

$S_p(t)$ 、 $S_l(t)$ 分别是力 $P(t)$ 、变形 $\Delta l(t)$ 的感觉量, t 是时间.

感觉量 $S_p(t)$ 、 $S_l(t)$ 与刺激量 $P(t)$ 、 $\Delta l(t)$ 之间的关系取 (1) 式形式

$$S_p(t) = \int_0^t G_p(t-\tau) d(\ln P(\tau)) \quad (13)$$

$$S_l(t) = \int_0^t G_l(t-\tau) d(\ln(\Delta l(\tau))) \quad (14)$$

代入 (12) 式, 可得力 $P(t)$ 与变形 $\Delta l(t)$ 之间的关系

$$P(t) = g(\Delta l(t), t) \quad (15)$$

相反地, 当已知 (15) 式中 g 的函数形式, 可求得 (12) 式中 f 的形式, 并由感觉量之间的关系, 推知函数 g 中常数的值. 现举例说明.

设力 $P(t)$ 与变形 $\Delta l(t)$ 之间的关系

$$P(t) = K \cdot \Delta l(t) \quad (16)$$

K 为弹性常数. 特殊地, 感觉量与刺激量之间的关系取对数形式, 即有

$$S_p(t) = G_p^0 \cdot \ln(P(t)) \quad (17)$$

$$S_l(t) = G_l^0 \cdot \ln(\Delta l(t)) \quad (18)$$

从而, 由 (16) 式, 得 $S_p(t)$ 、 $S_l(t)$ 之间的关系

$$S_p(t) = G_p^0 \ln K + G_p^0 \ln(\Delta l(t)) \quad (19)$$

$$= G_p^0 \ln K + \frac{G_p^0}{G_l^0} S_l(t) \quad (20)$$

于是, 可得求解弹性常数 K 的公式

$$K = \exp \left[\frac{S_p(t)}{G_p^0} - \ln(\Delta l(t)) \right] \quad (21)$$

$$= \exp \left[\frac{S_p(t)}{G_p^0} - \frac{S_l(t)}{G_l^0} \right] \quad (22)$$

式 (21) 是利用力的感觉量 $S_p(t)$ 和变形 $\Delta l(t)$ 确定弹性常数 K , (22) 是利用力和变形的感觉量确定弹性常数 K 的公式. 利用这 2 个公式, 可以确定材料的弹性模量 E , 这是“软机械”的实验方法. 类似地, 可以建立确定材料其它力学性能的“软机械”实验方法, 如: 液体的表观黏度等.

3. 结论和讨论

应用心理物理学定律 (1) 和 (2) 式, 可以定性分析某些心理现象.

由式 (21) 和 (22) 可知, 对于某些材料 (如: 食品), 可以应用心理学这部“软机器”, 确定它们的“硬”指标参数, 如弹性模量、表观黏度等.

由式 (20) 可知, 感觉量 $S_p(t)$ 、 $S_l(t)$ 之间为线性关系, 线性系数为

$$K' = \frac{G_p^0}{G_l^0}$$

注意, 它与弹性常数 K 并不相等. 故不能由感觉量之间的线性系数估测被测材料的弹性常数. 这应引起做感官分析人员的注意.

参 考 文 献

- [1] 赫葆源, 张厚燊, 陈舒永. 实验心理学. 北京大学出版社, 1983
- [2] Swynghedau S, Peleg M. A model for the compressibility of food—finger(s) arrays. *J Rheol*, 1992, 36(1): 45-56
- [3] 朱红, 黄一贞, 张弘. 食品感官分析入门. 中国轻工业出版社, 1993
- [4] R M 克里斯坦森. 黏弹性力学引论. 科学出版社, 1990

(本文于 1993 年 12 月 26 日收到)

求单自由度非线性振动数值解的 Taylor 展开法

王 多

陈立群

(沈阳航空工业学院, 沈阳 110031) (鞍山钢铁学院, 鞍山 114002)

摘要 本文针对具体单自由度非线性振动系统建立了便于计算机实现的形式, 求数值解 Taylor 展开法, 给出实例与 Runge-Kutta 法进行比较, 并应用

于混沌解的计算.

关键词 非线性振动, 数值方法, Taylor 展开, 混沌

1. 引言

微分方程的数值解法是获取非线性系统信息的基本方法,在此基础上可以求出 Poincaré 映射,功率谱及各种统计特征. 通常的数值解法,如广泛采用的 Runge-Kutta 法,在微机上运行时遇到两方面的困难,其一是速度,由于计算量大而用机时太长使得计算难以实行;其二是精度,由于系统的敏感性误差较大时将导致相异的定性结果. 我们在研究单自由度非线性振动时,将通常认为不适合实际计算的 Taylor 展开法结合具体问题进行改进,使计算程序的速度与精度都大为提高.

