

一类柔性机械臂的建模与控制¹⁾

王照林

王大力

(清华大学工程力学系) (中国科学院研究生院, 100039)

摘要 本文研究了由多个柔性连杆经旋转关节相连构成的开链式平面运动机械臂的建模与控制问题。首先用 Lagrange—假定模态法对该机械臂建立了非线性动态模型, 然后用扩展线性化法对其给出了非线性位置控制系统设计, 并提出对输入信号的前置滤波, 以保证系统大范围扰动的稳定性。系统仿真结果表明了本文方案的有效性。

关键词 柔性机械臂, Lagrange 假定模态法, 扩展线性化, 前置滤波

1. 引言

希望机械臂有快速而准确的响应, 同时在尽量减小机械臂自身重量和降低控制系统能耗的前提下, 使机械臂有足够的空间尺度和较高的承载能力(低质量载荷比), 这是在不断扩展的机器人应用领域, 特别是在空间技术的应用中提出的突出要求。因此重量轻、刚度小的柔性机械臂是一种可行的选择, 并将是一个重要的发展方向。但不同于刚性臂, 本文考虑的柔性臂在运行中要产生弹性振动, 其控制任务的特点是既应按要求的性能实现位置控制, 同时又要抑制弹性振动。本文对一类柔性机械臂建立了数学模型, 其特点是便于控制系统设计及计算机程序化建模。进而给出其非线性位置控制系统设计。所得系统在保持稳定性、具有较快响应速度的前提下能实现大范围的精确定位, 其性能明显优于以往结果^[1]。计算机仿真对比进行了验证。

2. 数学模型

考虑由 n 个柔性连杆经旋转关节相连构成的开链式平面运动机械臂, 如图 1 所示。各关节中相对转动的两部分分别与接续的两个连杆相固结。设关节 i 的质量为 m_i , 它连结连杆 i 及连杆 $i-1$ 的两部分关于关节质心 O_i 的转动惯量分别记为 $J_{i,i}$ 和 $J_{i,i-1}$ 。将每一连杆考虑

为弹性的, 因其长度比横截面的高度大得多, 可视之为 Euler-Bernoulli 梁, 可忽略其剪切变形和梁微元转动惯量的影响, 且无轴向变形。设连杆 i 长度为 l_i , 其平衡时沿轴向的空间坐标为 ξ_i , 分布质量为 $P_i(\xi_i)$, 分布抗弯刚度为 $EI_i(\xi_i)$ 。设负载质心位于连杆 n 的末端处, 负载的质量及关于其质心的转动惯量分别是 m_p 、 J_p , 关节 i 处驱动力矩为 $T_i(t)$, t 为时间。本文不考虑重力影响。

非惯性右手直角坐标系 $O_i-i_j k$ 在关节 i 处与连杆 i 固连, (i, j) 位于连杆 i 的主平面内, i_j 与杆 i 轴线相切, 且指向 ξ_i 增大方向, $O_0-i_0 k$ 为固结于基座的惯性坐标系。

关节 i 的关节角为 θ_i 。连杆 i 的弹性变形用其上坐标为 ξ_i 的点从其未变形位置沿 j_i 方向的横向弹性位移 $w_i(\xi_i, t)$ 表示, 因其相对于杆的长度为小量, 关于 $w_i(\xi_i, t)$ 及其导数的二次项可忽略。又设关节 i 的与杆 $i, i-1$ 相固连部分的角速度矢量为 $\omega^{i,i}, \omega^{i,i-1}$, 负载角速度为 $\omega^{n+1,n}$ 。

弹性位移 $w_i(\xi_i, t)$ 满足相应偏微分方程的初、边值问题^[2], 因而柔性臂本质上要由无限维分布参数模型来描述。但控制实际系统变量的能量总是有限的。从模态分析考虑, 只有几个低阶模态可被激励, 在保证必要精度的前提下高阶模态的影响可忽略, 从而可把问题简化为有限维。下面用假设模态法直接对这类分布参数系统离散化, 进而得出适于控制系统设计的数学模型。(以 \cdot 号表示时间导数, $'$ 号表示空间导数。)

