

$$\frac{W_1 \cdot GA}{W_1 \cdot GB} = \frac{R_2 \cdot GE}{R_1 \cdot GD} \quad (c)$$

注意各处的等角 α ，可由相似关系得

$$W_1 : R_1 = W_2 : R_2, \quad GA : GB = GD : GE \quad (d)$$

以(d)代入(c)，则重新得到反比关系

$$R_1 \cdot GD = R_2 \cdot GE \quad \text{或} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{GE}{GD} \quad (2)$$

这就是相交力作用下的杠杆定律。

以上证明中三角形的顶角 O 小于 $\pi/2$ 。倘若此顶角大于 $\pi/2$ ，则垂心 G 将处在 $\triangle OAB$ 之外。于是将得到反向平行力作用下的杠杆，但反比关系(2)将同样成立。

以下证明反比关系(2)等效于力平行四边形定律。为此考察图 2 上部的平行四边形 OA^*GB^* 。

显然，如以 \vec{OA}^* 表示力 R_1 ，则反比关系(2)指出，为使合力 R 通过点 G ，另一力 R_2 必须由 \vec{OB}^* 来表示，因为 $R_1 \cdot GD$ 和 $R_2 \cdot GE$ 均代表了此平行四边形的面积。

还须确定合力 R 的末端。考虑到 $R = (R_1, R_2)$ 等效于

$$R_1 = (R, -R_2)$$

新合力 R_1 必定沿力 R 和 $-R_2$ 所构成平行四边形的对角线。为此， R 的末端必须在点 G 。故有

$$R = R_1 + R_2 \quad (3)$$

这就证明了力平行四边形定律及其与杠杆定律之间的等效。

结语

上述证明立足于欧几里得空间的先验 (a priori) 性质——均匀性和各向同性。力的可传性以空间均匀性为前提。力合成的对称性是空间各向同性的表达。最后，可逆性也为空间所固有，故力的矢量性质可理解为力的空间性质，本文的几何证明对此作出了最明确的解释。

杠杆定律早由阿基米德发现。很可惜，尽管当时已具备有关的几何知识，却未能将此定律和力的矢量性质连系起来。直到 1 千 8 百年后，斯蒂芬才“证明”了力平行四边形定律，但他的立足点是“永动机为不可能”的假设，而未能连系到杠杆定律*。这个例子或许可以说明：即使在一个小问题上，人类的认识有时也是迂回曲折的。希望本文能对力的基本性质有所阐发。

参考文献

- [1] 吕茂烈，论几何静力学公理与力平行四边形定律的证明，青岛大学学报(自然科学)第三卷，1990(2)：10。

* 朱照宣教授指出：据 Гюлина 力学史记述，本文图 1 可能是潘素 (Poinso) 1803 年的创造。原文待查。但推测潘素当年也未曾意识到两个定律之间的等效性。

对“断裂力学中 Westergaard 应力函数小议”的意见

贾普荣

(西北工业大学)

文[1]认为：“无穷远”边界条件的存在，Westergaard 应力函数解出现了不确定性。并在应力函数中引进了任意常数 m ，求得了应力强度因子的不定解。本文要否定文[1]的观点。

文[1]考察了双向均匀拉伸下的 Griffith 裂纹(图 1)，取 Westergaard 应力函数为

$$Z_1 = \frac{\sigma x^m}{\sqrt{x^{2m} - a^{2m}}} \quad (1)$$

式中 $m = 1, 2, 3, \dots$ ，求得

$$K_1 = \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{m}}$$

式(1)能够满足裂纹体(图 1)的全部应力边界条件。然而，当 $m \approx 1$ 时， Z_1 在弹性体内是否为解析函数呢？这是问题的关键。

对于图 1 所示的受载裂纹体，应力奇异性只能在

力学与实践

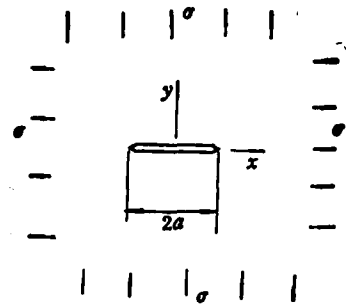


图 1

两个裂尖附近产生，在体内不会有更多的奇异点。但当 $m > 1$ 时，由式(1)知， Z_1 的奇异点增多了，与原问题相矛盾。例如，当 $m = 2$ 时，式(1)成为

$$Z_1 = \frac{\sigma x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sigma x^2}{\sqrt{(x+a)(x-a)(x+ia)(x-ia)}} \quad (2)$$

奇点有四个,增加了两个奇点($x = \pm ia$),这就意味着在裂纹的上方和下方出现奇异应力场。显然,式(2)不适合图1的裂纹体。

以上说明,文[1]给出的应力函数和应力强度因子的不确定形式是不对的。文[1]提到的II型和III型的Griffith裂纹,以及周期性裂纹问题,都可按以上讨论找到错误的根源。

文[1]指出采用 Колосов-Мусхелишвили 复应力函数方法求解裂纹问题(如图1)得到的解是唯一的,而采用 Westergaard 方法得到不确定的解。那么,两种方法到底有何差异呢?

