确解 $y(x)$ 偏大的近似解 $y_u(x)$，应在区间$(0,1)$内选择足够多的配点．现为方便，在给定区间内确定9个等距配点，然后在这些配点上建立非线性规划约束不等式，该非线性规划问题为

$$\begin{cases}\min\ y_u(a,x_0),\ x_0\in(0,1)\\ Ry_u(a,0.1)\geqslant 0,\cdots 0,Ry_u(a,0.9)\geqslant 0\end{cases}$$

为寻求较精确解 $y(x)$ 偏小的近似解$y_l(x)$，建立非线性规划问题为

$$\begin{cases}\max\ y_l(a,x_0),\ x_0\in(0,1)\\ Ry_l(a,0.1)\leqslant 0,\cdots,Ry_l(a,0.9)\leqslant 0\end{cases}$$

将上述两个非线性规划问题的计算结果列于表2．表1和表2中的 y_m 是 y_u 和 y_l 的平均值．

后记

（1）本文给出的数学规划加权残值法，不仅适用于常微分方程边值问题，也适用于常微分方程初值问题；同时该方法也适用于偏微分方程问题[3]．

（2）应用本文的方法（MP-MWR）时，要求解的集是凸的[3]．

韩森副教授为本文做了大量计算工作，在此表示感谢．

参 考 文 献

[1] Collatz, L. The Numerical Treatment of Differential Equations. Berlin:Springer-Verlag, 1960, 200

[2] M. H. 普劳特和 H. F. 温伯格．叶其孝等译．微分方程的最大值原理．科学出版社，1985，54—57

[3] 朱宝安．力学问题优化计算——现代数学规划加权残值法．天津科学技术出版社，1992年10月，126－142

[4] 朱宝安．微分方程问题双边不等式数学规划解法的进展，中国科学基金，1992，6(3)

[5] 朱宝安．数学规划加权残值法．天津大学学报，1991 (4)：31—36

[6] 朱宝安．用单纯形法确定固体力学问题近似解的上边界和下边界．河北工学院学报，1984(1)：92－100

[7] 朱宝安．误差界与权函数——兼论线性规划加权残值法．第三届全国加权残值法会议论文集．西南交通大学出版社，1989：47－50

（本文于1992年9月20日收到）

利用能量-Casimir 方法研究充液对称刚体的非线性稳定性*

王 照 林　　匡 金 炉

（清华大学工程力学系，北京　100084）

提要　由 Newcomb、Arnold 等人倡导的能量-Casimir 方法是研究非线性运动稳定性的重要方法之一．本文利用能量-Casimir 方法研究了充液轴对称刚体的非线性稳定性充分条件．

关键词　能量-Casimir 方法，轴对称充液刚体，非线性稳定性

1. 引言[1]

能量-Casimir 方法是Lagrange-Dirichlet 方法的推广，它是基于 Arnold 的 Lie-Possion 系统概念及其变异的系统化发展．当系统的 Hamilton 结构具有足够的 Casimir 函数时，能量-Casimir 算法提供了一个算法能决定系统的平衡点的非线性稳定性充分条件．能量-Casimir 方法的基本步骤为

1.1　运动方程与保守量

将系统的方程写成状态方程形式．

$$\frac{du}{dt}=X(u) \tag{1}$$

式中 $u\in P$（相空间），X 是在相空间 P 上的一个向量场．寻找一个守恒的量 H（通常是能量函数）：$P\to\mathbf{R}$；也就是对方程(1)的任何解都有

$$\frac{d}{dt}H(u(t))=0 \tag{2}$$

然后寻找动力学方程(1)的一簇运动常数 C：

* 国家自然科学基金与航空航天部资助课题项目．

$P \to R$，这些运动常数就是典型的 Casimir 函数。

1.2　一阶变分

设 u_e 是一个平衡点，即 $X(u_e)=0$。在步骤 1 中找到的所有 Casimir 函数应具有特性：u_e 是 $H_C=H+C$ 的一个临界点，也就是

$$d(H+C)(u_e)=0 \tag{3}$$

1.3　二阶变分

计算二阶变分 $d^2H_C(u_e)$，检查二阶变分是否正定或负定。若 P 是有限维的，那么 u_e 是李雅普诺夫稳定的；若 P 是无限维的，那必须进行必要的凸估计[1]。

2. 系统运动方程与守恒量

全充理想液体的刚体的定点运动微分方程可由有限个状态变量描述。假设充液腔体的形状是椭球形，系统的随体坐标系 $O\text{-}X_bY_bZ_b$ 与系统的主惯轴重合。椭球形状为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