从相应能量空间的完全集中取容许函数 $\phi_{i,r}(\xi_i)$, $i \in n$, $r \in \mathcal{I}$, 使得

1) 本文为国家自然科学基金和航空航天部五院资助项目研究课题。

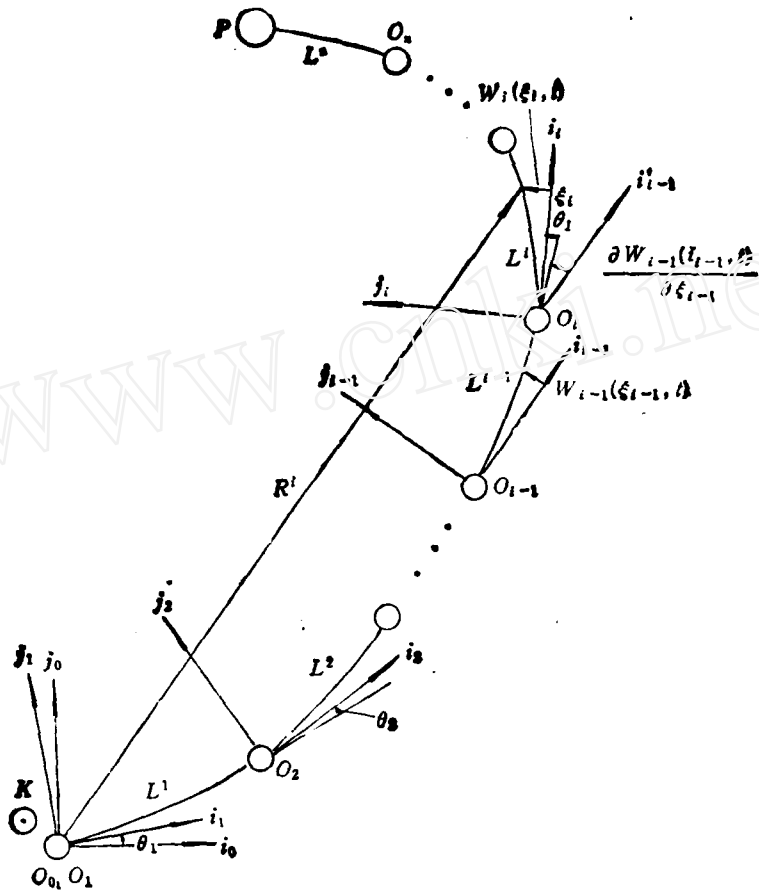


图 1

$$\omega_i(\xi_i, t) = \sum_{r=1}^i \phi_{ir}(\xi_i) q_{ir}(t) \quad (1)$$

式中 $q_{ir}(t)$ 为相应的广义坐标。令

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_{n+n_s}(t))^T = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t), q_{11}(t), \dots, q_{1s}(t), \dots, q_{n1}(t), \dots, q_{ns}(t))^T \quad (2)$$

为系统的广义坐标矢量。设 \dot{R}^i 是连杆 i 坐标为 ξ_i 的点相对坐标系 $O_0-i_0j_0k$ 的速度矢量，经计算得

$$\dot{R}^i = \sum_{j=1}^{n+n_s} V_j^i \dot{q}_j \quad (3)$$

式中 $V_j^i, i \in n, j \in n+n_s$ 为偏速度，有

$$V_j^i = \begin{cases} \sum_{h=j}^{i-1} l_h j_h - \sum_{h=j}^{i-1} \sum_{r=1}^s \phi_{hr}(l_h) q_{hr}(t) i_h \\ + \xi_i j_i - \sum_{r=1}^s \phi_{ir}(\xi_i) q_{ir}(t) i_r \\ (j=1, \dots, i) \\ 0 (j=i+1, \dots, n) \\ \sum_{h=k+1}^{i-1} l_h \phi'_{kr}(l_h) j_h + \phi_{kr}(l_k) j_k \\ + \xi_i \phi'_{kr}(l_k) j_i (j=n+1, \dots, n+(i-1)s) \\ \phi_{i(j-n-(i-1)s)}(\xi_i) j_i \\ (j=n+(i-1)s+1, \dots, n+is) \\ 0 (j=n+is+1, \dots, n+ns) \end{cases} \quad (4)$$

