

正交异性介质中的 Snell 定理

王 彪

(华东冶金学院, 马鞍山 243002)

摘要 本文从 Huygens 原理出发, 用求包络的方法推导出平面波在正交异性介质中折射、反射的 Snell 定理.

关键词 Snell 定理, Huygens 原理, 包络, 正交异性介质, 平面波

1 引言

对各向异性介质, 弹性波的波阵面为非球面的曲面, 有关波的传播问题非常复杂. 当传播地点距扰动源足够远时, 波阵面上的一部分已近似地看成平面, 即曲面波退化为平面波, 这使得问题的复杂性大为简化, 并且完全可满足精度上的要求.

平面波在各向同性介质中的折射、反射 Snell 定理早有定论, 本文拟从 Huygens 原理出发, 用求包络的方法导出正交异性介质中的 Snell 定理.

2 正交异性介质中的弹性波

对固体中的弹性波, 我们有^[1]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{lm} &= \frac{1}{2} [u_{l,m} + u_{m,l}] \\ \rho \ddot{u}_i &= \sigma_{ij,j} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设平面简谐波

$$u_i = a \alpha_i \exp[i(p_i x_i - \omega t)] \quad (2)$$

式中, a 为位移振幅, α_i 为粒子位移的方向余弦, p_i 为波矢量的分量. 代入 (1) 式得

$$(\rho \omega^2 \delta_{im} - C_{ijkl} p_j p_l) u_m = 0 \quad (3)$$

设相速 $v = \omega/p$, 波面法线的方向余弦为 n_i 有

$$|\lambda_{im} - \rho v^2 \delta_{im}| = 0 \quad (4)$$

式中, $\lambda_{im} = C_{ijkl} n_j n_l$.

对正交异性介质

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{55} n_3^2 \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = C_{12} n_1 n_2 \\ \lambda_{22} &= C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 + C_{44} n_3^2 \\ \lambda_{13} &= \lambda_{31} = C_{13} n_3 n_1 \\ \lambda_{33} &= C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 + C_{33} n_3^2 \\ \lambda_{23} &= \lambda_{32} = C_{23} n_2 n_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (4) 是一个关于 v^2 的三阶方程, 其 3 个根对应 3 种波速, 由式 (3) 可知每一个根对应的位移矢量是相互正交的.

由 Huygens 原理^[2], 波阵面的求解转化为下面包络的求解

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= n_1 x + n_2 y + n_3 z - v \cdot t = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 $n_1 = \cos \theta \cdot \cos \beta$, $n_2 = \cos \theta \cdot \sin \beta$, $n_3 = \sin \theta$, 显然 v 为 θ 和 β 的函数, $v = v(\theta, \beta)$

对材料主轴与坐标主轴相重合的正交异性介质, 存在着类似于各向同性介质中的纵波和横波, 其对应的波速为

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 轴向的纵波} & \quad v = \sqrt{C_{11}/\rho} \\ y \text{ 轴向的纵波} & \quad v = \sqrt{C_{22}/\rho} \\ z \text{ 轴向的纵波} & \quad v = \sqrt{C_{33}/\rho} \\ oyz \text{ 平面的横波} & \quad v = \sqrt{\frac{(C_{66} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta)}{\rho}} \\ ozx \text{ 平面的横波} & \quad v = \sqrt{\frac{(C_{66} \cos^2 \theta + C_{44} \sin^2 \theta)}{\rho}} \\ oxy \text{ 平面的横波} & \quad v = \sqrt{\frac{(C_{55} \cos^2 \beta + C_{44} \sin^2 \beta)}{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

并由 (6) 式可知平面 SH 波的波阵面为椭圆.

3 平面波折射、反射的 Snell 定理

当平面波传播时, 设其传播方向为 N , n_i 为其方向余弦, 对应的波速为 v , 令

$$\phi = n_1 x + n_2 y + n_3 z - v \cdot t \quad (8)$$

则平面波仅是变量 ϕ 的函数.

设边界是水平的, 入射平面为 oxz 平面, θ 为入射角, 根据界面条件可知: (1) 折射、反射波同在入射平面内. (2) SH 波不会是转换波.

