上写出. 三阶单位阵记作 E，则

$$A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1 A_1^T A_2^T \cdots A_{n-1}^T A_n^T = E$$

表明，刚体顺序地绕连体轴 L_1、L_2、…、L_n 分别转 φ_1、φ_2、…φ_n 角，然后再顺序地绕固定轴 L_1'、L_2'、…、L_n' 按相反方向转 φ_1、φ_2、…、φ_n 角，刚体将回复到原位.

$$A_n^T \cdots A_2^T A_1^T A_1 A_2 \cdots A_n = E$$

表明，刚体顺序地绕固定轴 L_1'、L_2'、…L_n' 分别转 φ_1、φ_2、…、φ_n 角，然后再顺序地绕连体轴 L_1、L_2、…、L_n 按相反方向转 φ_1、φ_2、…、φ_n 角，刚体将回复到原位.

参 考 文 献

[1] 周起钊，多刚体系统动力学(讲义)，北京大学(1984).

[2] 贾书惠，刚体动力学，高等教育出版社(1987).

[3] 刘延柱、洪嘉振、杨海兴，多刚体系统动力学，高等教育出版社(1989).

[4] Kane, T. R., Likins, P. W., Levinson, D. A., Spacecraft dynamics, McGraw-Hill Book Company (1983).

(本文于 1991 年 5 月 22 日收到)

关于壳体非线性应变分量的教学探讨

肖 芳 淳

(西南石油学院，四川南充，637001)

壳体非线性应变分量的研究十分重要，文[1]在这方面作了许多工作，但其在推导壳体非线性应变分量的一般公式时，对略去"微量"后是否会影响公式的一般性未作说明，因而文[2]给予补充，借助张量分析，得到了正交曲线坐标系下壳体非线性应变分量的表达式，使其更加完整，所得结果与文[3]完全相符. 如学生对张量分析比较陌生，按这种分析方法讲解，就会使学生知其然不知其所以然. 为了防止学生囫囵吞枣，发挥其主体作用，本文采用了另一种讲法，达到了预期效果. 现把这种讲法介绍如下.

本文作者认为讲授这个内容时，先从正交曲线坐标系谈起，然后介绍基矢与度规，接着再讲正交曲线坐标中的应变张量，最后推导出壳体非线性应变分量的表达式，并以平板为例说明应用.

1.正交曲线坐标系

设 $ox_1x_2x_3$ 为笛卡儿坐标系，则任意点 P 的坐标可用 $P(x_1,x_2,x_3)$ 表示. 另外在 P 点有一正交曲线坐标系(图 1)，P 点坐标用 $P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 表示. 当然 α

坐标是 x 坐标的函数

$$\alpha_i = \alpha_i(x_1, x_2, x_3)(i = 1,2,3) \qquad (1)$$

相反地，x 坐标也是 α 坐标的函数，即

$$x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(i = 1,2,3) \qquad (2)$$

图 1 中，$\alpha_1 = c_1$ 表示曲面 S_1，$\alpha_2 = c_2$ 表示曲面 S_2，$\alpha_3 = c_3$ 表示曲面 S_3。 而曲面 S_2 和曲面 S_3 的交截线是坐标线 α_1，沿这条线，只有坐标值 α_1 在变化；其余类同，在此不赘.