$$\omega^{i,i-1} = \sum_{j=1}^{n+n_s} \omega^{i,i-1} \dot{q}_j \quad (5)$$

式中 $\omega^{i,i-1}, i \in n, j \in n+n_s$ 为偏角速度，有

$$\omega_j^{i-1} = \begin{cases} k & (j=1, \dots, i-1) \\ 0 & (j=i, \dots, n) \\ \phi'_{kr}(l_k)k & (j=n+1, \dots, \\ & n+(i-1)s) \\ 0 & (j=n+(i-1)s+1, \dots, \\ & n+ns) \end{cases} \quad (6)$$

$$\omega^{i,i} = \sum_{j=1}^{n+ns} \omega_j^{i,i} \dot{q}_j \quad (7)$$

式中偏角速度 $\omega_j^{i,i}$ 为

$$\omega_j^{i,i} = \begin{cases} k & (j=1, \dots, i) \\ 0 & (j=i+1, \dots, n) \\ \phi'_{kr}(l_k)k & (j=n+1, \dots, \\ & n+(i-1)s) \\ 0 & (j=n+(i-1)s+1, \\ & \dots, n+ns) \end{cases} \quad (8)$$

在式(4)、(6)、(8)中,不作為求和變量的 k 和 r 分別為: $k = [(j-n)/s]$, $r = j - n - (k-1)s$, 其中 $[a]$ 表示不小於 a 的最小整數。在求和項中若下指標大於上指標, 則該項為零。進而算得系統動能 KE 為

$$KE = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (9)$$

式中慣性陣 $M(q)$ 是 $(n+ns)$ 階正定矩陣, 其元素為

$$\begin{aligned} M_{ii}(q) &= \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \rho_k(\xi_k) V_i^k \cdot V_i^k d\xi_k \\ &+ \sum_{h=2}^n m_h (V_i^{h-1} \cdot V_i^{h-1})|_{\xi_{h-1}=l_{h-1}} \\ &+ m_p (V_i^n \cdot V_i^n)|_{\xi_n=l_n} \\ &+ \sum_{h=2}^n J_{h,h-1} \omega_i^{h,h-1} \cdot \omega_i^{h,h-1} \\ &+ \sum_{h=1}^n J_{h,h} \omega_i^{h,h} \cdot \omega_i^{h,h} + J_p \omega_i^{n+1,n} \\ &\cdot \omega_i^{n+1,n}, \quad i, j \in \bar{n} + ns \end{aligned} \quad (10)$$

系統的勢能 PE 為(只考慮彈性勢能)

$$PE = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EI_k(\xi_k) [\omega_k''(\xi_k, t)]^2 d\xi_k$$

由式(1)且考慮到 $\phi''_{kr}(\xi_k)$, $r \in s$ 的正交性^[1],

力學與實踐

可得

$$PE = \frac{1}{2} \dot{q}^T K q \quad (11)$$

式中剛度陣 $K = \text{diag}[k_{11}, \dots, k_{(n+ns)(n+ns)}]$, 其對角元素為:

$$k_{ii} = \begin{cases} 0 & (i=1, \dots, n) \\ \int_0^{l_k} EI_k(\xi_k) [\phi''_{kr}(\xi_k)]^2 d\xi_k & (i=n+1, \dots, n+ns) \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\bar{n} = [(i-n)/s]$, $r = i - n - (h-1)s$.