Колосов^[2]采用了两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 来表示应力,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_z &= 4\operatorname{Re}\varphi' \\ \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi'' + \psi'] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

现设 $\psi = \varphi - z\varphi'$, 则 $\psi' = -z\varphi''$, 那么

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{xy} &= -4iy\varphi'' = 4y\operatorname{Im}\varphi'' \\ &= 4iy\operatorname{Re}\varphi'' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将应力分量分列出,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}\varphi' - 2y\operatorname{Im}\varphi'' \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}\varphi' + 2y\operatorname{Im}\varphi'' \\ \tau_{xy} &= -2y\operatorname{Re}\varphi'' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

再令 $Z_1 = 2\varphi'$ 将上式用 Z_1 表示,就得到 Westergaard 的结果^[3]。所以,Westergaard 应力函数只是 Колосов 应力函数用于裂纹问题时的特殊情况。两种方法本质上没有差别。值得注意,用 Westergaard 应力函数求解裂纹问题时,必须考察原函数 $\bar{Z}_1 = \int Z_1 dz$ 是否在多连体中为单值解析的。若不为单值,位移连续条件就不能保证。

参 考 文 献

- [1] 张恒,孙学伟,断裂力学中 Westergaard 应力函数小议,力学与实践,7,2(1985),47-48.
- [2] 徐芝纶,《弹性力学》,第五章(1985).
- [3] Westergaard, H. M., Bearing pressures and cracks, J. Appl. Mech., 6, 3(1939), A49-53.

变质量非完整系统的 Kane 方程及其应用

张 解 放

(上海交通大学, 210030)

在分析动力学的应用研究中, Kane^[1,2]提出了用以建立一阶线性非完整系统不含乘子的封闭动力学方程的新方法。陈滨^[3]从 d'Alembert-Lagrange 原理出发对这一方程加以证明并导出一阶非线性非完整系统相应的动力学方程。本文把 Kane 的思想推广到变质量系统,并举一例说明其应用。

1. 变质量非完整系统的 Kane 方程

设变质量系统由 N 个质点组成,在 t 瞬时,质点 P_i 的质量为 $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$; 在 $t + dt$ 瞬时,从质点 P_i 分离(或并入)的微粒的质量为 dm_i 。假定该系统受有一个完整约束组和 g 个相互独立的一阶非线性非完整约束,并且所有的约束都是理想的,则我们可得变质量非完整系统的 d'Alembert-Lagrange 原理。

$$\sum_{i=1}^N [-m_i \ddot{r}_i + F_i + R_i] \cdot \delta r_i = 0 \quad (1)$$

其中 r_i 为质点 P_i 的矢径, \ddot{r}_i 为相应的加速度, F_i 为作用在质点 P_i 上的主动力, R_i 为反冲力

$$R_i = \frac{dm_i}{dt} u_i \quad (2)$$

式中 u_i 是由质点 P_i 分离(或并入)的微粒相对于 P_i 本身的速度。

按照 Kane 方程的处理方法,对于变质量非完整系统,只须在 Kane 方程中加上广义反冲力即可,于是我们有变质量非完整系统的 Kane 方程

$$F_r + F_r^* + F_r^{**} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n - g) \quad (3)$$

其中

$$F_r = \sum_{i=1}^N F_i v_i^{(r)}, \quad F_r^* = \sum_{i=1}^N R_i \cdot v_i^{(r)},$$

$$F_r^{**} = \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{r}_i) \cdot v_i^{(r)}$$

分别为广义主动力,广义反冲力和广义惯性力,而 $v_i^{(r)}$ 为质点 P_i 的偏速度。

2. 一个例子

如图1所示表示一平面追踪曲线, Q 点按已知规律 $\overline{OQ} = \xi(t)$ 沿水平轴 ox 运动,质量 $m = m(t)$ 的质点 P 在铅垂平面内运动,其速度 v , 始终指向 Q 。试建立质点 P 的运动微分方程。

解取 P 点的坐标 x, y 为广义坐标, 则非完整约束