

非线性弹性杆件的位移

胡国华
(重庆大学力学系, 重庆 630044)

1 前言

由于新材料不断增多, 尤其是高分子材料和复合材料增多, 应力 - 应变呈非线性弹性关系的材料也不断增加, 由这些材料制成的杆件的位移计算问题将更多地出现. 计算线性弹性梁的位移的方法目前已有近 20 种, 但计算非线性弹性杆件位移的方法目前只有虚功法、克罗第 - 恩格塞法以及由这两种方法导出的单位载荷法^[1]. 前两种方法在计算虚功或余能时比较麻烦, 而单位载荷法在计算多点位移或位移方程式时稍有不便, 因此, 发展新的方法很有必要.

本文利用面积向量法^[2,3]在小变形条件下推导出计算材料非线性弹性梁、刚架及小曲率曲杆的位移的公式, 利用这些公式, 可以比较简便地解决上述问题.

2 非线性弹性梁的位移

图 1(a) 示矩形截面悬臂梁, 横截面高度为 h , 宽度为 b , 其材料的应力 - 应变关系用方程式 $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$ 表示, 式中 B 为常数. 对于拉伸和压缩此方程式均适用 (压缩时应力 σ 及应变 ε 都用绝对值), 试求自由端 B 的转角和挠度.

由面积向量法^[2], 计算梁任意截面 (坐标为 x) 的转角和挠度的公式为

$$\theta = \theta_0 + \int_0^x \frac{M(x_1)}{EI} dx_1 \quad (1)$$

$$y = f_0 + \theta_0 \cdot x + \int_0^x \frac{M(x_1)(x - x_1)}{EI} dx_1 \quad (2)$$

式中, θ_0 及 f_0 为坐标原点处的截面转角及挠度, $M(x_1)$ 为坐标为 x_1 的截面的弯矩. 此处与截面剪力相对应的转角和挠度没有考虑.

因为线性弹性梁的曲率 K 可写为

$$K = M(x_1)/EI \quad (3)$$

故 (1) 及 (2) 式可写为

$$\theta = \theta_0 + \int_0^x K dx_1 \quad (4)$$

$$y = f_0 + \theta_0 \cdot x + \int_0^x K(x - x_1) dx_1 \quad (5)$$

对于 (4) 式及 (5) 式, 若曲率 K 不按 (3) 式计算而按非线性弹性梁的公式计算, 则可将它们用于非线性弹性梁的位移计算. 令

$$\omega_k = \int_0^x K dx_1 \quad (6)$$

$$\omega_k \bar{x} = \int_0^x K dx_1 (x - x_1) \quad (7)$$

那么 ω_k 代表坐标原点处至 x 截面间曲率图的面积, 而 \bar{x} 代表此曲率图面积的形心至 x 截面的距离. 使用 ω_k 及 \bar{x} , (4) 及 (5) 式可写为

$$\theta = \theta_0 + \omega_k \quad (8)$$

$$y = f_0 + \theta_0 x + \omega_k \bar{x} \quad (9)$$

按平面假设, 梁的应变与曲率的关系为

$$\varepsilon = -Ky \quad (10)$$

对于图 1(a) 所示梁, 其应力与曲率的关系为

$$\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|} = B\sqrt{Ky} \quad (a)$$

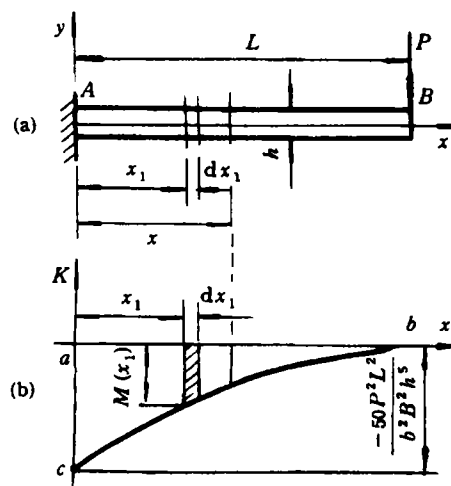


图 1

因为其截面的弯矩 $M(x_1)$ 的绝对值为

$$|M(x_1)| = P(L - x_1) = 2 \int_0^{h/2} y\sigma bdy$$

将 (a) 式代入上式积分后得曲率 K 的绝对值

$$|K| = \frac{50M^2(x_1)}{b^2B^2h^5} = \frac{50P^2(L - x_1)^2}{b^2B^2h^5} \quad (b)$$

对于图 1(a) 所示梁, 在固定端处其轴线的曲率为

$$K_A = \frac{-50P^2L^2}{b^2B^2h^5}$$

注意到此梁坐标原点处 $\theta_0 = 0$ 及 $f_0 = 0$, 并将 (b) 式代入 (4) 式积分, 再令 $x = L$, 得该梁 B 截面的转角

$$\theta_B = \frac{50P^2L^3}{3b^2B^2h^5}$$

将 (b) 式代入 (5) 式, 相似地可得 B 截面的挠度

$$y_B = \frac{25P^2L^4}{2b^2B^2h^5}$$

由于 (a) 式中应力及应变取绝对值计算, 故得出 (b) 式的曲率 $|K|$ 为正. 实际上本例题 K 应为负, 若将此负值代入 (4) 及 (5) 式, 所得的 θ_B 及 y_B 为负, 这样, 就与通用的符号规则相符了.