控制力矩 $T_i(t)$, $i \in a$, 所作總虛功為

$$\delta A = \sum_{i=1}^n T_i(t) \delta \theta_i(t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) \delta q_i(t)$$

設廣義力為 $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_{n+ns}(t))^T$,

由於 $\delta A = \sum_{i=1}^{n+ns} Q_i(t) \delta q_i(t)$, 則由上式可知

$$\begin{aligned} Q(t) &= (Q_1(t), \dots, Q_n(t), Q_{n+1}(t), \dots, \\ &Q_{n+ns}(t))^T = (T_1(t), \dots, T_n(t), 0, \dots, 0)^T \end{aligned} \quad (13)$$

將式(9)、(11)、(13)代入第二類 Lagrange 方程則得

$$M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) = Q(t) \quad (14)$$

式中 $N(q, \dot{q}) \in R^{n+ns}$, 其第 i 分量是 $(i \in \bar{n} + ns)$

$$\begin{aligned} N_i(q, \dot{q}) &= \sum_{j=1}^{n+ns} \sum_{k=1}^{n+ns} \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+ns} \sum_{k=1}^{n+ns} \frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k + k_{ii} q_i \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)即所研究的柔性臂系統的動力學方程。

令 $x = (x_p^T, x_s^T)^T \triangleq (q^T, \dot{q}^T)^T$ 為系統的狀態向量。又令 $Q(t) = Gu(t)$, 其中 $G = (I_{n \times n}; 0_{n \times ns})^T$, $u(t) = (T_1(t), \dots, T_n(t))^T$, I 和 0 分別表單位陣和零陣。因 $M(q) > 0$, 則由式(14)得

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} x_p \\ M^{-1}(x_p) [-N(x_p, x_s) + Gu] \end{pmatrix} \quad (16)$$

此即柔性臂系統狀態方程。式中

$$f(\cdot, \cdot): R^{(2n+2m)} \times R^n \rightarrow R^{2n+2m}$$

连续可微,且 $f(0,0) = 0$ 。给定系统参数,通过式(10)、(15)可方便地算得方程中的 $M(x_p)$ 和 $N(x_p, x_r)$, 便于计算机程序化建模是方程(16)的特点。

3. 控制系统

对于高度非线性、又要在大范围机动的柔性臂系统(16),采用在某工作点处线性化,进而设计线性控制律的传统方法,结果不令人满意,甚至不稳定。下面用近年发展起来的扩展线性化方法^[2,3],并结合对输入位置信号的前置滤波,给出柔性臂系统非线性控制规律的设计。

设系统(16)的全部状态均可利用(通过直接测量或观测器重构)。为使 Jacobi 阵 $\partial f(x, u)/\partial x$ 可逆,预置如下状态反馈

$$u = u^1 - K_f x \quad (17)$$

式中 $u^1 = \langle T_1^1, \dots, T_n^1 \rangle^T$, $K_f = (K_{f1}, \dots, K_{fn}) \in R^{n \times (n+2m)}$, $K_{fi} = \text{diag}(K_{i1}, \dots, K_{in})$, 则式(16)成为

$$\dot{x} = F(x, u^1)$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ M^{-1}(x_p)[-N(x_p, x_r) + G \cdot (u^1 - K_f x)] \end{pmatrix} \quad (18)$$

令参数向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (x_1, \dots, x_n)^T$, 则可由上式得系统在其状态/控制空间平衡点族参数方程

$$\begin{aligned} x_0(\alpha) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)^T, \\ u_0^1(\alpha) &= (K_{f1}\alpha_1, \dots, K_{fn}\alpha_n)^T \end{aligned} \quad (19)$$

从而可得系统(18)的连续线性化族为

$$\Delta \dot{x} = A(\alpha)\Delta x + B(\alpha)\Delta u^1 \quad (20)$$

式中

$$\Delta x = x - x_0(\alpha), \quad \Delta u^1 = u^1 - u^1(\alpha),$$

$$A(\alpha) = \left. \frac{\partial F(x, u^1)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0(\alpha) \\ u^1=u_0^1(\alpha)}}$$

$$B(\alpha) = \left. \frac{\partial F(x, u^1)}{\partial u^1} \right|_{\substack{x=x_0(\alpha) \\ u^1=u_0^1(\alpha)}}$$

对于任一 $\alpha \in R^n$, 可证 $(A(\alpha), B(\alpha))$ 为可控对。故可求得状态反馈

$$\Delta u^1 = -\Lambda(\alpha)\Delta x + H(\alpha)\Delta w \quad (21)$$

式中 $\Lambda(\cdot)$ 为状态反馈阵, Δw 是新的输入,

$H(\cdot)$ 是由 Δw 到 Δu^1 的变换阵,使得闭环系统

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= (A(\alpha) - B(\alpha)\Lambda(\alpha))\Delta x \\ &\quad + B(\alpha)H(\alpha)\Delta w \end{aligned} \quad (22)$$

