

实验结果, 从而证实了方法的有效性. 其次, 由 (13) 式确定开裂条件. (13) 式是由有效应力得到的启裂条件, 不同于一般的最大拉应力准则及修正准则. 由于  $S$  准则确定的启裂角与其它准则比较起来更符合实验结果, 因此将 (7) 式的开裂角引入 (13) 式会大大降低系统误差, 得到有效的结果.

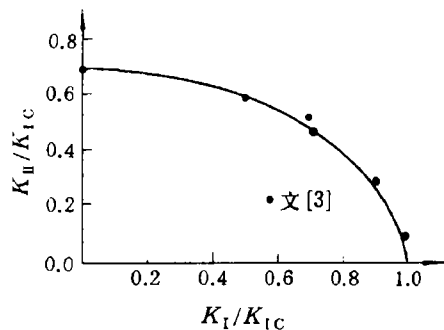


图 1 I-II 复合型裂纹  $K_I$ - $K_{II}$  关系

本文提出了一种从能量和力的角度同时加以考虑的混合开裂准则. 对文 [3] 中实验结果的分析证明了方法的有效性.

图 1 给出了运用本文方法对 I-II 混合型裂纹的分析结果与实验结果 [3]. 从图上可见方法是有效的. 对 II-III, I-III 复合型裂纹也可得到相同的结论.

### 参 考 文 献

- [1] Zhao Yishu. *Eng Fract Mech*, 1991, 40(1)
- [2] 中国科学院力学研究所. *力学*, 1976(1)
- [3] 赵治枢. *固体力学学报*, 1987, 7(1)
- [4] Sih G C et al. *Problems of Mixed-mode Crack Propagation*, E. E. Gdoutos ed, 1984
- [5] Perzyna P. *Int J Solids Structures*, 1986, 24(7)

(本文于 1993 年 3 月 12 日收到)

## 各向异性材料相对周向应力断裂准则

赵廷仕 赵琛

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

**摘要** 本文提出用相对周向应力为参数, 当其达到临界值时, 裂纹开始扩展. 扩展方向由相对周向应力为最大的条件确定.

**关键词** 各向异性材料, 断裂准则, 相对周向应力, 裂纹开裂方向, 弹性主向

材料内部存在的缺陷是各种各样的, 所承受的外载荷也是非常复杂的, 因此, 裂纹均是处于复合型的形式下. 裂纹的扩展往往不沿原来裂纹方向, 而是发生转折或分枝. 研究裂纹的开裂方向与临界状态, 是选择材料、确定设计容许的裂纹尺寸、估算疲劳寿命的理论基础.

### 1. 各向异性材料裂纹尖端应力场

由各向异性材料弹性力学平面问题理论 [1], 得到无限大板裂纹尖端的应力场 [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ ,  $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$ . 裂纹与弹性主向平行时(图1中  $x, y$  轴为弹性主向),  $\mu_1, \mu_2$  为下列方程的复根

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (2)$$

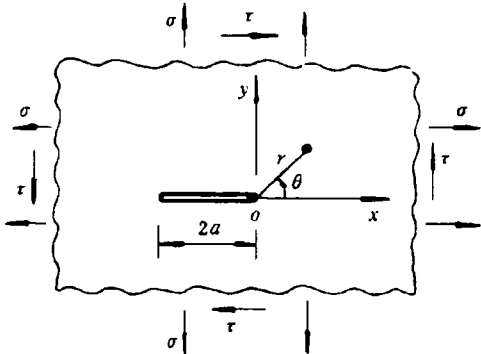


图1

可解得

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \\ \mu_2 \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} i\beta_1 \\ i\beta_2 \end{aligned} \right\} = i \left[ \frac{(2a_{12} + a_{66}) \mp \sqrt{(2a_{12} + a_{66})^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}} \right]^{1/2} \quad (3)$$

其中

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, a_{22} = \frac{1}{E_2}, a_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

将(3)式  $\mu_1 = i\beta_1$  和  $\mu_2 = i\beta_2$  代入(1)式, 经整理后得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2^2 R_2 - \beta_1^2 R_1 \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_1 - \beta_1 Q_2 \right] \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= \sqrt{\frac{\sqrt{\rho_j} + \cos\theta}{2\rho_j}}, \quad R_j = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho_j} - \cos\theta}{2\rho_j}} \\ \rho_j &= \beta_j^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(4)式转换成极坐标  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

## 2. 最大相对周向应力断裂准则

应用相对周向应力作为断裂准则参量. 裂纹开裂方向, 由相对周向应力达到极大值的条件确定. 当最大相对周向应力达到临界状态时, 裂纹开始扩展.