2. 算法

研究单自由度非线性振动系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y, t) \quad (1)$$

当物理背景不是碰撞或分段线性等问题时,不妨假设 f 是充分光滑的. 以 D_m^n 记 $x = x(t)$ 在 $t = t_n$ 处的 m 阶导数. 以 h_n 记第 n 步步长,则在 Taylor 展开式中截断 l 次以上高次项得迭代公式

$$x_{n+1} = \sum_{m=0}^l \frac{1}{m!} D_m^n h_n^m, \quad y_{n+1} = \sum_{m=0}^l \frac{1}{m!} D_{m+1}^n h_n^m, \quad (2)$$

$$t_{n+1} = t_n + h_n$$

改进 Taylor 展开法的关键在于使 D_m^n 便于计算.

对于 Duffing 型非线性振动系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ay + bx + cx^3 + E \cos \omega t \quad (3)$$

我们可以建立 D_m^n 易于计算的递推形式. 由 (3) 式

$$D_2^n = \dot{D}_1^n = aD_1^n + bD_0^n + cD_0^{n^2} + E \cos \omega t_n \quad (4)$$

$$D_3^n = \dot{D}_2^n = aD_2^n + bD_1^n + 3cD_0^{n^2} D_1^n - E\omega \sin \omega t_n \quad (5)$$

$$D_m^n = aD_{m-1}^n + bD_{m-2}^n + 3c \sum_{k=0}^{m-3} \binom{m-3}{k}$$

$$\cdot S_k^n D_{m-2-k}^n - E\omega^{n-2} \cos \left(\omega t_n + \frac{m\pi}{2} \right) \quad (6)$$

$(m \geq 3)$

其中

$$S_k^n = (D_0^n \cdot D_0^n)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D_i^n D_{k-i}^n \quad (7)$$

推导 (6) 式时应用了 Leibniz 公式. D_m^n 的公式尽管形式复杂,但是多由加法和乘法构成的递推关系式,便于计算机实现.

对于其它形式的非线性振子亦可采用上述思路. 例如 (3) 式中有 x^2 项时,仅需在 (4)、(5) 和 (6) 式中分别在右端加上一项 $D_0^{n^2}$ 、 S_1 和 S_{m-2} . 一般非线性项为 $x^u y^v$ 时,都可以采用 Taylor 展开法.

这里的算法易采用 Fehlberg 的思路^[1],实现对步长的控制,对事先给定的误差限 ϵ 要求 l 阶展式得到的近似解的绝对差值不超过 ϵ ,即

$$\left| \frac{x^{(l)}(t_n) h_n^l}{l!} \right| = \left| \frac{D_l^n h_n^l}{l!} \right| \leq \epsilon \quad (8)$$

故由 (8) 式可直接求出第 n 次迭代的步长

$$h_n = \sqrt{\frac{l!}{|D_l^n|} \epsilon} \quad (9)$$

其中 ϵ 可根据计算机字长选取,以减小截断误差.

3. 算例

针对一个具体的 Duffing 振子^[2]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -0.168y + 0.5x - 0.5x^3 + 0.172 \cos t \quad (10)$$

我们在初值条件 $x_0 = 1.0, y_0 = 0.0$ 下比较了 4 阶 Runge-Kutta 算法 RK_4 和本文算法 T_{11} (在 (2) 式中取 $l = 11$) 的精度. 鉴于 (10) 的精确解无法得到,我们用相继半分步长来比较 RK_4 和 T_{11} 的收敛性, $t = 20\pi$ 时有关结果列于表 1. 进一步计算

表 1 RK_4 与 T_{11} 的比较

$(t = 20\pi)$

步长	$RK_4 : x(t)$	$y(t)$	$T_{11} : x(t)$	$y(t)$
0.50	0.44864767790	0.16373741627	0.470144987106	0.368883132935
0.250	0.45375755429	0.36050334573	0.470145434141	0.368883371353
0.1250	0.46916505694	0.36838603020	0.470145434141	0.368883371353
0.625000E-1	0.47009816766	0.36885941029	0.470145434141	0.368883371353
0.312500E-1	0.47014296055	0.36888211966	0.470145434141	0.368883371353
0.156250E-1	0.47014531493	0.36888331175	0.470145434141	0.368883371353
0.781250E-2	0.47014546394	0.36888337135	0.470145434141	0.368883371353
0.390625E-2	0.47014546394	0.36888337135	0.470145434141	0.368883371353