对于本例题, 由于梁的曲率图是二次抛物线, 其面积和形心坐标比较容易计算, 所以 B 截面的转角及挠度可按 (8) 及 (9) 式计算, 即是 B 截面的转角等于图 1(b) 中的面积 acb , 而 B 截面的挠度等于面积 acb 对 b 点取矩. 这样计算显得非常方便.

3 非线性弹性刚架的位移

按照文献 [2], 线性弹性平面刚架的位移计算公式为

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega}{EI} \quad (11)$$

$$y_2 = f_{0\alpha} + \theta_0 \cdot r_0 + \frac{\omega \cdot \bar{r}}{EI} \quad (12)$$

式中, θ_0 为坐标原点处截面的转角, $f_{0\alpha}$ 为坐标原点处截面的形心在 α 方向的线位移. θ 为任意截面的转角, y_α 为任意截面的形心在 α 方位的线位移. ω 为坐标原点至欲求位移的截面之间的弯矩图的面积, r_0 为坐标原点至通过欲求位移的截面形心的 α 方向的直线之间的距离, \bar{r} 为面积 ω 的向量与上述直线之间的距离. 计算中的符号规则, 在文献 [2] 中已有规定.

若用曲率图面积 ω_k 代替 (11) 及 (12) 式中的 ω/EI , 则可得计算非线性弹性平面刚架位移的公式

为

$$\theta = \theta_0 + \omega_k \quad (13)$$

$$y_\alpha = f_{0\alpha} + \theta_0 \cdot r_0 + \omega_k \cdot \bar{r} \quad (14)$$

式中的 ω_k 可按公式 (6) 计算. 必要时也可用下式计算 $\omega_k \cdot \bar{r}$, 即

$$\omega_k \cdot \bar{r} = \int_0^x K dx_1 \cdot \bar{r} = \int_0^x d\omega_k \cdot \bar{r} \quad (15)$$

上式中 \bar{r} 为微分向量 $d\omega_k$ 与上述直线之间的距离. 积分限 $0 \rightarrow x$ 表示积分在坐标原点与欲求位移的截面之间进行.

下面举例说明公式 (13) 及 (14) 的应用.

图 2(a) 示等截面刚架, 各杆横截面为圆形, 直径为 d , 材料的应力 - 应变关系为 $\sigma = B\sqrt{\epsilon}$, B 为常数. 求 B 截面的转角及水平位移. 现求解于下.

AC 段的弯矩方程: $M(x_1) = qx_1 \left(L - \frac{x_1}{2} \right)$

BC 段的弯矩方程: $M(x_2) = \frac{qL}{2}x_2$

下面推导 BC 段的曲率 K_2 的方程式. 对任一截面, 其弯矩与应力之间的关系为

$$M(x_2) = 2 \int_0^{d/2} y\sigma b(y)dy \quad (c)$$

上式中 $b(y)$ 为在坐标 y 处, 圆截面的宽度 (图 3). 显然

$$b(y) = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}$$

仿照 (a) 式, 有

$$\sigma = B\sqrt{\epsilon} = B\sqrt{K_2 \cdot y}$$

将以上二式代入 (c) 式, 得

$$M(x_2) = 4B\sqrt{K_2} \int_0^{d/2} y^{3/2} \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - y^2} dy$$

采用积分的近似值, 得

$$K_2 = \frac{87M^2(x_2)}{B^2d^7} = \frac{87q^2L^2x_2^2}{4B^2d^7} \quad (d)$$

同理可得 AC 段的曲率方程式为

$$K_1 = \frac{87q^2x_1^2 \left(L - \frac{x_1}{2} \right)^2}{B^2d^7} \quad (e)$$

按 (d) 式及 (e) 式绘出此刚架的曲率图如图 2(b).

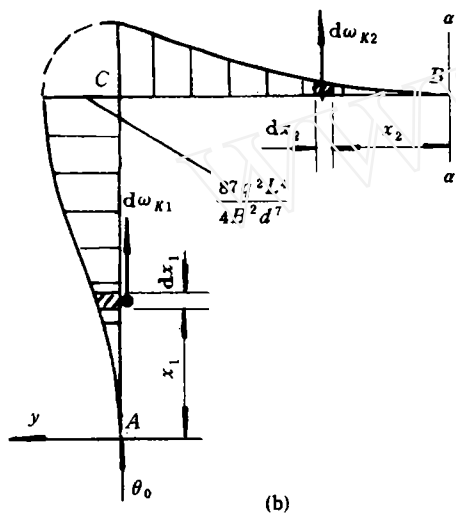
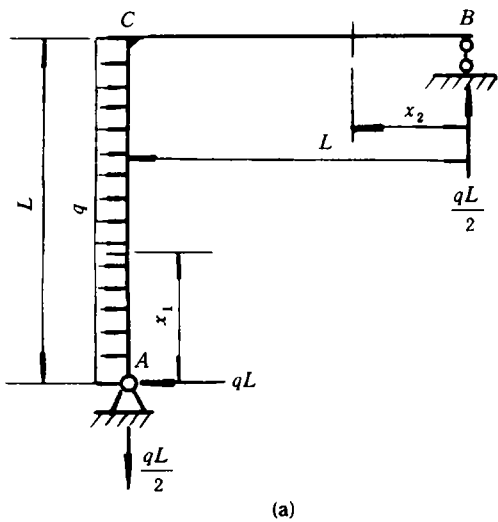


