辆，这不仅大大简化了计算，而且使仅借助简单计算工具，如计算器，进行复杂问题的计算成为可能。

（2）本文得出了车轮系统的复频响应函数，轮心附加动力位移方差的计算公式和轨道高低不平顺的、以时间频率为变量的双边功率谱密度函数。这些工作使结合铁路实际，进行轮心附加动力位移的方差和均方差的计算成为可能。

（3）本文通过列表法，对轮心附加动力位移的方差、均方差和车轮对钢轨附加最大动压力进行了实际计算。计算结果表明：计算值与实测值对优级线路来说十分接近；对中级线路来说，本文计算值虽略大于实测值，但与用铁道科学研究院推荐公式计算之值相比，本文计算值更接近于实测值。这表明，本文建立的力学模型、推导的各计算公式和所采用的方法是正确、合理的，可用于解决实际问题。

参 考 文 献

[1] D.E. 纽兰，随机振动与谱分析概论，机械工业出版社(1980).

[2] 庄表中，王行新，随机振动概论，地震出版社(1982)。

[3] 庄表中，陈乃立，随机振动的理论与实例分析，地震出版社(1985).

[4] Miller, P.C., Propp, K., and Schiehlen, W. O., 车辆随机振动计算方法，应用力学译丛，冯登台译自 Ingeniur-Archiv, 49, 3,4(1980).

[5] 林东，铁路客车垂向振动性能的预报方法研究，铁道车辆，11,12(1987).

[6] 李定清，线路轨道接头区轮轨效应的研究，长沙铁道学院学报，4(1985).

[7] Поляков, В. С., Грановский, А. Н., Влияние параметров рельсового основания метрополитенов на уровень колебания обделки, Строителная механчка и расчёт сооружений, 1 (1984).

（本文于1991年7月7日收到）

各向同性损伤应满足的条件*

沈 为

（华中理工大学，武汉，430074）

提要 本文首先简要阐述应变、应力和弹性能等三种损伤等效性假设的基本内容，然后讨论各向同性损伤的表征以及应满足的条件。

关键词 等效性假设，各向同性损伤，损伤影响张量

1. 引言

研究材料中一微体元，它在宏观上是物质点，比结构小得多，但并非微结构。由于质量、应变、应力、温度以及损伤等在本质上是非均匀连续的，因而所取体元要包含足够多的微结构，以考察它们的平均行为和响应。

微缺陷群构成的损伤会引起材料弹性的变化，因而用弹性模量的变化表征材料的损伤是可取的。连续损伤力学的一个基本思想是在材料本构关系中引入损伤参量。为简化起见，人们常设损伤是各向同性的。本文的重点是讨论各向同性材料，受各向同性损伤时，应满足什么条件。

2. 三种等效性假设[1-5]

2.1 应变等效性假设 固体材料在实应力（工作应力）σ 作用下，受损状态的应变等价于在虚应力（有效应力）$\tilde{\sigma}$ 作用下无损状态的应变。这便是应变等效性假设，可表示为

$$\varepsilon_{ij}=\tilde{\mathbf{E}}^{-1}_{ijmn}\sigma_{mn}=\mathbf{E}^{-1}_{ijkl}\tilde{\sigma}_{kl} \tag{1}$$

式中，ε 是应变张量。$\mathbf{E}$ 和 $\tilde{\mathbf{E}}$ 分别是无损和受损弹性张量。

可以导出，

$$\tilde{\sigma}_{kl}=\mathbf{E}_{klij}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}_{ijmn}\sigma_{mn}=\mathbf{M}_{klmn}\sigma_{mn} \tag{2}$$

式中，损伤影响张量

$$\mathbf{M}_{klmn}=\mathbf{E}_{klij}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}_{ijmn} \tag{3}$$

表征材料的损伤状态。它是一 4 阶张量，可认为是实应力张量 σ 与虚应力张量 $\tilde{\sigma}$ 的一种变

* 国家自然科学基金课题。

换。

由(3)式可得到受损弹性张量和无损弹性张量的关系

$$\tilde{E}_{ijmn} = M^{-1}_{ijkl}E_{klmn} \tag{4}$$

显然，对于一般各向异性材料或各向异性损伤，上式不能满足受损弹性张量的对称性要求，因而与广义虎克定律发生矛盾。只有各向同性材料并受各向同性损伤，这个应变等效性假设才满足 $\tilde{E}$ 的对称性要求。