具有所希望的特征值。

现在设式(18)所要求的非线性控制律为 $u^1 = T^1(x, w)$, $T^1(\cdot, \cdot)$ 连续可微,且 $T^1(0,0) = 0$ 。则对闭环系统 $\dot{x} = F(x, T^1(x, w))$, 以常值输入 $w = \beta$, $\beta \in R^n$, 为参数向量,亦可求出其平衡状态 $x_c(\beta)$, 且由式 $u_0^1(\alpha) = T^1(x_c(\beta), \beta)$ 可求出开、闭环平衡点参数间关系: $\alpha = a(\beta)$ 。由系统平衡状态的唯一性知: $x_c(\beta) = x_0(a(\beta))$ 。这时可求得闭环系统 $\dot{x} = F(x, T^1(x, w))$ 的连续线性化族为 $(\Delta w = w(\beta) - \beta)$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \left[\frac{\partial F(x_0, u_0^1)}{\partial x} + \frac{\partial F(x_0, u_0^1)}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial T^1(x_c, \beta)}{\partial x} \right] \\ &\quad \times \Delta x + \left[\frac{\partial F(x_0, u_0^1)}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial T^1(x_c, \beta)}{\partial w} \right] \Delta w \end{aligned} \quad (23)$$

扩展线性化法的原理是要求出控制律 $u^1 = T^1(x, w)$, 以使系统(23)、(22)相等同 ($\alpha = a(\beta)$)。这样所得闭环非线性控制系统在其任一平衡点处都有与式(22)相同的线性化系统,从而其平衡状态都是渐近稳定的。此问题当

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial F(0,0)}{\partial x} - \frac{\partial F(0,0)}{\partial u^1} \cdot \Lambda(0)$$

可逆时有解。作为一个解,可使 $T^1(\cdot, \cdot)$ 和 $H(\cdot)$ 满足条件

$$\frac{\partial}{\partial x} T^1(x_c(\beta), \beta) = -\Lambda(a(\beta))$$

$$\frac{\partial}{\partial w} T^1(x_c(\beta), \beta) = H(a(\beta)) - \Lambda(a(\beta))$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \beta} x_c(\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} u_0^1(a(\beta))$$

这时有 $\alpha = a(\beta) = \beta$ 。考虑到式(19),且令 $\Lambda_n(\alpha)$ 是 $\Lambda(\alpha)$ 的前 n 列元素构成的矩阵,求得

$$\begin{aligned} u^1 = T^1(x, w) &= [-\Lambda(\alpha)\Delta x + (\Lambda_n(\alpha) \\ &\quad + K_{fn})\Delta w] |_{\alpha=\alpha(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned} \quad (24)$$

由(17)式得所求的系统(16)的非线性状态反馈

控制

$$u = [-(\Lambda(\alpha) + K_f)\Delta x + (\Lambda_n(\alpha) + K_{f_n})\Delta w]_{\alpha=\alpha(x_1, \dots, x_n)} \quad (25)$$

在应用中要进一步考虑由式(16)、(25)构成的闭环系统在时变输入 $w(t)$ 作用下的运动稳定性问题。根据文献[5], 此时若 $w(t)$ 连续可微, 且满足

$$\max \|\dot{w}(t)\| \leq \delta (t \geq 0) \quad (26)$$

$\delta > 0$ 常数, 则当系统初始时刻位于其状态/控制空间某平衡点处时, 以后仍将工作于其状态/控制空间的平衡点族附近区域, 从而具有所要求的动态特性; 否则, 系统会脱离这一区域, 其动态特性变坏, 甚至失稳。为此, 对柔性臂位置控制系统, 将位置指令 w_r 进行低通滤波后的信号 $w(t)$ 作为参考输入, 该滤波器的传递函数是

$$\frac{w(s)}{w_r(s)} = \frac{a_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N} \quad (27)$$