这里 a、b、c 分别为椭球的三个半轴长，

$$x_0=y_0=0,\ z_0=1.$$

液体的 Helmholtz 方程为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{dt}&=2a^2\left(\frac{\omega_3\Omega_2}{a^2+b^2}-\frac{\omega_2\Omega_3}{c^2+a^2}\right)\\
&\quad-2\Omega_2\Omega_3\frac{a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\\
\frac{d\Omega_2}{dt}&=2b^2\left(\frac{\omega_1\Omega_3}{b^2+c^2}-\frac{\omega_3\Omega_1}{a^2+b^2}\right)\\
&\quad-2\Omega_1\Omega_3\frac{b^2(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}\\
\frac{d\Omega_3}{dt}&=2c^2\left(\frac{\omega_2\Omega_1}{c^2+a^2}-\frac{\omega_1\Omega_2}{b^2+c^2}\right)\\
&\quad-2\Omega_1\Omega_2\frac{c^2(b^2-a^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中 ω_1、ω_2、ω_3 为主刚体角速度在随体坐标系中的分量；Ω_1、Ω_2、Ω_3 分别为液体的等效刚体的角速度在随体坐标系中的分量(也就是Helmholtz 旋度分量)。

若以 I_1、I_2、I_3 分别代表主刚体惯性张量分量与液体等效刚体惯性张量分量之和，而I_1'、I_2'、I_3' 分别代表固化液体的惯性张量分量与液体等效刚体惯性张量分量之差，以 L、M、N 分别代表外力矩的分量，则充液刚体定点运动微分方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(I_1\omega_1+I_1'\Omega_1)+(I_3-I_2)\omega_2\omega_3\\
&\quad+I_3'\omega_2\Omega_3-I_2'\omega_3\Omega_2=L\\
&\frac{d}{dt}(I_2\omega_2+I_2'\Omega_2)+(I_1-I_3)\omega_1\omega_3\\
&\quad+I_1'\omega_3\Omega_1-I_3'\omega_1\Omega_3=M\\
&\frac{d}{dt}(I_3\Omega_3+I_3'\Omega_3)+(I_2-I_1)\omega_1\omega_2\\
&\quad+I_2'\omega_1\Omega_2-I_1'\omega_2\Omega_1=N
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

假设作用在系统上的外力矩函数为 $U(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，仅受重力时为

$$U(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=-M_sg(x_0\gamma_1+y_0\gamma_2+z_0\gamma_3) \tag{7}$$

这里 M_s 为系统的总质量，固定轴 s 关于随体坐标系轴的方向余弦 γ_i 满足方程

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\gamma_1}{dt}&=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3\\
\frac{d\gamma_2}{dt}&=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1\\
\frac{d\gamma_3}{dt}&=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

外力矩为

$$\left.\begin{aligned}
L&=\frac{\partial U}{\partial\gamma_2}\gamma_3-\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}\gamma_2\\
M&=\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}\gamma_1-\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}\gamma_3\\
N&=\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}\gamma_2-\frac{\partial U}{\partial\gamma_2}\gamma_1
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因此，全充液刚体的运动方程由(5)，(6)，(8)等 9 个方程组成。系统的能量积分与面积积分分别为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1}+\frac{m_2^2}{I_2}+\frac{m_3^2}{I_3}+\frac{G_1^2}{I_1'}+\frac{G_2^2}{I_2'}+\frac{G_3^2}{I_3'}+2M_sgl\gamma_3\right)=\text{Const}$$

$$(m_1+G_1)\gamma_1+(m_2+G_2)\gamma_2+(m_3+G_3)\gamma_3=\text{Const}$$

这里 $m_i=I_i\omega_i$，$G_i=I_i'\Omega_i$，$i=1,2,3$。此外

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

考虑到本文研究对象是轴对称充液刚体

$(I_1 = I_2,\ I'_1 = I'_2)$，由系统方程(5),(6)知外加的首次积分

$$m_3 = \text{Const}$$

3. 非线性运动稳定性分析

据以上分析，系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{I_1} + \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} + \frac{G_1^2}{I'_1} + \frac{G_2^2}{I'_2} + \frac{G_3^2}{I'_3}\right) + M_t g l \gamma_3 \tag{10}$$

系统的 Casimir 函数选为

$$C = \Phi(x,y) + \Gamma(m_3) \tag{11}$$

式中，

$$x = (m_1 + G_1)\gamma_1 + (m_2 + G_2)\gamma_2 + (m_3 + G_3)\gamma_3$$

$$y = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$$

Φ、Γ 为待定函数，即 $\Phi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$; $\Gamma: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