应变等效性假设的损伤模型可理解为：受损状态的应变本构关系可以用虚拟的无损状态的本构关系代替，只要把实应力 σ 换成虚应力 $\tilde{\sigma}$。

2.2 应力等效性假设　类似于应变等效性假设，应力等效性假设可叙述为：在实应变(工作应变) ε 作用下，受损状态的应力等价于在虚应变(有效应变) $\tilde{\varepsilon}$ 作用下无损状态的应力。可表示为

$$\sigma_{ij} = \tilde{E}_{ijmn}\varepsilon_{mn} = E_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} \tag{5}$$

很容易导出

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = N_{klmn}\varepsilon_{mn} \tag{6}$$

式中，损伤影响张量

$$N_{klmn} = E^{-1}_{klij}\tilde{E}_{ijmn} \tag{7}$$

也反映了损伤状态，也可认为是实应变张量 ε 与虚应变张量 $\tilde{\varepsilon}$ 的一种变换。同样有

$$\tilde{E}_{ijmn} = E_{ijkl}N_{klmn} \tag{8}$$

顺便指出，比较(4)式与(8)式，两种不同等效性假设引进的损伤影响张量 M 和 N 并不存在下列关系

$$M_{klmn} = N^{-1}_{mnkl}$$

应力等效性假设的损伤模型可理解为：受损状态的应力本构关系可以用虚拟的无损状态的本构关系代替，但要将实应变 ε 换成虚应变 $\tilde{\varepsilon}$。

此外，应力等效性假设也不能满足受损弹性张量 $\tilde{E}$ 的对称性要求，这一点可由(8)式说明。

2.3 弹性能等效性假设　在实应力 σ 和实应变 ε 作用下的受损状态的弹性能密度等价于在虚应力 $\tilde{\sigma}$ 和虚应变 $\tilde{\varepsilon}$ 作用下的无损状态的弹性能密度，即

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{kl}\tilde{\varepsilon}_{kl} \tag{9}$$

相应的受损状态的应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = \tilde{E}_{ijmn}\varepsilon_{mn} \tag{10}$$

和无损状态的应力应变关系为

$$\tilde{\sigma}_{kl} = E_{klop}\tilde{\varepsilon}_{op} \tag{11}$$

再设虚应力与实应力的变换

$$\tilde{\sigma}_{kl} = M_{klmn}\sigma_{mn} \tag{12}$$

和虚应变与实应变之间的变换

$$\tilde{\varepsilon}_{op} = N_{opmn}\varepsilon_{mn} \tag{13}$$

可以导出

$$M^{-1}_{klmn} = N_{mnkl} \tag{14}$$

和

$$\tilde{E}_{ijmn} = N_{klij}N_{opmn}E_{klop} \tag{15}$$

可见，弹性能密度等效模型能够满足 $\tilde{E}$ 的对称性要求，适用于各向异性材料和各向异性损伤问题的处理。

弹性能密度等效性假设可用图1说明。

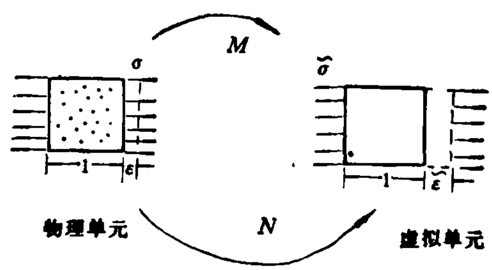


图 1

2.4 一维情况　在一维情况下，定义材料损伤度

$$D = 1 - \tilde{E}/E \tag{16}$$

或材料连续性

$$H = 1 - D = \tilde{E}/E \tag{17}$$

式中，E 和 $\tilde{E}$ 分别是材料的无损和受损杨氏模量。注意到，H 和 D 是互补的损伤参数。

根据应变等效性假设，有

$$\tilde{\sigma} = \sigma/H \quad 或 \quad \tilde{\sigma} = \sigma/(1-D)$$

根据应力等效性假设，有

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon H \quad 或 \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1-D)$$