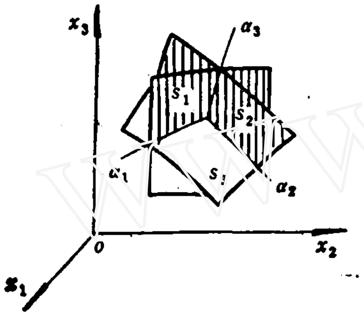

图 1

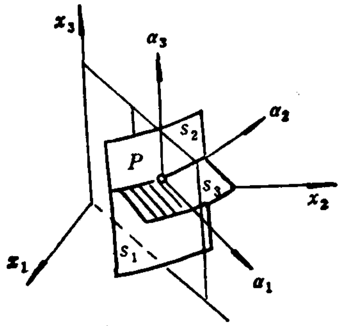

图 2

2.基矢与度规

在曲线坐标系中，首先要了解如何度量长度. 比如沿坐标线 α_1（图 3），由 P 点到 A 点坐标值的变化是

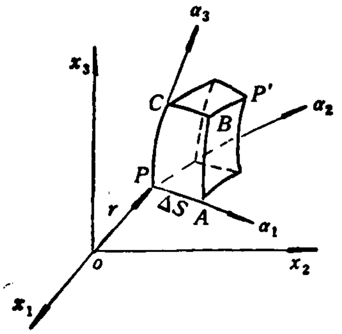

图 3

$\Delta\alpha_1$，一般不等于弧长 $\overset{\frown}{PA}$，而是当 $\overset{\frown}{PA}$ 很小时，$PA = \Delta\alpha_1 \cdot g_1$，式中 g_1 系 P 点沿坐标线 α_1 的基矢，其大小、方向均随 P 点的位置而改变，g_1 沿 P 点坐标线 α_1 的切线方向.

沿坐标线 α_1

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha_1} = \lim_{\Delta\alpha_1 \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta \alpha_1} = \lim_{\Delta\alpha_1 \to 0} \frac{PA}{\Delta\alpha_1}$$

$$= \lim_{\Delta\alpha_1 \to 0} \frac{\Delta\alpha_1 \cdot g_1}{\Delta\alpha_1} = g_1 \qquad (3)$$

所以定义

$$g_i = \lim_{\Delta\alpha_i \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta\alpha_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \alpha_i} \ (i = 1,2,3) \qquad (4)$$

其大小为

$$g_i = \lim_{\Delta\alpha_i \to 0} \frac{PA}{\Delta\alpha_i} = \lim_{\Delta\alpha_i \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha_i} \qquad (5)$$

方向沿坐标线 α_i 增加的切线方向.

设 $r = OP = x_i e_i$ $(i = 1,2,3)$，则有

$$dr = dx_i e_i = \frac{\partial r}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = g_i d\alpha_i \ (i = 1,2,3)$$

式中

$$g_i = \frac{\partial r}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} e_i \ (i = 1,2,3) \qquad (6)$$

同理

$$g_j = \frac{\partial r}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_j} e_j \ (j = 1,2,3)$$

再讲度规. 所谓度规，指的是基矢点积排列成的方阵. g_i 与 g_j 的点积为 $g_i \cdot g_j = g_i g_j \cos\alpha$（图 4）.若

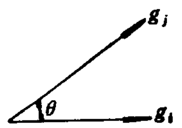

图 4

g_i 与 g_j 正交，则有 $g_i \cdot g_j = 0$ $(i, j = 1,2,3)$。根据二阶协变张量的转换公式得知其度规系数为

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} e_i\right) \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_j} e_j\right)$$

$$= \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_m}{\partial x_j} \quad (m = 1,2,3) \qquad (7)$$

写成矩阵形式有

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

在正交坐标系中，则有

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}, \ |g_{ij}| = g_{11} g_{22} g_{33} = g$$

最后求微分线段的长. 因为 $g_{ii} = g_i \cdot g_i = g_i^2$，故有

$$g_i = \sqrt{g_{ii}}, \ g_j = \sqrt{g_{jj}}$$

因而可知沿坐标线 α_i 的微分线段长为

$$ds_i = g_i d\alpha_i = \sqrt{g_{ii}}\, d\alpha_i,\ ds_j = \sqrt{g_{jj}}\, d\alpha_j$$

由此可得

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{g}_i d\alpha_i)(\boldsymbol{g}_j d\alpha_j)$$
$$= \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j d\alpha_i d\alpha_j = g_{ij} d\alpha_i d\alpha_j \qquad (8)$$

若从笛卡尔坐标系来看，则有 $x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} d\alpha_k$，故有

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_j dx_j$$
$$= \left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} d\alpha_k\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} d\alpha_l\right) = \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} d\alpha_k d\alpha_l$$
$$= \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l d\alpha_k d\alpha_l = g_{kl} d\alpha_k d\alpha_l$$