针对具体系统和 w_r , 适当调整 (27) 式中 a_i , $i \in N$, 即可使条件(26)成立。

这样, 扩展线性化控制系统(16)、(25)结合前置滤波(27), 即可实现在整个平衡点族附近的稳定运动。而平衡点族参数向量 $\alpha \in R^n$ 可为任意实向量, 故所得系统在全关节空间有效。从而突破了传统线性设计只在有限离散点上有效的局限性^[4], 实现了多弹性杆机械臂的大范围机动。

4. 仿真研究

为验证上述结果, 对两弹性杆机械臂情况作了仿真研究, 并考虑了两组参数。第一组取:

$$l_1 = l_2 = 3.0\text{m}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1.0\text{kg/m},$$

$$EI_1 = EI_2 = 2 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}^2,$$

$$m_2 = 5.0\text{kg}, \quad m_p = 10.0\text{kg},$$

$$J_{1,1} = J_{2,1} = J_{2,2} = 0.1\text{kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_p = 0.2\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

为与文献[4]比较, 第二组取 NASA 航天飞机机械臂参数:

$$l_1 = l_2 = 8.13\text{m}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 4.8\text{kg/m},$$

$$EI_1 = EI_2 = 7.99 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}^2,$$

$$m_2 = 53.1\text{kg}, \quad m_p = 226.0\text{kg},$$

$$J_{1,1} = 1240.0\text{kg} \cdot \text{m}^2, \quad J_{2,1} = 4.57\text{kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{2,2} = 585.0\text{kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_p = 68.3\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

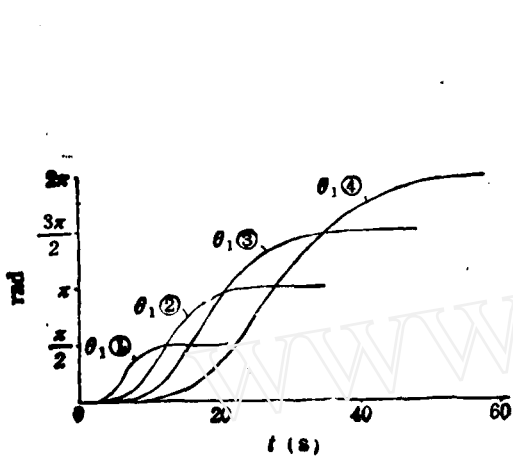
ϕ_{11} 和 ϕ_{21} 取悬臂梁一阶振型函数。计算状态反馈阵 $\Lambda(\alpha)$ 使式(22)的特征值均为 -10.0 。前置滤波取为 $w(s)/w_r(s) = P^N/(s+P)^N$, 其中极点 $P = F_{\max}/0.149|w_r|$, 而 $F_{\max} = \max \|\dot{w}(t)\| (t \geq 0)$ 。

对两组参数的机械臂设计的控制系统的仿真结果分别列于表1和表2, 及图2~5。表中 t_s 为定位时间(取稳态误差小于额定值的2%), $|q_{11}|_{\max}$ 和 $|q_{21}|_{\max}$ 分别是 q_{11} 和 q_{21} 在过渡过程中的最大幅值。各图中曲线旁表示了所代表的物理量及实验序号。仿真结果表明, 系统可在全工作空间实现精确的位置控制, 且有较好的动态品质; 连杆的弹性振幅在运动中保持为小量(对两组参数分别不超过杆长的4%与1.2%), 且在系统到位时得到完全抑制; 前置滤波保证了系统在一定响应速度下实现稳定的大范围机动, 否则系统只对小幅输入信号稳定, 幅度稍大即失稳。