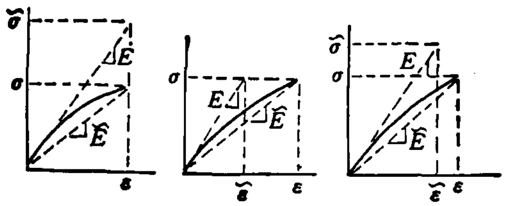
但根据弹性能密度等效性假设，有

$$\tilde{\sigma} = \sigma/H^2$$

和

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon H^2$$

这三种等效性假设模型，在一维情况下，其意义可表示于图 2(a)，(b) 和 (c)。



(a)　　(b)　　(c)

图 2

3. 各向同性损伤

3.1　两标量表示的各向同性损伤　无损的各向同性固体材料，其弹性张量 $\mathbf{E}$ 可用两个拉梅系数 λ 和 μ 表示为

$$\mathbf{E}_{klop} = \lambda\delta_{kl}\delta_{op} + 2\mu\delta_{ko}\delta_{lp} \tag{18}$$

式中，δ 是 Kronecker 张量。

可以设想，用两个标量 H_1 和 H_2 表示各向同性的 4 阶损伤影响张量 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}_{ijmn} = H_1\delta_{ij}\delta_{mn} + H_2\delta_{im}\delta_{jn} \tag{19}$$

(A) 在应力等效性假设下，将 (18) 式和 (19)式代人(8)式，得

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ijmn} = [(H_1 + H_2)\lambda + 2\mu H_1]\delta_{ij}\delta_{mn} + 2H_2\mu\delta_{im}\delta_{jn}$$

可见，各向同性材料在受各向同性损伤后，仍保持各向同性弹性，受损弹性张量

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ijmn} = \tilde{\lambda}\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\tilde{\mu}\delta_{im}\delta_{jn} \tag{20}$$

式中，受损拉梅系数分别为

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= (H_1 + H_2)\lambda + 2\mu H_1 \\ \tilde{\mu} &= H_2\mu \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

可以用拉梅系数的变化表征材料的损伤。定义两个标量 H_λ 和 H_μ 表示材料的连续性，即

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda &= \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}H_1 + H_2 \\ H_\mu &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu} = H_2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

或

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{(H_\lambda - H_\mu)\lambda}{\lambda + 2\mu} \\ H_2 &= H_\mu \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

在应变等效性假设条件下也可得到类似的结果。

(B) 在弹性能密度等效性假设条件下，将(18)式和(19)式代人(15)式，也可以得到(20)式，说明受损材料仍然是各向同性的，但

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda(3H_1 + H_2)^2 + 2\mu(3H_1^2 + 2H_1H_2) \\ \tilde{\mu} &= H_2^2\mu \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

若用拉梅系数变化表示材料损伤，可定义以下两个连续性标量

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda &= \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = (3H_1 + H_2)^2 + \frac{2\mu(3H_1^2 + 2H_1H_2)}{\lambda} \\ H_\mu &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu} = H_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

或

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \{-(6\lambda + 4\mu)H_\mu^{1/2} \pm [(6\lambda + 4\mu)^2H_\mu - 4(9\lambda + 6\mu)\lambda(H_\mu - H_\lambda)]^{1/2}\}/6(3\lambda + 2\mu) \\ H_2 &= H_\mu^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(C) 若用工程弹性系数——杨氏模量 E 和剪切模量 μ 的变化表征各向同性损伤，对于三种等效性假设模型，都可定义两个连续性标量