在图1中  $xy$  轴为弹性主面, 沿其方向的拉伸强度极限为  $\sigma_1, \sigma_2$ , 剪切强度极限为  $\tau_{12}$ , 相对周向应力为

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = \frac{\sigma_x}{\sigma_1} \sin^2\theta + \frac{\sigma_y}{\sigma_2} \cos^2\theta - \frac{\tau_{xy}}{\tau_{12}} \sin 2\theta \quad (7)$$

将(4)式代入后得相对周向应力

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F_I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} F_{II}(\theta) \quad (8)$$

其极大值条件为

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\partial F_I(\theta)}{\partial\theta} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\partial F_{II}(\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \right) < 0$$

在(8)式与(9)式中

$$\left. \begin{aligned} F_I(\theta) &= \frac{\sin^2\theta}{\sigma_1} \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \\ &\quad + \frac{\cos^2\theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_1 - \beta_1 Q_2 \right] \\ &\quad - \frac{\sin 2\theta}{\tau_{12}} \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\ F_{II}(\theta) &= \frac{\sin^2\theta}{\sigma_1} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2^2 R_2 - \beta_1^2 R_1 \right] \\ &\quad + \frac{\cos^2\theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\ &\quad - \frac{\sin 2\theta}{\tau_{12}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_I(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\sin 2\theta}{\sigma_1} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \\
&+ \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_1} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \beta_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} \right] \\
&- \frac{\sin 2\theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_1 - \beta_1 Q_2 \right] \\
&+ \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} - \beta_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} \right] \\
&- \frac{2 \cos 2\theta}{\tau_{12}} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\
&- \frac{\sin 2\theta}{\tau_{12}} \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{\partial R_1}{\partial \theta} - \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \right] \\
\frac{\partial F_{II}(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\sin 2\theta}{\sigma_1} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2^2 R_2 - \beta_1^2 R_1 \right] \\
&+ \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_1} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2^2 \frac{\partial R_2}{\partial \theta} - \beta_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial \theta} \right] \\
&- \frac{\sin 2\theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ R_1 - R_2 \right] \\
&+ \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \frac{\partial R_1}{\partial \theta} - \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \right] \\
&- \frac{2 \cos 2\theta}{\tau_{12}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 Q_2 - \beta_1 Q_1 \right] \\
&- \frac{\sin 2\theta}{\tau_{12}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \beta_2 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \beta_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} \right] \\
\frac{\partial Q_j}{\partial \theta} &= \frac{(\beta_j - 1) \sin 2\theta + 2\sqrt{\rho_j} \sin \theta}{4\sqrt{2\rho_j} \sqrt{\sqrt{\rho_j} + \cos \theta}} \\
&- \frac{(\beta_j - 1) \sqrt{\sqrt{\rho_j} + \cos \theta} \sin 2\theta}{(2\rho_j)^{3/2}} \\
\frac{\partial R_j}{\partial \theta} &= \frac{(\beta_j - 1) \sin 2\theta - 2\sqrt{\rho_j} \sin \theta}{4\sqrt{2\rho_j} \sqrt{\sqrt{\rho_j} - \cos \theta}} \\
&- \frac{(\beta_j - 1) \sqrt{\sqrt{\rho_j} - \cos \theta} \sin 2\theta}{(2\rho_j)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{11}$$

纯 I 型裂纹  $K_I \neq 0, K_{II} = 0$ .

由 (9) 式得到相对周向应力为极大值的条件

$$\frac{\partial F_I(\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_I(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

由 (11) 式得到开裂方向角  $\theta_{cr} = 0^\circ$ . 将其代入 (8) 式中得到最大相对周向应力的临界值

$$\left( \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \right)_{cr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F_I(\theta_{cr}) = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{\sigma_2}$$

令  $\sigma_\theta/\sigma_0 = (\sigma_\theta/\sigma_0)_{cr}$  即为最大相对周向应力断裂准则

$$K_I F_I(\theta) + K_{II} F_{II}(\theta) = \frac{K_{IC}}{\sigma_2} \tag{12}$$

### 3. 断裂准则的应用及与实验结果比较

玻璃环氧树脂材料 (Scotchply 1002). 弹性常数  $E_1 = 40\text{GPa}$ ,  $E_2 = 8.3\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 4.1\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.26$ ; 强度极限  $\sigma_1 = 1062\text{MPa}$ ,  $\sigma_2 = 31\text{MPa}$ ,  $\tau_{12} = 72\text{MPa}$ <sup>[3]</sup>.

首先计算  $\beta_1$  和  $\beta_2$ . 再假设  $\theta$  等于不同的角度, 由 (10) 式和 (11) 式计算出对应的  $F_I, F_{II}, \partial F_I/\partial \theta, \partial F_{II}/\partial \theta$  值, 可以画出如图 2 所示的 4 条曲线. 根据已知的  $K_I$  和  $K_{II}$ , 由 (9) 式可确定  $\partial F_I/\partial \theta$  和  $\partial F_{II}/\partial \theta$  的比值, 在图 2 中找到对应此比值的角度  $\theta$  及  $F_I$  和  $F_{II}$ . 或者直接根据已知的  $K_I/K_{II}(K_{II}/K_I)$  值由图 3 查得对应的  $\theta$  角, 即开裂方向角, 再由图 2 找  $F_I, F_{II}$ . 将  $F_I, F_{II}$  代入 (12) 式就得到复合型裂纹的断裂准则.