在上式中，若把 k, l 分别换成 i, j，则与(8)式完全相同。这说明微分线段长与选取的坐标无关。

3.正交曲线坐标系中的应变张量

参考图5，线段 $MN = ds$，由于物体的变形，移到了 $M^*N^* = ds^*$，图中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}$。根据 $\boldsymbol{g}_i$ 的定义，由(5)式可得

$$\boldsymbol{G}_i = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i} = \boldsymbol{g}_i + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i}$$

同理 $\quad \boldsymbol{G}_j = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha_j} = \boldsymbol{g}_j + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j}$

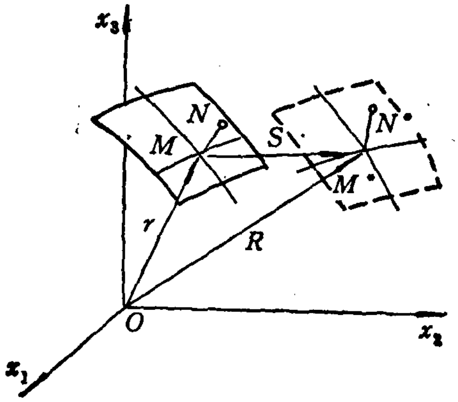

图 5

于是有

$$G_{ij} = \boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{G}_j = \left(\boldsymbol{g}_i + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i}\right)\left(\boldsymbol{g}_j + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j}\right)$$
$$= g_{ij} + \boldsymbol{g}_i \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j} + \boldsymbol{g}_j \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j}$$

现定义正交曲线坐标系中的应变，并考虑上式，则有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(ds_i^*) \cdot (ds_j^*) - (ds_i) \cdot (ds_j)}{2(ds_i) \cdot (ds_j)}$$
$$= \frac{G_{ij} d\alpha_i d\alpha_j - g_{ij} d\alpha_i d\alpha_j}{2\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}\, d\alpha_i d\alpha_j}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{g_{ii} \cdot g_{jj}}} \left[\boldsymbol{g}_i \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j} + \boldsymbol{g}_j \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \alpha_j}\right] \qquad (9)$$

其中 $\boldsymbol{s}$ 表示壳体变形后任一点的位移，若以 u, v, w 分别表示任一点沿 x_1, x_2, x_3 方向的位移分量，则有

$$\boldsymbol{s} = u\boldsymbol{e}_{x_1} + v\boldsymbol{e}_{x_2} + w\boldsymbol{e}_{x_3} \qquad (10)$$

这些单位切向矢量与主曲率坐标间的微分关系，用矩阵形式[4]表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{x_1,x_1} \\ \boldsymbol{e}_{x_1,x_2} \\ \boldsymbol{e}_{x_2,x_1} \\ \boldsymbol{e}_{x_2,x_2} \\ \boldsymbol{e}_{x_3,x_1} \\ \boldsymbol{e}_{x_3,x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g_2} g_{1,x_2} & -k_1 g_1 \\ 0 & \frac{1}{g_1} g_{2,x_1} & 0 \\ \frac{1}{g_2} g_{1,x_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{g_1} g_{2,x_1} & 0 & -k_2 g_2 \\ k_1 g_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 g_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{x_1} \\ \boldsymbol{e}_{x_2} \\ \boldsymbol{e}_{x_3} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

式中 $x_i (i = 1, 2)$ 前的“,”表示对其求导的意思。

4.壳体非线性应变分量的表达式

在壳体内若用 g_1、g_2 分别表示任一点沿 x_1 和 x_2 方向的拉密系数[2]，则有

$$g_1 = A(1 + k_1 x_3),\ g_2 = B(1 + k_2 x_3) \qquad (12)$$

式中 $k_1 = 1/R_1$、$k_2 = 1/R_2$ 为壳体中面上的点沿 x_1、x_2 方向的主曲率；A、B 为壳体中面内任一点沿 x_1 及 x_2 方向的拉密系数[2]，由于 x_3 为直线坐标，而且此坐标因子，一般为长度，于是壳体内任一点都有

$$g_3 = 1 \qquad (13)$$

由科达齐条件[4]可得

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial x_2}(1 + k_1 x_3),$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{\partial B}{\partial x_1}(1 + k_2 x_3) \qquad (14)$$

