

表1 点 $x = 2\text{m}, y = 8\text{m}$ 处的位移和弯矩

角频率	$\omega = 0$		$\omega = 15 \text{ rad/s}$	
位移和弯矩	w	M_x	w	M_x
解法				
本方法解	-1.0066	-0.19986	-1.7506	-0.8436
有限元解	-0.9954	-0.1986	-1.7337	-0.8392
单位	mm	KN·m/m	mm	KN·m/m

参 考 文 献

[1] 江建祥,吕志涛,简支板的内力与挠度的级数解,工程力学,7,3(1990.8).

[2] 曹志远,板壳振动理论,中国铁道出版社(1989).

[3] 郭敦仁,数学物理方法,人民教育出版社(1978).

(本文于1991年8月5日收到,1992年1月22日收到修改稿)

线性系统非线性修改的响应模拟

林 砺 宗

(华东工学院 一系)

摘要 在线性系统上进行非线性修改的响应模拟分析问题对结构的重设计是十分重要的,本文给出了此问题的数值模拟方法。文中以模态分析理论为基础导出了有关的非线性积分方程组,并给出了以数值积分为基本手段的迭代求解方法,本文给出的模拟技术还可用于模拟由一个线性系统和若干个非线性元件组成的非线性系统的响应问题,最后,文中给了本文理论的应用实例。

关键词 非线性系统、线性系统、结构修改、振动分析、积分方程

引言

结构重设计的有效方法之一是对现有结构做局部的修改,以使它们向需要的方向靠拢。对于某个特定的修改,如能用计算的方法得到修改之后结构的力学性能或在某种载荷下的响应,则重设计将变得非常方便。这就是结构修改的模拟问题。

关于线性系统上线性修改问题已经有了较长的研究历史,在理论方法的研究方面已有很

多文献^[1-4]。然而,工程中的修改,有时需要加入非线性元件,如减振器等,由此产生的新系统将不再是线性系统了,传统的方法不能适用了,因而形成了新的问题——线性系统的非线性修改问题。但是,目前仍无关于非线性修改响应模拟问题的研究仍未见报道,为此本文试图以模态分析理论为基础建立线性系统非线性修改的模拟技术,并证明此技术比非线性模态综合法具有更高的效率。

1. 线性系统的非线性修改

设有线性系统 L , 如图1所示,其前几个低阶模态的特征值和特征向量分别记为 λ_i 和 $\phi_i (i = 1, \dots, n)$ 。今对系统做修改,即在其内的某两点如 A 和 B 之间加非线性元件,如图2所示,这种修改有可能同时在一处或多处进行,加入若干个非线性元件。因而原先的线性系统现在已成为了非线性系统,而非线性系统的分析问题比较复杂,本文只考虑在特定载荷下它的响应及其有关问题。

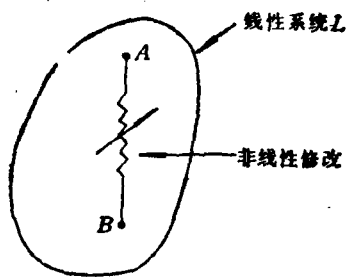


图1 线性系统上的非线性修改

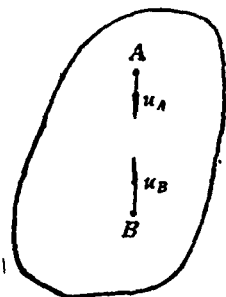


图2 连接矢量

对于图1的非线性系统的响应问题,可以用一般的非线性有限元法进行求解,但由于没有利用到线性部分的特性,计算量较大.另一种方法是非线性模态综合法,即假想地将非线性元件断开,并将原线性系统分成若干个较小的子系统,使任意两个与同一非线性元件相连的点不在同一子系统上.

但人为地将原先的较大的线性系统分为许多较小的子系统,有几点不妥之处:(1)需要知道各个子系统的模态参数,需进行多个有限元问题的计算;(2)子系统数目可能很多,数据输入复杂;(3)总模态数为各子系统的模态数之和,数目大,计算时间长;(4)迭代较难收敛;(5)人为增加了连接数目.由此可见非线性模态综合法不适用于线性系统非线性修改的模拟计算.这种问题需要新的理论方法.