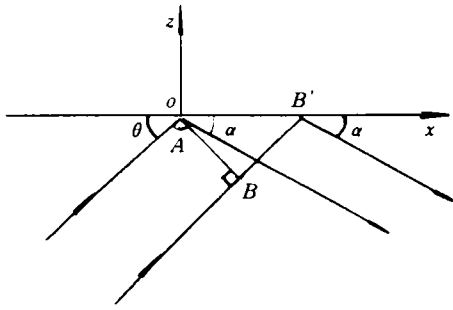


图 1 平面波的反射

首先考虑入射波为 SH 波的特殊情况, 在 $t = 0$ 时刻, 平面波 AB 传播到边界上 O 点, O 点开始扰动, 由此产生的二次扰动的 SH 元波阵面由 (6) 式可得

$$x^2/C_{66} + z^2/C_{44} = t^2/\rho \quad (9)$$

在 Δt 时刻, 波阵面上 B 点传播至 B' 点, 由此产生的二次扰动 SH 元波阵面为

$$(x - v \cdot \Delta t / \cos \theta)^2 / C_{66} + z^2 / C_{44} = (t - \Delta t)^2 / \rho \quad (10)$$

由 Huygens 原理, 新的波阵面为这些二次扰动的包络, 对椭圆来说, 其包络为公切线. 设切点分别为 $(x_1, z_1), (x_2, z_2)$, 公切线方程为

$$x_1 x / C_{66} + z_1 z / C_{44} = t^2 / \rho$$

或

$$(x_2 - v \cdot \Delta t / \cos \theta) \cdot (x - v \cdot \Delta t / \cos \theta) / C_{66} + z_2 z / C_{44} = (t - \Delta t)^2 / \rho \quad (11)$$

公切线斜率为

$$K = (z_2 - z_1) / (x_2 - x_1) \quad (12)$$

消去 x_1, z_1, x_2, z_2 得

$$K^2(v^2 / \cos^2 \theta - C_{66}) = C_{44} \quad (13)$$

设反射角为 α , 由于波是沿公切线的垂直方向传播, 故有 $\tan \alpha = 1/K$, 则由 (6) 式可得

$$\cos^2 \alpha v^2(\theta) / \cos^2 \theta = C_{66} \cos^2 \alpha + C_{44} \sin^2 \alpha = v^2(\alpha) \quad (14)$$

即

$$v(\theta) / \cos \theta = v(\alpha) / \cos \alpha \quad (15)$$

考虑到一般波入射的情况, 在 $t = 0$ 时刻, O 点产生的二次扰动元波阵面方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= t \cdot \left(v(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ z &= t \cdot \left(v(\alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在 Δt 时刻 B' 点的二次扰动元波阵面方程为

$$\left. \begin{aligned} (x - v(\theta) \cdot \Delta t / \cos \theta) \\ &= (t - \Delta t) \cdot \left(v(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ z &= (t - \Delta t) \cdot \left(v(\alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其包络为以 Δt 为族参数的下列方程的解

$$\left. \begin{aligned} x &= (t - \Delta t) \cdot \left(v(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad + v(\theta) \cdot \Delta t / \cos \theta \\ z &= (t - \Delta t) \cdot \left(v(\alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial(\Delta t)} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial(\Delta t)} \end{array} \right| = 0$$

展开上面的行列式即得

$$v(\alpha) / \cos \alpha - v(\theta) / \cos \theta = 0 \quad (19)$$

式中 $v(\alpha), v(\theta)$ 可相应地由 (6) 式或 (7) 式给出.

由此证明了在一般波入射的情况下, 反射波满足 Snell 定理, 同样对折射波也可仿此推导出同样的结果.

参 考 文 献

- 1 郭自强. 固体中的波. 北京: 地震出版社, 1982: 92-94
- 2 张三慧, 史田兰. 光学、近代物理. 北京: 科技出版社, 1987: 68

(1993 年 7 月 18 日收到第 1 稿,
1993 年 12 月 24 日收到修改稿)

锚杆防治软岩巷道底臃的分析

钟新谷

(湘潭矿业学院资源工程系, 湘潭 411201)

摘要 利用理想刚塑性理论分析了松软围岩巷道产生底臃机理, 在实践基础上提出了沿巷道墙基打角锚杆对防止软岩巷道底臃有明显作用. 并推算了锚杆支护参数的计算方法. 这对于简化软岩巷道施工工艺, 降低巷道支护成本有一定的指导意义.

关键词 理想刚塑性, 巷道底臃, 锚杆, 软岩

1 软岩巷道底臃机理分析

松软围岩巷道底臃是在矿山生产与建设中经常碰到的问题, 而且是必须解决的问题. 本文着重分析巷道底板在不封底情况下用锚杆支护控制底臃的可能性和施工方法.

