

图4给出了同样的圆柱壳(各参数算例中已给出)受对称及余弦分布冲击的实验结果<sup>[1]</sup>。当初缺陷放大到0.2壳厚( $\tilde{w}_{\max}/h = 0.2$ )时,对应对称及余弦分布所需的冲量值分别是 $I_{cr} = 700(\text{Pa}\cdot\text{s})$ ,  $I_{cra} = 840(\text{Pa}\cdot\text{s})$ ,对应屈曲波数分别是 $n_{cr}^* = 21$ ,  $n_{cra} = 4-5$ 可见,不对称冲击时,屈曲半波只在迎冲击面局部区域发生,且屈曲波数锐减(见图4(a)(b))。以上实验结果很好地被本文理论验证:(7)式给出,  $n_{cra} \approx 4$ ,另外上节已算得 $I_{cra} = 932(\text{Pa}\cdot\text{s})$ ,再考虑到本文的假设,可见本文的理论结果是令人满意的。

## 6. 结论

本文用能量准则导得了圆柱壳受不对称冲击时的屈曲波数公式及临界冲击速度公式。初步的实验结果表明本文的理论结果是

令人满意的。边界的出现使屈曲波数有相对减少的趋势。同时进一步表明,文献[2]的能量准则是用来处理结构塑性动力屈曲问题的一种有效方法。

## 参 考 文 献

- [1] Lindberg H E and Florence A I. Dynamic Pulse Buckling, Martinus, Nijhoff, The Netherland, 1987
- [2] Wang R and Ru C Q. An energy criterion for the dynamic plastic buckling of circular cylinders under impulsive loading. Metal Forming and Impact Mechanics (Ed. Reid S. R.), Pergamon Press, 1985: 213-223
- [3] 茹重庆, 王仁. 关于冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲的两个问题. 固体力学学报, 1988, 9(1): 62-66

(本文于1992年9月29日收到第一稿,  
1993年4月3日收到修改稿)

# 薄膜单元和六面体单元的耦合计算模型

张 建 辉

(河北大学, 保定 071002)

**摘要** 本文提出薄膜单元和六面体二次等参单元的耦合计算模型。由所编制的计算程序进行实例计算, 计算结果与解析解一致。

**关键词** 薄膜单元, 耦合计算模型, 模拟, 薄膜应力

## 1. 引 言

有限元耦合计算模型的研究是计算力学在计算机配合下求解工程问题的一个新课题。在工程问题中, 结构的形式很少是单一形态的, 大多数是相当复杂的。因此, 有限元耦合计算模型用以模拟形式复杂的结构, 具有广泛的潜力。为了合理地模拟表层(相对很薄)刚度和其内部刚度有较大差别的实体结构, 本文提出了曲面薄膜单元和六面体二

次等参单元的耦合计算模型。由此模型可分别得到结构表层及其内部实体的应力, 从而较好地解决了这种结构的应力分析问题。

## 2. 两种单元的性质

2.1 本文的薄膜单元为曲面四边形八节点单元, 其坐标变换式和位移函数分别为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 f_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^8 f_i \rho \frac{t}{2} \begin{bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 f_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $f_i = f_i(\xi, \eta)$  为平面四边形二次等参单

元的形函数,  $t$  为结构表层厚度,  $l_{3i}, m_{3i}, n_{3i}$  为节点  $i$  处表层中面的外法线方向数, 自然坐标系  $\xi\eta\zeta$  的  $\xi\eta$  面位于表层中面. 图 1 为一典型曲面薄膜单元.