研究全充液陀螺的平衡状态

$$\boldsymbol{m}_e = (0, 0, \bar{m}_3),$$

$\boldsymbol{\gamma}_e = (0,0,1)$，$\boldsymbol{G}_e = (0,0,\bar{G}_3)$，该状态代表充液陀螺绕铅垂轴旋转。系统守恒量为

$$H_C = H + \Phi + \Gamma \tag{12}$$

若 $dH_C(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e) = 0$，则 H_C 在平衡位置具有一个临界点。即若

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial m_1} &= \frac{m_1}{I_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_1 \\
\frac{\partial H_c}{\partial m_2} &= \frac{m_2}{I_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_2 \\
\frac{\partial H_c}{\partial m_3} &= \frac{m_3}{I_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_3 + \Gamma'(m_3) \\
\frac{\partial H_c}{\partial G_1} &= \frac{G_1}{I'_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_1 \\
\frac{\partial H_c}{\partial G_2} &= \frac{G_2}{I'_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_2 \\
\frac{\partial H_c}{\partial G_3} &= \frac{G_3}{I'_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\gamma_3 \\
\frac{\partial H_c}{\partial \gamma_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(m_1 + G_1) + 2\gamma_1\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
\frac{\partial H_c}{\partial \gamma_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(m_2 + G_2) + 2\gamma_2\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
\frac{\partial H_c}{\partial \gamma_3} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(m_3 + G_3) \\
&\quad + 2\gamma_3\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M_t g l
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中，$\Gamma'(m_3) = d\Gamma(m_3)/dm_3$.

在平衡位置 $\boldsymbol{m}_e$、$\boldsymbol{\gamma}_e$、$\boldsymbol{G}_e$ 都为零，那么有如下关系式成立

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_x &\triangleq \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e) \\
&= -\frac{\bar{m}_3}{I_3} - \Gamma'(m_3) \\
\Phi_y &\triangleq \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\bar{m}_e, \bar{\gamma}_e, \bar{G}_e) \\
&= \frac{1}{2}[-M_t g l - \Phi_x(\bar{m}_3 + \bar{G}_3)]
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

以下我们记

$$\Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e)$$

$$\Phi_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e)$$

$$\Phi_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e)$$

经过一系列求导计算，H_c 在 $(\boldsymbol{m}_e, \boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{G}_e)$ 点处的二阶变分矩阵为

$$D^2H_c =
\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} & 0 & 0 & 0 \\
a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & a_{47} & 0 & 0 \\
0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & a_{58} & 0 \\
0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & a_{69} \\
0 & 0 & 0 & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{85} & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{96} & 0 & 0 & a_{99}
\end{bmatrix} \tag{15}$$

式中 $a_{11} = \dfrac{1}{I_1}$，$a_{22} = \dfrac{1}{I_2}$，

$$a_{33} = \frac{1}{I_3} + \Phi_{xx} + \Gamma''(m_3)$$

$$a_{44} = 2\Phi_y,\quad a_{55} = 2\Phi_y$$

$$a_{66} = (\bar{M}_3 + \bar{G}_3)^2\Phi_{xx} + 2\Phi_y + 4(\bar{M}_3 + \bar{G}_3)\Phi_{xy} + 4\Phi_{yy}$$

$$a_{77} = \frac{1}{I'_1},\quad a_{88} = \frac{1}{I'_2},\quad a_{99} = \frac{1}{I'_3} + \Phi_{xx}$$

$$a_{14} = a_{41} = \Phi_x,\quad a_{52} = a_{25} = \Phi_x$$

$$a_{36} = a_{63} = \Phi_x + (\bar{M}_3 + \bar{G}_3)\Phi_{xx} + 2\Phi_{xy}$$

$$a_{74} = a_{47} = \Phi_x,\quad a_{58} = a_{85} = \Phi_x$$

$$a_{96} = a_{69} = \Phi_x + (\bar{M}_3 + \bar{G}_3)\Phi_{xx} + 2\Phi_{xy}$$

将带状矩阵(15)化为下三角形矩阵为

$$D^2H_c = \begin{bmatrix} a_{11}^* & & & & & & & & \\ 0 & a_{22}^* & & & & & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & a_{33}^* & & & & & & \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44}^* & & & & & \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55}^* & & & & \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & a_{66}^* & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{74} & 0 & 0 & a_{77}^* & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{85} & 0 & 0 & a_{88}^* & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{96} & 0 & 0 & a_{99}^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中，$a_{11}^* = a_{11}$，$a_{22}^* = a_{22}$，$a_{33}^* = a_{33}$

$$a_{44}^* = a_{44} - a_{14}^2/a_{11}, \quad a_{55}^* = a_{55} - a_{25}^2/a_{22}$$

$$a_{66}^* = a_{66} - a_{36}^2/a_{33}, \quad a_{77}^* = a_{77} - a_{47}^2/a_{44}^*$$

$$a_{88}^* = a_{88} - a_{58}^2/a_{55}^*, \quad a_{99}^* = a_{99} - a_{69}^2/a_{66}^*$$