$$H_e = \tilde{E}/E \tag{27}$$

和

$$H_\mu = \tilde{\mu}/\mu \tag{28}$$

式中，$\tilde{E}$ 和 $\tilde{\mu}$ 是受损杨氏模量和受损剪切模量。由此，受损泊桑比 $\tilde{\nu}$ 要满足下列条件

$$\tilde{\nu} = \left(\frac{H_eE}{2H_\mu\mu} - 1\right)\nu \tag{29}$$

顺便指出，在无损情况下，很容易证明，上述表征各向同性损伤的两个连续性标量

$$H_1 = 0,\ H_2 = 1$$

以及还有

$$H_\lambda = H_\mu = H_e = 1$$

3.2　单一标量表示的各向同性损伤　最简单的形式是取单一标量表示各向同性损伤，设

$$H_\lambda = H_\mu = H \tag{30}$$

或

$$H_1 = H_2 = 1 - D \tag{31}$$

(A) 按应力等效性假设，将(30)式或(31)式代入(23)式，得

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 1$$

再代入(21)式，最后代入(20)式，有

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ijmn} = H \cdot \mathbf{E}_{ijmn} \tag{32}$$

或

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ijmn} = (1 - D)\mathbf{E}_{ijmn} \tag{33}$$

按应变等效性假设也有类似结果。

(B) 按弹性能密度等效性假设，将(30)式或(31)式代入(26)式，得

$$\left.\begin{array}{l} H_1 = 0 \text{ 或 } -\dfrac{2}{3}H^{1/2} \\ H_2 = 0 \end{array}\right\}$$

再代入(21)式，最后代入(20)式，同样得到(32)式或(33)式。

(32)式或(33)式可用于通过测量材料弹性系数的变化来确定损伤度 D 或连续性 H。若用工程弹性系数 E、μ 以及 ν 表示损伤，则(32)式可写为

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{\mu}}{\mu} = H \text{ 和 } \tilde{\nu} = \nu \tag{34}$$

而(33)式可写为

$$1 - \frac{\tilde{E}}{E} = 1 - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} = D \text{ 和 } \tilde{\nu} = \nu \tag{35}$$

可见，用单一标量 H(或 D)表示各向同性材料的各向同性损伤，需要受损材料满足(34)式或(35)式所表示的苛刻条件。如果实验表明材料损伤不满足这些条件，则可以采用两标量表示的各向同性连续性或损伤度。再若不满足则需要把损伤看作是各向异性的。

参 考 文 献

[1] Lemaitre J. Formulation and identification of damage Kinetic constitutive equations, continuum damage mechanics theory and applications. eds. Krajacinovic D. and Lemaitre J. CISM Courses and Lectures, 295, 1987, 37—89.

[2] Simo J C. et al. strain-and stress-based continuum damage models-I. Formulation. Int. J. solids structures, 23, 1987, 821—840.

[3] Cordebois J.P. et al., Damage induced elastic anisotropy. Mechanical Behavior of Anisotropic solid. Proc. EUROMCH Colloque 115, Martinus Nijhoff, The Netherlands 1982, 761—774.

[4] 沈 为，损伤力学(上)，华中理工大学研究生讲义1990，12—19.

[5] 沈 为，弹脆性材料的损伤本构关系及应用．力学学报，23(1991)，374—377.

(本文于1992年1月3日收到修改稿)

混合气流中光束远场强度分布的测量

刘 文 杰 杨 仕 润

(中国科学院力学研究所，北京，100080)

提要 本文测量了激光束穿过混合流场远场强度的分布和远场 Strehl 比 Sr，并将直接测量的 Sr 值与通过近场位相畸变测量计算所得的 Sr 值作了比较，结果吻合得很好.

关键词 远场强度，Strehl 比

1. 引言

激光束远场强度分布在激光测距、制导和激光加工、通讯等应用中具有重要的意义，对于高功率的流动激光器，远场强度的分布更为重要。评价激光光束质量的远场 Strehl 比 Sr 定义为：输出孔径处有任意位相畸变的远场峰值强度与输出孔径处位相、振幅均匀的远场峰值强度之比[1]. 在关于光束质量的研究中，主要是通过测量光束在近场的波阵面位相分布，由 Frensel-Kirchhoff 衍射积分公式或其近似公式计算光束的 Sr 值[2,3]. 远场测量可以直接得到远场强度的分布和 Sr 值，避免了由近场计算简化假设产生的误差，并可以由直接测量的Sr值验证近场计算的结果[1].

本文主要研究激光束穿过流动激光器混合流场时光束远场强度的测量．用 CCD 摄像机