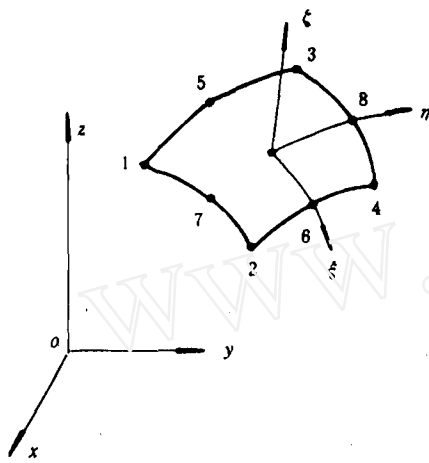


图 1

由 (1)、(2) 式得 Jacobian 转换矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{i=1}^8 f_{i,\xi} x_i + \sum_{i=1}^8 f_{i,\xi} \zeta \frac{t}{2} l_{3i} \\ x_{,\eta} &= \sum_{i=1}^8 f_{i,\eta} x_i + \sum_{i=1}^8 f_{i,\eta} \zeta \frac{t}{2} l_{3i} \\ x_{,\zeta} &= \sum_{i=1}^8 f_{i,\zeta} \frac{t}{2} l_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

该矩阵中其它元素可同样得到.

$J$  矩阵的逆矩阵为

$$J^{-1} = J^* = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

整体坐标系  $o-xyz$  下的应变列阵

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ w_{,x} + u_{,z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

将位移函数对自然坐标求导数, 并利用  $J^*$  矩阵得到位移函数关于整体坐标的导数, 再由上述应变列阵的第二种形式, 得  $B$  矩阵的第  $i$  部分为

$$B_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \\ b_i & a_i & 0 \\ 0 & c_i & b_i \\ c_i & 0 & a_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_i &= J_{11}^* f_{i,\xi} + J_{12}^* f_{i,\eta} \\ b_i &= J_{21}^* f_{i,\xi} + J_{22}^* f_{i,\eta} \\ c_i &= J_{31}^* f_{i,\xi} + J_{32}^* f_{i,\eta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

矩阵  $B = [B_1, B_2, \dots, B_8]$ . 由此, 得薄膜单元的刚度矩阵为

$$K = \int_V B^T D B dV = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| d\xi d\eta \quad (9)$$

弹性矩阵  $D$  是相对于整体坐标系的, 但并非六面体单元的弹性矩阵.

在表层中面任意点建立局部坐标系  $o'-x'y'z'$ ,  $z'$  轴与中面垂直. 考虑表层的薄膜应力、薄膜应变, 对各向同性材料, 有应力-应变关系  $\sigma' = D'\varepsilon'$  为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \end{bmatrix} \quad (10)$$

设局部坐标轴  $x', y', z'$  方向的单位矢量分别为:  $e_1 = (l_1, m_1, n_1), e_2 =$

$(l_2, m_2, n_2), e_3 = (l_3, m_3, n_3)$ , 且令  $J_1 = (J_{11}, J_{12}, J_{13}), J_2 = (J_{21}, J_{22}, J_{23})$ , 则

$$e_1 = (J_1)_{\text{norm}}, e_3 = (J_1 \times J_2)_{\text{norm}}, e_2 = e_3 \times e_1$$

那么, 弹性矩阵

$$D = T_e^T D' T_e \quad (11)$$

其中

$$T_e = \begin{bmatrix} T_{e11} & T_{e12} \\ T_{e21} & T_{e22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

薄膜单元刚度阵由  $3 \times 3$  高斯求积公式计算.

2.2 对于六面体二次等参单元, 仅给出其坐标变换式和位移函数如下

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

式中的形函数  $N_i$  及该单元的其他列式见文献 [1] 或 [4].

### 3. 薄膜单元和六面体单元的耦合计算

前述薄膜单元和六面体单元的一个表面具有几何一致性, 且两者的节点参数(方向数除外)的性质和个数是相同的. 因此, 在划分六面体单元网格的基础上, 将该网格在结构表层处的节点作为薄膜单元的节点, 从而形成薄膜单元的网格. 分别形成薄膜单元、六面体单元的单元刚度阵, 并按统一的节点

编号系统送入总刚. 这种耦合方式, 未增加总刚的存储量.

根据全部的节点位移, 由六面体单元的相应列式计算结构内部实体的节点或高斯点应力及主应力.