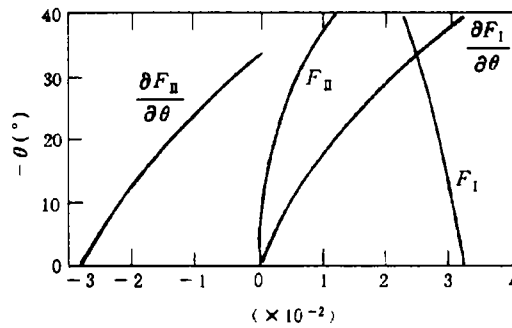


图 2

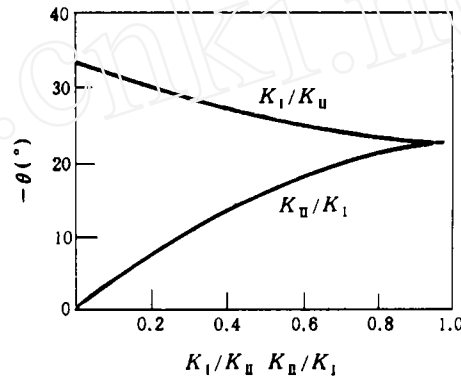


图 3

纯 I 型裂纹  $K_I \neq 0, K_{II} = 0$ . 由 (9) 式得到  $\partial F_I/\partial \theta = 0$ , 由图 2 查得开裂方向角  $\theta_{cr} = 0^\circ$ , 对应的  $F_I = 0.0322$ . 由 (12) 式得

$$0.0322 K_I = \frac{K_{IC}}{\sigma_2}, \quad \frac{K_I}{K_{IC}} = 1$$

纯 II 型裂纹  $K_I = 0, K_{II} \neq 0$ , 则  $\partial F_{II}/\partial \theta = 0$ . 由图 2 或图 3 查得开裂方向角  $\theta_{cr} = -33^\circ$ , 对应

的  $F_{II} = 0.007$ , 由 (12) 式得

$$0.007K_{II} = \frac{K_{IC}}{\sigma_2} = \frac{1}{31}K_{IC} = 0.0322K_{IC}$$

$$K_{II}/K_{IC} = 4.6$$

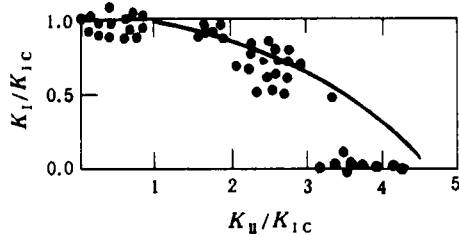


图 4

图 4 曲线为按本文的最大相对周向应力断裂准则计算的曲线, 点为实验值<sup>[4]</sup>, 除  $K_{IIC}/K_{IC}$  偏大外, 其余均符合较好.

#### 4. 结论

1) 最大相对周向应力断裂准则, 比较全面地考虑到各向异性材料的特性.

2) 本准则能较为合理地确定裂纹开裂的方向.

3) 按本文断裂准则计算的结果, 基本与实验结果相符合. 除  $K_{IIC}/K_{IC}$  偏大 13% 外, 其余均符合较好.

#### 参 考 文 献

- [1] C Г 列赫尼茨基, 胡海昌译. 各向异性板, 科学出版社, 1955: 14-36
  - [2] Liebowitz H. Fracture. Academic Press, New York: 1968, 2: 108-131
  - [3] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学, 机械出版社, 1991: 169
  - [4] 赵渠森. 复合材料. 国防工业出版社, 1979: 197
- (本文于 1993 年 6 月 2 日收到)

## 弹性杆热膨胀屈曲特性分析

陈建康

(江苏农学院, 扬州 225001)

王汝鹏

(上海城建学院, 上海 200232)

**摘要** 本文建立并求解了弹性杆非线性屈曲的基本方程, 揭示了热屈曲问题的内力与变温之间的单调降关系和热屈曲挠度的非突发性, 指出了线性解和非线性解的差异性, 并对如何准确定义临界变温作出了建议.

**关键词** 弹性杆, 热屈曲, 临界变温

近年来在刚性路面热胀屈曲的研究<sup>[1-4]</sup>中作者发现热应力屈曲有其独特现象, 这些现象用线性理论很难解释, 因而有必要从非线性理论出发研究热弹性稳定性. 作者曾指出, 可以把研究路面热胀屈曲转化为研究板条的热胀屈曲(光载波实验证明路面板屈曲波形为柱面波<sup>[1]</sup>, 用摄动理论分析, 把板化为板条, 在数学上的误差仅为泊松比的二次方量级<sup>[4]</sup>), 只有研究弹性板条(或弹性杆)在温度场作用下屈曲的全过程, 才能深入了解路面板热胀屈曲的力学机制. 为此, 本文作了这方面研究.

#### 1. 基本方程

弹性杆在均匀温度场作用下屈曲(图 1)的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \theta \\ \frac{dx}{ds} &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

平衡方程

$$M = -Ny \quad (2)$$

物理方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{EI} \\ N &= \alpha \Delta T EA - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $\alpha$  为线胀系数,  $E$  为弹性模量,  $A$  为横截面积,  $\Delta T$  为变温.