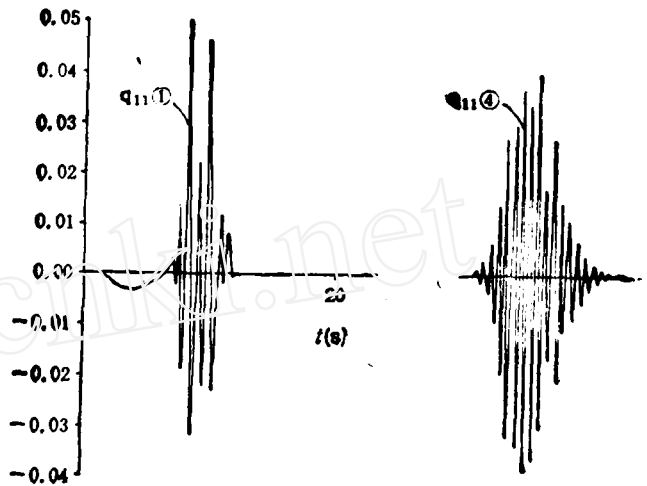
文献[4]用传统方法将系统在某点处线性化, 用频域法设计控制律, 并对第二组大参数系统给出对应实验17、18的结果。其 t_s 分别大于60sec和20sec, 而本文是3.8sec和2.8sec, 可见本文响应远快于文献[4]。因文献[4]只能对工作空间中有限个点给出设计, 从而每次只能移动很小范围(文中给出的是0.01rad); 而本文系统可一次移动到工作空间任何位置。可见在动态响应及位置控制的性能等方面, 本文结果均优于文献[4]。

5. 结论

本文解决了一类多柔性杆机械臂的精确位置控制问题。所给出的动态模型便于计算机程序化建模, 杆件的增多不造成本质困难。针对系统本身的特点, 用扩展线性化法给出的非线性控制系统设计, 方法简明, 保证系统在其整个平衡点族附近具有所要求的性能, 突破了传统方法只在个别工作点附近有效的局限性。再结

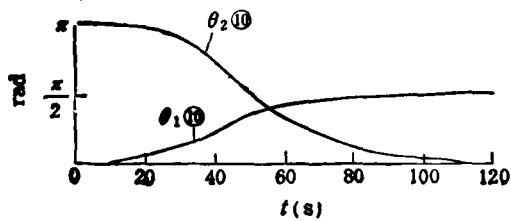


(a)

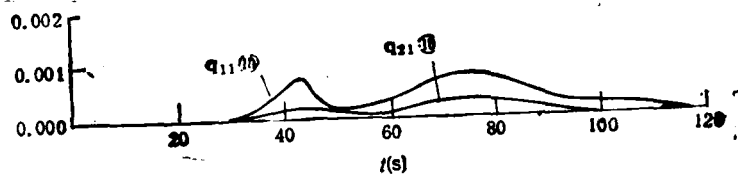


(b)

图 2

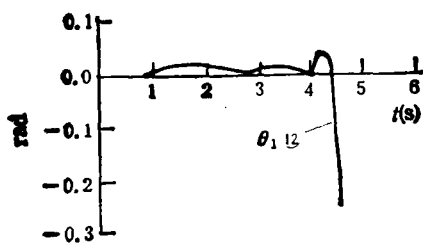


(a)

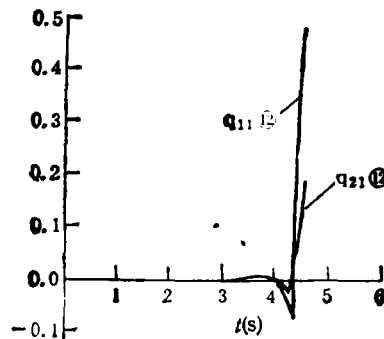


(b)

图 3



(a)



(b)

图 4

合本文提出的前置滤波方法,使所得系统既保持稳定,具有一定的响应速度,又能在工作空间实现大范围机动。与传统方法在系统动态品质、位置控制能力等方面的比较,突出说明了本文方案的优越性。原则上可将本文方法扩展到更复杂多柔性体结构的建模与控制上去。

参 考 文 献

- [1] Meirovitch, L., Computational methods in structural dynamics, Sijthoff & Noordhoff (1980).
- [2] Baumann, W. T. and Rugh, W. J., Feedback control of analytic nonlinear systems by extended linearization, *SIAM J. Control and optimization*, 25,5 (1987), 1341—1352.