考虑图1,记系统感兴趣的自由度的集合为I,可能作为修改连接点(如图2中的A和B)的所有自由度的集合为J,并将J+I记为S.如果将未修改的系统在指定载荷下,S集响应记为 $x(t)$,则根据复模态原理和线性系统的可

叠加性知加入 m 个修改之后的响应可写为:

$$x(t) = x(t) + 2 \cdot \text{Re}[\phi \cdot q(t)] + \phi_j \cdot f_j(t) \quad (1)$$

式中 $\text{Re}[\]$ 表示取括号内的实部;

ϕ 为线性系统 n 阶以模态质量归一的复模态振型矩阵;

$q(t)$ 为修改的非线性元件的内力引起的模态响应列阵;

ϕ_j 为高阶模态影响形成的剩余柔度矩阵 ϕ 中对应于J集至S集的子块;

$f_j(t)$ 为J集上由修改元件内力引起的界面力列阵.

且有

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau) \phi_j^T \cdot f_j(\tau) d\tau \quad (2)$$

其中 $h(t)$ 为由与 ϕ 对应的复模态的单位脉冲响应函数组成的对角阵.上角标“T”表示转置.

为了便于描述,假定修改元件作用于两端连接点的力大小相等方向相反,并定义:从第 j 个修改元件的某一端连接点P指向另一端的单位矢量称为 j 元件在P点的连接矢量 u_P (图2)于是有:

$$f_j(t) = T \cdot G(t) \quad (3)$$

式中

$T = [T_{ij}]$ 称为修改连接矩阵;

$G(t) = \{G_j(t)\}$ 为修改元件的内力列阵;

T_{ij} 为第 j 个修改元件在J集中的第 i 个自由度的方向余弦.如果 i 自由度所在的点不是 j 元件的连接点,则取零值.

$G_j(t) (j=1, 2, \dots, m)$ 为第 j 个修改元件的内力,以拉力为正.

将(3)式代入(1)和(2)式,并将(1)式按J和I集写成两个,得

$$x_I(t) = x_I(t) + 2 \cdot \text{Re}[\phi_I \cdot q(t)] + \phi_{jI} \cdot T \cdot G(t) \quad (4a)$$

$$x_J(t) = x_J(t) + 2 \text{Re}[\phi_J \cdot q(t)] + \phi_{jJ} \cdot T \cdot G(t) \quad (4b)$$

式中

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau) \phi_j^T \cdot T \cdot G(\tau) d\tau \quad (5)$$

用 T^T 左乘(4b)式得

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2 \cdot \text{Re}[\phi \cdot q(t)] - \Psi G(t) \quad (6)$$

式中

$$\dot{x}(t) = -T^T \dot{x}_j(t)$$

$$\dot{x}(t) = -T^T \dot{x}_j(t)$$

$$\phi = T^T \phi_j$$

$$\Psi = T^T \phi_{jj} T$$

同时(5)式可写成

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau) Q(\tau) d\tau \quad (7)$$

式中, $Q(t) = \phi^T G(t)$ 为模态坐标广义力列阵。

由于 T 中的第 j 列记录着与 j 元件相连的点上的自由度的方向余弦, T^T 的第 j 行与 J 集的点上的自由度的方向余弦, T^T 的第 j 行与 J 集的响应的乘积就是有关自由度的响应在连接矢量上的投影之和, 也就是以连接矢量方向为坐标时元件两端连接点响应的和。由于连接矢量是面对面的, 故此和值即为修改元件的压缩量, 为了使之符合习惯, 取伸长量表示, 即 $\dot{x}(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 分别表示修改与未修改两情况下元件两端所连接的点间的相对变形量。于是表示修改元件内力的本构关系可写成:

$$G_j(t) = G_j[\dot{x}(t), \dot{x}(t), t] \quad (j=1, \dots, m) \quad (8)$$

其中变形速度列阵可用差分法计算, 也可用下式计算:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - 2 \cdot \text{Re}[\phi \cdot \Lambda \cdot g(t)] - \Psi G(t) \quad (9)$$

式中 Λ 为模态特征值形成的对角阵, $G(t)$ 可用差分代替。

方程(6),(7),(8)和(9)构成了线性系统非线性元件修改模拟的方程组, 采用适当的迭代技术和积分方法可以解出修改元件的变形, 内力等有关的响应历程。如果在模拟过程中同时计算(4a)则可以得到更多自由度上的响应。有了位移或变形响应之后, 相应的速度是不难解得的。如果将惯性参照系也视为系统的不运动的部分, 位移就变成所在的点与惯性系之间的相对位移了, 再设想此间存在零值的修改, 则原来的 I 集合可以转化到 J 集合中去, (4a) 式就

不再有用。经验表明这种处理方法简化了软件的编制和数据的准备, 具有很好的灵活性。

此外, 剩余柔度项的计算将占用相当份量的时间, Ψ 的内存占用也较大, 采用内外交换就更费时间了, 故建议多取几阶模态而不保留剩余柔度项。

2. 数值方法与考核

2.1 数值方法的实现

由于前述方程组为非线性的, 求解只能用数值方法, 又由于本文方法主要用于动态问题, 需要求解许多时间步, 也就是说对每个时间步都要进行迭代求解。本文工作所编制的软件采用如下方法求解:

(1) 以 $(i-3), (i-2), (i-1)$ (无值者取 0) 步的模态广义力, 用外推法求得第 i 步的广义力近似值。

(2) 以(7)式求模态响应, 本文工作采用柯特斯积分法。

(3) 以(6)和(9)式求第 i 步响应的近似值。

(4) 以(8)式求修改元件的内力, 并求模态坐标广义力 $Q(\tau_i)$ 。

(5) 将广义力与(2)中所用广义力相比较, 如果满足精度要求, 则循环到(1)做下一时间步的求解, 否则返回(2)继续迭代求解。

2.2 算例

图 3 所示为由两根相同的线弹性直梁和 4 个线性弹簧组成的线性系统。梁的尺寸为 $0.02 \times 0.05 \times 1.00(\text{m})$; 材料密度为 7800kg/m^3 ; 弹性模量为 $2.10 \text{E}11 \text{N/m}^2$; 弹簧的刚度为 $K_j = 10^6 \text{N/m}$, $j=1, 2, 3, 4$ 。表 1 给出了此线性系统的前 10 阶模态的固有频率。图中还给出了作用于 C 点的载荷 P 。下面以 C 点沿 P 方向的响应为参考讨论非线性修改的响应模拟问题。

图 4 中的曲线(1)为未修改之前的响应, 即线性系统的响应。若将此线性系统视为原理中的 L 系统, 对系统中的弹簧刚度取修改量 ΔK_j 或附加一个刚度为 ΔK_j 的非线性弹簧, 则相当于用本构关系为

$$G_j(\dot{x}_j) = \Delta K_j \cdot \dot{x}_j \quad (10)$$

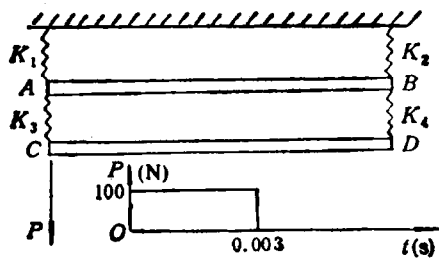


图 3

的修改元件对系统进行修改。于是，前述的原理方法就可以用来求解新系统的响应问题。由于一个修改元件对应一个自由度，所以本问题只有四个自由度，这已经大大降低了解题规模。图 4 中的曲线(2)为 $\Delta K_j = 2.0 \times 10^3 \cdot \xi_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 时应用本文方法求得的非线性系统的响应。

显然用 ΔK_j 的增量对初值为 K_j 的连接弹簧进行修改的结果是得到刚度为 $(K_j + \Delta K_j)$

表 1 系统的固有频率

序号	频率 (Hz)
1	. 3510E + 02
2	. 4471E + 02
3	. 8074E + 02
4	. 1476E + 03
5	. 1530E + 03
6	. 2717E + 03
7	. 3073E + 03
8	. 4072E + 03
9	. 5745E + 03
10	. 6297E + 03

的连接。若将修改得到的非线性系统看作为由两根直梁和四个本构关系为 $(K_j + \Delta K_j) \cdot \xi_j$ 的非线性元件组成的系统，则本例还可以应用非线性模态综合法进行求解，其结果如图 4 中的曲线(3)。从图中可以看出，曲线(2)和(3)吻合良好，这说明本文的方法是可靠的。