导致巷道底臃的原因有许多^[1], 对于松软围岩产生底臃的主要原因之一是巷道在地压作用下产生了弹塑性变形. 为了便于分析, 特作如下简化:

- 略去巷道侧帮松动围岩与底板在水平方向上的摩擦力;
- 巷道侧帮松动范围内围岩给底板的压力按围岩松动高度所产生的压力来考虑;
- 略去底板围岩的自重. 巷道围岩按均质库仑-莫尔材料考虑.

1.1 巷道底板滑移线场^[2]

巷道断面形状为中小型煤矿最常用的直墙半圆拱断面(图1). 巷道开挖后在松动围岩作用下首先从A、B两点开始进入塑性极限状态, 然后至整个底板围岩进入塑性极限状态. AB为自由面, 又是直线, 因此, ABC区为均匀应力区; 且滑移线 α, β 均为直线. 在AB线上的边界条件为: $\sigma_n = 0, \tau_n = 0$. 由图2可以得到ABC区内的应力状态

$$\bar{P}_1 = \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \theta_1 = 0$$

θ_1 为主应力与 x 轴的夹角. 从图2可知 α 线、 β 线与 x 轴夹角分别为 $\pi/4 - \varphi/2, -(\pi/4 - \varphi/2)$.

对于BCF区, 根据Hencky第一定理, 区内 α 线均为直线. 由简化条件, BCF区内刚塑性分

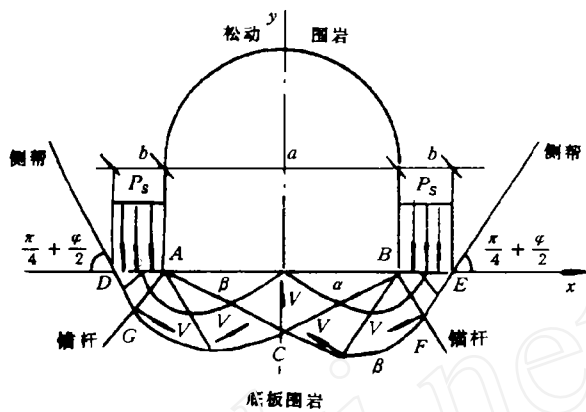


图1 底板滑移线与速度场

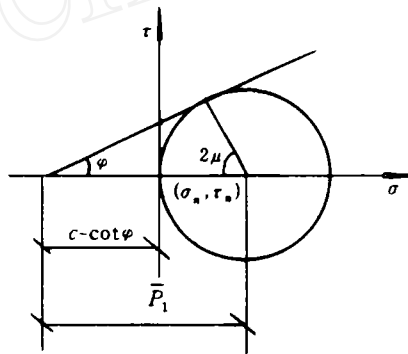


图2 莫尔-库仑条件

界线只能与E相交, BCF区内应力分布属退化的Riemann问题. 沿CF线有

$$\ln \bar{P} + 2\theta \cdot \cot 2\mu = \ln \bar{P}_1 \quad (1)$$

θ 为主应力与 x 轴夹角. 根据ABC区内应力状态, 由(1)式得BCF区应力状态

$$\bar{P} = \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(-2\theta \cdot \cot 2\mu) \quad (2)$$

在BEF区内, 由图3可知 α 线和 β 线与 x 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, -(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$. 根据简化条件, BEF区必定是均匀应力区. 其应力状态为BCF区内的F点应力状态. 在F点 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, 则BEF区

内应力状态为

$$\bar{P}_F = \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \cdot \cot 2\mu) \quad (3)$$

在 ACG 、 ADG 区同理可构造滑移线场和计算其应力状态。滑移线场如图 1 所示。

1.2 底板围岩极限载荷

由图 3 及各区的应力状态, 可得出保持底板围岩不发生明显底臃的极限承载力 q 为

$$q = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot c \cdot \cot \varphi [\exp(\pi \cdot \cot 2\mu) - 1] \quad (4)$$