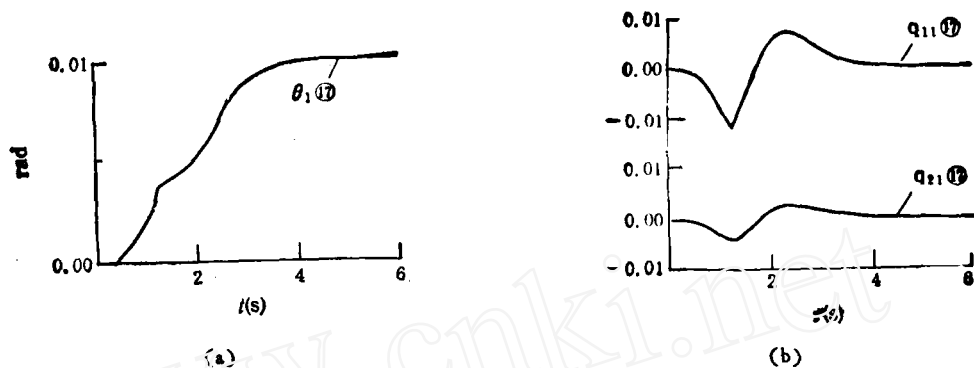


图 5

表 1

NO.	$\theta_1(0)$ (rad)	$\theta_2(0)$ (rad)	ωr_1 (rad)	ωr_2 (rad)	F_{max1}	F_{max2}	T_r (sec.)	$ q_{11} _{max}$	$ q_{21} _{max}$	Fig.
1	0	0	$\pi/2$	0	0.30		12.	0.05030	0.01836	2
2	0	0	π	0	0.30		24.	0.01378	0.00500	2
3	0	0	$3\pi/2$	0	0.30		35.	0.00713	0.00259	2
4	0	0	2π	0	0.30		54.	0.04074	0.01485	2
5	0	0	0	$\pi/2$		0.025	139.	0.00002	0.00001	
6	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$		0.16	22.6	0.00253	0.00084	
7	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0.025	0.025	138.	0.00006	0.00002	
8	0	0	π	$\pi/2$	0.025	0.025	280.	0.00030	0.00011	
9	$\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	0.10	0.04	86.	0.00077	0.00027	
10	0	π	$\pi/2$	$-\pi$	0.07	0.07	100.	0.00083	0.00029	3
11	0	0	0.003	0	*		4.5	0.00005	0.00002	
12	0	0	0.03	0	**					4

此表中为第一组参数。

* 无滤波, 小幅输入时系统稳定。

** 无滤波, 输入幅度稍大时系统不稳定。

表 2

NO.	$\theta_1(0)$ (rad)	$\theta_2(0)$ (rad)	ωr_1 (rad)	ωr_2 (rad)	F_{max1}	F_{max2}	T_r (sec.)	$ q_{11} _{max}$	$ q_{21} _{max}$	Fig.
13	0	0	$\pi/2$	0	0.23		15.6	0.038	0.015	
14	0	0	π	0	0.26		27.0	0.049	0.019	
15	0	0	0	$\pi/2$		0.08	43.4	0.0045	0.0019	
16	0	0	0	π		0.13	54.0	0.0069	0.0025	
17	0	0	0.01	0	0.008		3.8	0.012	0.005	5
18	0	0	0	0.01		0.01	2.8	0.015	0.006	
19	0	0	0.01	0.01	0.004	0.004	6.4	0.0035	0.0023	

此表中为第二组参数, 表中 $\theta_i(0)$ 、 ωr_i 、 F_{maxi} 分别是 θ_i 的初值、位置变更指令、前置滤波器参数 ($i=1,2$)。

- [3] Baumann, W. T., Feedback control of multii n. put nonlinear system by extended linearizati- on, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-33, 2 (1988), 193-197.
- [4] Ower, J. C. and Van de Vegte, J., Classical control design for a flexible manipulator: mo-

delling and control system design, *IEEE J. Robotics and Automation*, RA-3, 5 (1987), 485-489.

- [5] Kelemen, M., A stability property, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-31, 8 (1986), 766-768.

(本文于1991年8月16日收到)