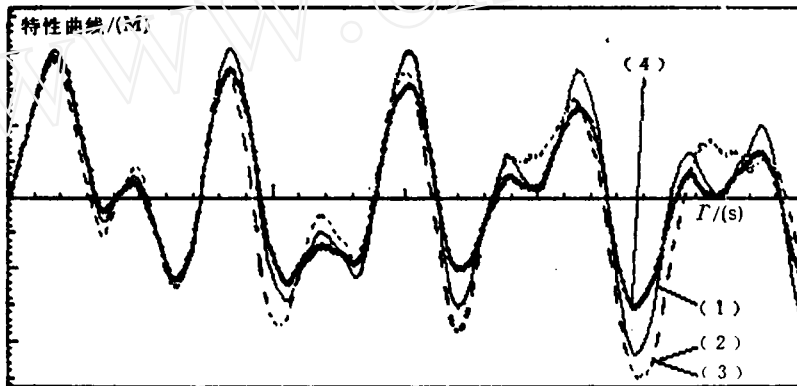


图 4

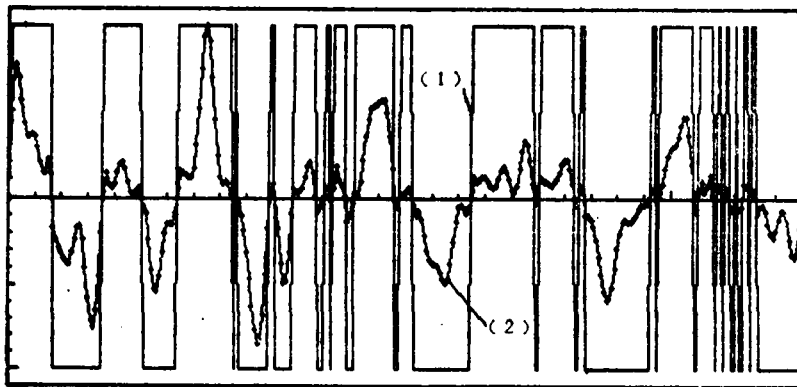


图 5

如果要对 L 系统进行减振, 则只需用减振元件的本构关系作为修改量即可。以摩擦减振器为例, 其本构关系可写为 $G = \delta \cdot \text{sign}(\dot{x})$ 。其中 δ 为摩擦面之间的摩擦力之绝对值, \dot{x} 为相对速度, sign 为符号函数。现假设在 A 与 C 之间安装一摩擦式减振器, 对应的 $J = 10$ 。于是应用本文的方法解得响应如图 4 中的曲线 (4)。可以看出, 曲线的衰减是明显的。图 5 中的曲线 (1) 为摩擦力的变化规律; 曲线 (2) 为相对速度。

3. 讨论与结论

从前面的算例中还可以看出, 当结构可以清楚地划分为几个子结构时, 响应问题既可以用非线性修改法求解, 也可以用非线性模态综合方法求解。实际上, 非线性修改模拟方法不仅适用于结构修改的响应问题, 而且, 只要将非线性元件的非线性部分看作是线性部分存在而组成的线性系统上的非线性修改, 则分块线性的非线性系统也可以加以解决。修改模拟法中的刚体模态数一般与实际结构的刚体模态数相同, 而综合法则将增加许多刚体模态, 由于刚体模态的位移响应较大, 对迭代求解的收敛性将产生影响, 因而迭代时的收敛速度较慢。此外增多模态数必然引起计算时间增加。表 2 给出了上例中两种方法求解的有关参数的对比, 显然修改法比综合法更有效。

非线性修改的另一特点是便于与实验模态

表 2

方法	总模态数	迭代次数
非线性模态综合	14	5~6
非线性修改	10	4

分析技术相结合, 对 L 系统进行模态分析比对各子系统逐一进行要省事得多。更何况有时要真的把子系统分解下来, 是困难的或不可能的。

由此可见, 本文修改模拟方法的意义不仅仅在于修改模拟的本身, 更重要的是它比非线性模态综合法更有效、更方便、更易于应用, 是减振设计、结构修改的有效模拟手段。

参 考 文 献

- [1] Blakely, K.D. and Dobbs, M. W.: Modification and Refinement of Large Dynamic Structural model IMAC-I(1981).
- [2] John O'callahan, A structural modification procedure Using Complex Modes, IMAC-1 (1981).
- [3] Luk, Y.W. and Mitchell, L.D. System Modeling and Modification Via Modal Analysis, IMAC-1, (1981).
- [4] Ye Ning, Yuan Jiangxia, Structural Dgnamic Modification with Additional Substructures. IC MDEA(1988.8), 10.
- [5] 王文亮等, 结构振动的动态子结构方法, 复旦大学出版社(1985).

(本文于 1991 年 5 月 6 日收到第一次稿,
1991 年 8 月 23 日收到修改稿)

应变模态在含裂纹悬臂板裂纹检测中的应用

钱管良 顾松年

(西北工业大学, 西安, 710072)

摘要: 基于作者提出的含穿透裂纹板的有限元模型^[1], 研究了裂纹存在时悬臂板固有频率随裂纹位置的变化规律; 探讨了它与应变模态之间的关系。对悬臂板应变模态的实测结果表明, 以应变代替位移或加速度作为观测量对裂纹变化是比较敏感的, 并说明了一阶应变模态在悬臂板裂纹检测中的应用。

关键词: 应变模态, 悬臂板, 裂纹, 振动特性, 裂纹检测

1. 引言

含裂纹结构的裂纹检测研究, 具有重要的工程意义, 尤其是对于大型柔性空间结构^[1,2]。振动诊断具有良好的在线性和信号易于提取性, 因此, 结构故障的振动诊断日益被重视。然而, 在故障发生初期, 响应变化很小, 这种小的变化有可能被噪声信号所淹没, 因而使振动诊