根据表层节点的节点位移, 由薄膜单元的列式计算结构表层节点或高斯点的应力:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = D \cdot B \cdot \delta \quad (14)$$

其中  $\delta = [w_1^e, v_1^e, u_1^e, \dots, u_8^e, v_8^e, w_8^e]$ .

此处应力列阵是相对整体坐标系的, 而结构表层的薄膜应力列阵为

$$\sigma' = T_\sigma \cdot \sigma \quad (15)$$

其中

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} T_{e11} & 2T_{e12} \\ \frac{1}{2}T_{e21} & T_{e22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 4. 算例

内外半径分别为  $a$ 、 $b$  的圆筒, 其外壳厚为  $t(t \ll a)$ , 受均布内压  $q_1$  和外压  $q_2$  的

作用,如图2、3.圆筒及其外壳的弹性模量分别为  $E_1, E_2$ .

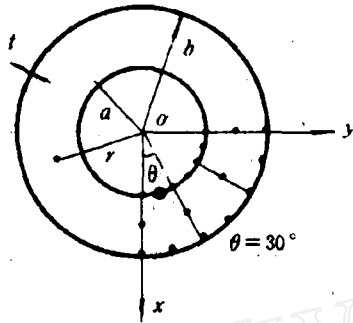


图2

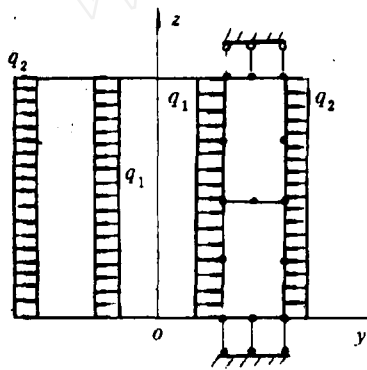


图3

取  $a = 4\text{m}, b = 7\text{m}, t = 0.01\text{m}, E_1 =$

$3 \times 10^4 \text{kN/m}^2, E_2 = 3 \times 10^6 \text{kN/m}^2, q_1 = q_2 = 10 \text{kN/m}^2$ .

利用对称性,取1/4圆筒计算(图2),圆周方向取三个单元,纵向二个单元(图3).计算结果及解析解见下表.

	圆筒半径 (m)	4.0	5.5	7.0
$10^3 u_r$ (m)	解析解	-0.64363	-1.01307	-1.35939
	本模型解	-0.63257	-1.00305	-1.34919
$\sigma_r$ ( $\text{kN/m}^2$ )	解析解	-10.0	-9.41784	-9.16778
	本模型解	-9.8012	-9.4667	-9.0413
$\sigma_\theta$ ( $\text{kN/m}^2$ )	解析解	-7.5284	-8.1105	-8.3606
	本模型解	-7.4015	-8.0651	-8.2811
圆筒外壳(表层) 环向应力 ( $\text{kN/m}^2$ )	解析解		-582.5974	
	本模型解		-602.0400	

上述运算是在 IBM-PC 机上进行的,结果表明,该模型的精度是令人满意的.

#### 参 考 文 献

- [1] Weaver W Jr and Johnston P R. Finite Elements for Structural Analysis. Prentice-Hall, 1984
- [2] Cook R D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley, 1974
- [3] 徐芝纶. 弹性力学,上册. 高等教育出版社, 1988
- [4] 华东水利学院. 弹性力学问题的有限单元法. 水利电力出版社, 1978

(本文于 1992 年 9 月 26 日收到)

## 孔洞损伤的 CT 识别<sup>1)</sup>

虞洪辉 杨卫

(清华大学, 北京 100084)

**摘要** 本文阐述由 CT Hounsfield 信号直方图来识别孔洞损伤(含孔洞密度与孔洞大小)的数学模型.按本模型所数值模拟的密度数据分布与对孔洞损伤的 CT 实测分布类似.

**关键词** 孔洞损伤, CT, 数学识别

### 1. 引言

计算机断层成像术 (Computerized To-

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金资助课题.