假设在平衡位置取定 $\Phi_{xx} = \Phi_{xy} = 0$，但

$$\Phi_{yy} \neq 0,$$

那么

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^* &= \frac{1}{I_1} \\ a_{22}^* &= \frac{1}{I_2} \\ a_{33}^* &= \frac{1}{I_3} + \Gamma''(\bar{m}_3) \\ a_{44}^* &= 2\Phi_y - \Gamma_1\Phi_x^2 \\ a_{55}^* &= 2\Phi_y - I_2\Phi_x^2 \\ a_{66}^* &= [(2\Phi_y + 4\Phi_{yy})(1 + I_3\Gamma''(\bar{m}_3)) \\ &\quad - I_3\Phi_x^2]/(1 + I_3\Gamma''(\bar{m}_3)) \\ a_{77}^* &= [2\Phi_y - (I_1 + I_1')\Phi_x^2]/(2I_1'\Phi_y \\ &\quad - I_1I_1'\Phi_x^2) \\ a_{88}^* &= [2\Phi_y - (I_2 + I_2')\Phi_x^2]/(2I_2'\Phi_y \\ &\quad - I_2I_2'\Phi_x^2) \\ a_{99}^* &= \{[(2\Phi_y + 4\Phi_{yy})(1 + I_3\Gamma''(\bar{m}_3)) \\ &\quad - I_3\Phi_x^2] - \Phi_x^2(1 + I_3\Gamma''(m_3))\}/ \\ &\quad \{(2\Phi_y + 4\Phi_{yy})(1 + I_3\Gamma''(\bar{m}_3)) \\ &\quad - I_3\Phi_x^2\} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

若选择 $\Gamma''(m_3) = 0$，而 Φ_{yy} 足够大，以使 a_{66}^* 和 a_{99}^* 均恒大于零，那么矩阵(16)的正定性的充分条件为：$a_{44}^* > 0$ 和 $a_{77}^* > 0$，(因为 $I_1 = I_2$，$I_1' = I_2'$)，进一步推知矩阵(16)的正定性的充分条件归结为要求

$$2\Phi_y - (I_1 + I_1')\Phi_x^2 > 0 \quad (18)$$

将(14)式代入(18)，整理知

$$(I_1' + I_1')\Phi_x^2 + (\bar{m}_3 + \bar{G}_3)\Phi_x + M_t gl < 0 \quad (19)$$

首项系数 $I_1 + I_1'$ 恒大于零，因此对于任意的 Φ_x，(19)式恒成立的条件为

$$(\bar{m}_3 + \bar{G}_3)^2 > 4(I_1 + I_1')M_t gl \quad (20)$$

不等式(20)为对称充液刚体绕铅垂轴永久转动的稳定性的充分条件。该条件完全可由构造李雅普诺夫函数的方法得到[2,5]，也可由大系统方法[3]获得。

本文应用能量-Casimir 方法证明了轴对称充液刚体定点运动的非线性稳定性的充分条件。对于容易找到运动守恒量的有限自由度的动力学系统的稳定性分析，应用能量-Casimir 方法，思路简单，非常有效。

大家知道，条件(20)为充有纯有势液体的对称刚体稳定的充分条件。若在 Casimir 函数中考虑液体的涡度积分守恒量，那么应用能量-Casimir 方法也能得出充有有旋液体的刚体稳定的充分条件。有关这方面的条件在文献[2]、[4]、[5]、[6]中能查到。

参 考 文 献

[1] Holm D, Marsden J. Ratiu T, Weinstein, A. Stability of rigid body motion using the energy-casimir method, *Contemporary Mathematics*, AMS, 1984(28): 15—23

[2] Rumyantsev V V. Stability of the rotation of a solid body, *Having an Ellipsoidal Cavity Filled with Liquid*, PMM, 1959(21)

[3] 王照林．运动稳定性与卫星姿态动力学，力学进展．1980,10(4): 15—30

[4] 刘延柱．轴对称充液刚体的自旋稳定性．上海交通大学学报．1984,18(5)

[5] Moiseev N N, Rumyantsev V V. Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid, Springer-Verlag (1968).

[6] 刘延柱．充液刚体动力学．上海交通大学工程力学系(1989)

[7] Arnold V I. The hamiltonian nature of the euler equations in the dynamics of a rigid body and of an ideal fluid, fluid, *Usp. Mat. Nauk*, 1969(24): 225—226

[8] 贾书惠．刚体动力学．高等教育出版社(1987)

(本文于1992年1月18日收到)