把(10)式代人(9)式中，并考虑(11)—(14)四式，可得

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2g_1^2}\left[\boldsymbol{g}_1 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} + \boldsymbol{g}_1 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1}\right]$$
$$= \frac{1}{g_1} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} + \frac{1}{2g_1^2} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1}$$
$$= \frac{1}{A(1 + k_1 x_3)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial x_2} + A k_1 w\right]$$
$$+ \frac{1}{2[A(1 + k_1 x_3)]^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial x_2} + A k_1 w\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - A k_1 u\right)^2\right]$$

$$
= \frac{1}{(1+k_1x_3)}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}v + k_1 w\right]+\frac{1}{2(1+k_1x_3)^2}\left[\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}v+k_1w\right)^2+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}u\right)^2+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}-k_1u\right)^2\right] \tag{15}
$$

$$
\gamma_{12}=2\varepsilon_{12}=\frac{1}{g_1\cdot g_2}\left[g_1\frac{\partial s}{\partial x}+g_2\frac{\partial s}{\partial x_1}+\frac{\partial s}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial s}{\partial x_2}\right]
$$

$$
=\frac{1}{B(1+k_2x_3)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{v}{A}\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{A(1+k_1x_3)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{AB(1+k_1x_3)(1+k_2x_3)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{v}{A}\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{v}{B}\frac{\partial A}{\partial x_2}+Ak_1w\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+Bk_2w+\frac{u}{A}\frac{\partial B}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-Ak_1u\right)\times\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-Bk_2v\right)\right]
$$

$$
=\frac{1}{1+k_1x_3}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}u\right)+\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}v\right)+\frac{1}{(1+k_1x_3)(1+k_2x_3)}\left[\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}v+k_1w\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}v\right)+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}-k_1u\right)\times\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}-k_2v\right)\right] \tag{16}
$$

同理可得

$$
\varepsilon_{22}=\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}u+k_2w\right)+\frac{1}{2(1+k_2x_3)^2}\left[\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}v\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}u+k_2w\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}-k_2v\right)^2\right] \tag{17}
$$

$$
\varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial x_3}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right] \tag{18}
$$

$$
\gamma_{23}=\frac{\partial v}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}-k_2v\right)+\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}v\right)\times\frac{\partial u}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_2x_3}\cdot\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x_1}u+k_2w\right)\frac{\partial v}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}-k_2v\right)\frac{\partial w}{\partial x_3} \tag{19}
$$

$$
\gamma_{31}=\frac{\partial u}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_1x_3}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}-k_1u\right)+\frac{1}{1+k_2x_3}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}v+k_1w\right)\frac{\partial u}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_1x_3}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial x_2}u\right)\frac{\partial v}{\partial x_3}+\frac{1}{1+k_1x_3}\times\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}-k_1u\right)\frac{\partial w}{\partial x_3} \tag{20}
$$

以上诸式就是壳体的非线性应变分量．若把应变分量中前一个角标号码写在右上方，后一个角标号码写在右下方，均用圆括弧括好；同时把坐标轴角标号码写在右上方，则与文[2]推出的结果完全一致。

平板是壳体的特殊情况，现以其为例，说明本文介绍的方法如何应用．若把曲线坐标 α_1、α_2、α_3 换成直角坐标 x、y、z，位移分量用 u、v、w 表示，则平板的位移为

$$
s = ue_x + ve_y + we_z
$$

并将其矢基和度规系数的值列如下表:

α_i	x	y	z
g_i	1	1	1
g_{ii}	1	1	1

由(9)式得

$$
\varepsilon_{11}=\frac{G_{xx}-g_{xx}}{2\sqrt{g_{xx}g_{xx}}}=g_x\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}
$$

$$
=e_x\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial v}{\partial y}e_y+\frac{\partial w}{\partial z}e_z\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial v}{\partial y}e_y+\frac{\partial w}{\partial x}e_z\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial v}{\partial y}e_y+\frac{\partial w}{\partial z}e_z\right)
$$

$$
=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{21}
$$

$$\gamma_{12}=\frac{G_{xy}-g_{xy}}{\sqrt{g_{xx}g_{yy}}}=g_x\frac{\partial s}{\partial y}+g_y\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$=e_x\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}e_x+\frac{\partial v}{\partial y}e_y+\frac{\partial v}{\partial y}e_w\right)$$

$$+e_y\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial v}{\partial y}e_y+\frac{\partial w}{\partial y}e_z\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial v}{\partial x}e_y+\frac{\partial w}{\partial x}e_z\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}e_x+\frac{\partial v}{\partial x}e_z+\frac{\partial w}{\partial y}e_z\right)$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \quad (22)$$

同理可得

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \quad (23)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \quad (24)$$

$$\gamma_{23}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \quad (25)$$

$$\gamma_{31}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \quad (26)$$

如果在(15)—(26)诸式中，令 $k_1=k_2=0$，$A=B=1$，$x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$，则得平板的非线性应变分量的表达式[5]，如(21)—(26)所表示的一样，这与文[2]所得的结果完全相同。

由此可见，这种讲法有其独特之处，不仅概念清晰，深入浅出，学生容易接受，而且培养了学生的能力，开发了学生的智力，有利于自学，有利于创新。若配以圆筒形壳体非线性应变分量的算例加以讨论，则学生收获更大。

参考文献

[1] 陶启坤，壳体的非线性应变分量，应用数学和力学，3，4(1982)，505—511.

[2] 欧茂材，关于壳体的非线性应变分量，重庆科技情报所(1990)，1—12.

[3] Новожилов, В. В., Основы нелинейной теории упругости (1948).

[4] 陈铁云等，弹性薄壳力学，华中工学院出版社(1983)，5—32.

[5] 刘北辰，非线性弹性力学，西南师范大学出版社(1988) 84—86.

论杠杆定律与力平行四边形定律的等效

吕 茂 烈

(西 北 工 业 大 学)

引言

在文[1]中作者提出了力平行四边形定律的两种新证明。其一为分析证明，另一为几何证明。分析证明中出现一个谐振动微分方程，这对学过高等数学的大学生说并不难于理解。但是，我们希望有一种能为中学生接受的证明。文[1]中的几何证明只用到平面几何知识，它就是为了这个目的而设计的。不过现在来看，这个证明还不够紧凑。尤其是证明中虽已得出杠杆定律的反比关系，却未强调这个关系和力平行四边形定律之间的等效。从理论的完美性和彻底性来看，这就未免有所不足。作为弥补，本文提出一种改进的证明。

事实上，力平行四边形定律与杠杆定律完全等效，并且由前者可以毫无困难地导出后者。但是，相反，要从杠杆定律导出力平行四边形定律却颇费一番思考。本文给出的新证明正是这种思考的结果。

根据

文[1]流传不广，此处重述其立论的出发点。

人们最初由重量的比拟获得了力的概念。自然界仅存在分布力。由分布力转到集中力时产生了力合成的概念。力的合成仅能在刚体内进行，这里必须默认力在刚体中的**可传性**。显然，力的可传性与欧氏空间的均匀性相协调。

力有方向。刚体内共线力合成时，同向相加，反向相减，等值相交两力的合力沿此两力交角的平分线。显然，这种**对称性**与欧氏空间的各方同性相协调。

力的合成具**可逆性**，服从交换、结合律。

可传性、对称性和可逆性是力间等效的出发点。"三性"替代了静力学的有关几个公理，包括二力平衡公理和平衡力系取舍公理。文[1]基于"三性"提出了力平行四边形公理的两种新证明。故"三性"也取代了力平行四边形定律的公理地位。