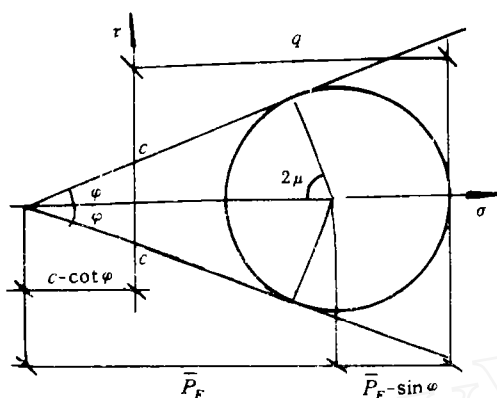


图 3 q 与莫尔·库仑条件

1.3 巷道底板围岩滑移线速度场

设底板围岩服从关联流动规则, 根据速度场性质可知: 在 ABC 区内 V_α, V_β 均为常数, DGC 、 EFC 是刚塑线分界线, 也一定是速度间断线。在刚性区一侧速度为零。那么从刚性区至塑性区, 其速度改变则方面必定与 EFC 、 DGC 线成 φ 角。同时可推断一定垂直于 EFC 区内的 α 线, DGC 内的 β 线。在整个 $BEFC$ 内, $V_\alpha = 0$, 在整个 $ADGC$ 区内, $V_\beta = 0$ 。

根据上述分析, 在 BEF 区内的速度 V 方向垂直于 BF 。 $V_\alpha = 0, V_\beta = \cos \varphi \cdot V$ 。在 BFC 区内, 速度场必须满足下列方程

$$dV_\alpha + (V_\alpha \cdot \cot 2\mu + V_\beta \cdot \csc 2\mu) d\psi = 0 \quad (5)$$

$$dV_\beta + (V_\alpha \cdot \csc 2\mu - V_\beta \cdot \cot 2\mu) d\psi = 0 \quad (6)$$

式中 $\psi = \theta - \mu$ 。在 BFC 区内, $V_\alpha = 0$ 。代入 (6) 式求解

$$V_\beta = A \cdot \exp(\psi \cdot \cot 2\mu) \quad (7)$$

在 BFC 区内, BF 线上 $V_\beta = \cos \varphi \cdot V, \psi = -\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}$ 。

代入 (7) 式

$$A = \frac{V \cdot \cos \beta}{\exp\left[\left(-\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \cot 2\mu\right]}$$

在 BFC 区内, BC 线 $\psi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}$ 。结合 (7) 式及 A 的表达式求得 BC 线 (BFC 区一侧) 的 V_β ; 同理求得 AC 线 (AGC 区一侧) V_α 。

$$V_\beta = V_\alpha = V \cdot \cos \varphi \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cot 2\mu\right) \quad (8)$$

方向如图 1 所示。很明显, BC 、 AC 是速度间断线。在 ABC 区内, $V_\alpha = V_\beta$, 又已知 C 点的 V_α 、 V_β , 那么 ABC 区内的速度表达式正好是 (8) 式的表达式。方向垂直 AB 线, 向上移动 (图 1)。

由以上分析可知: 在 BEF 、 ADG 区与 x 轴分别成 $-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 的方向作整体移动 (速度为 V)。 BFC 、 AGC 区分别绕 B 、 A 两点与径向正交作整体运动。 ABC 区侧垂直向上移动。这样就得到了极限载荷作用下巷道底板速度场。

2 锚杆控制巷道底臃的分析

2.1 锚杆布置方式分析

在软岩巷道现场施工设计中, 一般的设计为在巷道底板上打锚杆, 并采用扇形布置方式。从操作上讲, 在底板上打锚杆会使生产单位有一种担心: 如果底板锚杆失稳; 底板中部锚杆随底板向上移动, 则在清底时非常难处理。所以, 这种设计在煤矿松软围岩巷道很难推广。寻求一种既不封底, 也不在中部布置锚杆的锚杆布置方式控制底臃正是要解决的问题。

如果锚杆布置在 BF 、 AG 位置, 由于围岩移动方向垂直于 BF 、 AG 。那么底板围岩失稳在 BF 、 AG 位置的锚杆只能绕 B 、 A 两点转动而不会向巷道空间移动而造成不便。同时由于围岩有垂直于 BF 、 AG 的移动趋势, 必然压缩锚杆, 那么锚杆必产生类似于抗滑桩的反力作用于围岩。如果锚杆密度选择合适, 则完全可能解决前面所提到的问题。

2.2 BF 、 AG 位置的锚杆对底板围岩的作用分析

当围岩对底板的作用力 P_s 大于底板极限承载力 q 时, 底板必产生塑性流动。但锚杆与围岩的变形刚度不一样, 锚杆必然产生类似于抗滑桩作用的绕流阻力 (但锚杆一定要超过 BF 、 AG 的长度; 而端部一定应在刚性区) 以阻止围岩变形。当不施工反拱也不在 ABC 区内打锚杆时, 大于底板极限