表明误差的积累将导致定性结果的相异. 取定步长 $h = 2^{-4}$, 前 20 个周期分别用 RK_4 和 T_{11} 求得 (10) 的解图形显示时相轨迹非常接近, 但如图 1 示在 18-40 周期时, T_{11} 的结果收敛于接近右平衡点的周期轨道, 而 RK_4 得到的相轨迹仍在 3 个平衡点间游荡. 从耗费机时看, T_{11} 亦优于 RK_4 , 计算

(10) 式 40 个周期, RK_4 用 CPU 时间 16.2 秒, 接口时间 12 分 30.36 秒; T_{11} 用 CPU 时间 10.24 秒, 接口时间 4 分 22.06 秒.

算法 T_{11} 还用于研究 Duffing-Holmes 振子 (在 (3) 式中 $a, c < 0, b > 0$) 的混沌状态. 图 2 和图 3 给出不同参数和初值下的 Poincaré 映射, 其几何形状与 Holmer 的结果^[3] 不同, 尤其是图 3, 很类似于仅在实验中发现的 Poincaré 鸢尾 (Fleur de Poincaré)^[4,1]

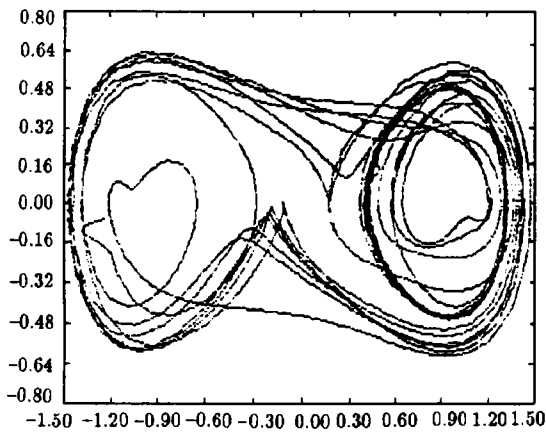


图 1 RK_4 和 T_{11} 得出 (10) 的相轨迹定性相异

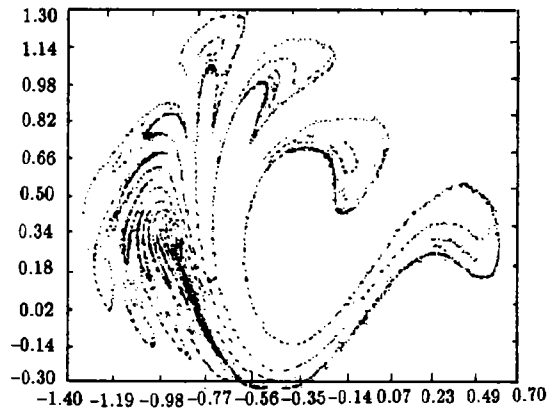


图 3 Poincaré 鸢尾

本文部分工作曾得到东北大学力学部关立章教授的指导, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] Fehlberg E. *Computing*, 1969(4): 93-106
- [2] Dowell E H, Pezeshki I C. *J of Appl Mech*, 1986, 51: 5-9
- [3] Holmes D J. *Philos Trans R Soc, London A*, 1979, 292: 419-448
- [4] Moon F C. *J of Appl Mech*, 1980, 47: 638-644

(本文于 1993 年 4 月 29 日收到)

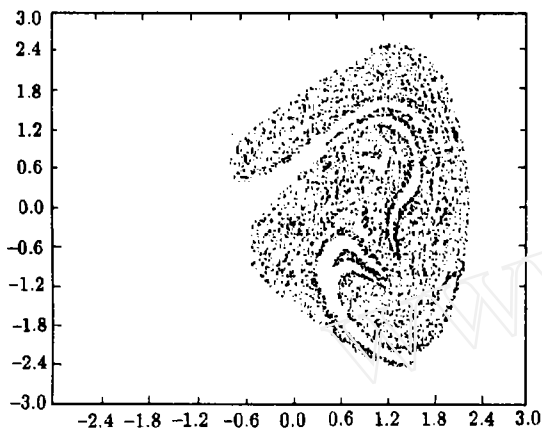


图 2 Duffing-Holmes 振子的混沌解

¹⁾ 法文 fleur 相当英文 flower. 英文 fleur 即 fleur-de-lis, 法国旧皇家军队肩章的百合花图案. [3] 称由 Poincaré 截面所得 fleur 图案为 fleur de Poincaré 可能由此. 鸢 (音 yuan, 老鹰) 尾指蓝蝴蝶, 仅其花朵略似 fleur 图案, 而其叶形状象老鹰尾巴. —— 编者按