图 2

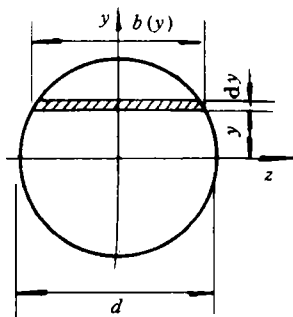


图 3

计算刚架变形时, 此处选 A 点为坐标原点, 故应用 (14) 式时 $f_{0\alpha} = 0$. 为了计算 A 截面的转角 θ_0 , 需应用 B 截面的铅垂位移为零的条件. 应用

(14) 式计算 B 截面的铅垂位移, 即是用图 2(b) 中的曲率图各微分面积向量 $d\omega_k$ 及 θ_0 的向量对 B 点取矩 (各向量皆旋转至 $\alpha\alpha$ 方向, 因此 $r_0 = L$), 而此矩的总和应为零, 即

$$y_2 = 0 + \theta_0 \cdot L + \int_0^L d\omega_{k1} \cdot L + \int_0^L d\omega_{k2} \cdot x_2 = 0$$

即

$$\theta_0 \cdot L + \int_0^L K_1 dx_1 \cdot L + \int_0^L K_2 dx_2 \cdot x_2 = 0$$

将 K_1 及 K_2 代入上式积分后解出

$$\theta_0 = -\frac{1363q^2L^5}{80B^2d^7} = -17.04 \frac{q^2L^5}{B^2d^7}$$

计算 B 点水平位移 f_B 时, 应将 $\theta_0, d\omega_{k1}$ 及 $d\omega_{k2}$ 向量的方向还原或旋转至水平方向, 由于 AC 杆及 CB 杆的曲率均为正, 故 $d\omega_{k1}$ 与 $d\omega_{k2}$ 的方向与 y 轴同向, θ_0 为负, 故与 y 轴反向. 将这些向量对 B 点取矩再总和起来, 得

$$f_B = \theta_0 \cdot L + \int_0^L d\omega_{k1}(L-x_1) = -\frac{1363q^2L^5}{80B^2d^7} \times L + \int_0^L K_1 dx_1(L-x_1) = -\frac{1073q^2L^6}{80B^2d^7}$$

f_B 为负, 表示 B 点的位移沿 y 轴负方向.

按 (13) 式及 (6) 式, B 截面的转角

$$\theta_B = \theta_0 + \omega_k = \theta_0 + \int_0^L d\omega_{k1} + \int_0^L d\omega_{k2}$$

即

$$\theta_B = \theta_0 + \int_0^L K_1 dx_1 + \int_0^L K_2 dx_2$$

将 θ_0, K_1 及 K_2 代入上式积分后得

$$\theta_B = \frac{29q^2L^5}{16B^2d^7}$$

θ_B 为正, 表示 B 截面的转角是逆钟向的.

4 非线性弹性曲杆的位移

这里只考虑小曲率平面曲杆与弯矩对应的位移, 即是略去与轴力及剪力对应的位移.

由于曲杆可视为段数为无穷多的折轴刚架, 因此, 计算刚架位移的公式 (13) 及 (14) 可用于计算曲杆的位移. 因为曲杆的曲率增量方程式一般都比

较复杂, 故计算 ω_k 及 $\omega_k \cdot \bar{r}$ 都要进行积分, 所以将公式 (13) 及 (14) 改写后得到计算曲杆位移的公式

$$\theta = \theta_0 + \int_s d\omega_k$$

$$y_\alpha = f_{0\alpha} + \theta_0 \cdot r_0 + \int_s d\omega_k \cdot \bar{r}$$

或者

$$\theta = \theta_0 + \int_s K ds \quad (16)$$

$$y_\alpha = f_{0\alpha} + \theta_0 \cdot r_0 + \int_s r K ds \quad (17)$$

式中, K 为曲率增量方程式, ds 为微分段弧长, \bar{r} 是微分向量 $d\omega_k (= K ds)$ 与欲求位移处的方向线 (二者是平行的) 之间的距离. 积分号下的 s 代表积分从坐标原点至欲求位移的截面形心沿着杆的轴线进行. 其余符号的意义与刚架的相同.

下面举例说明公式 (16) 及 (17) 的应用.

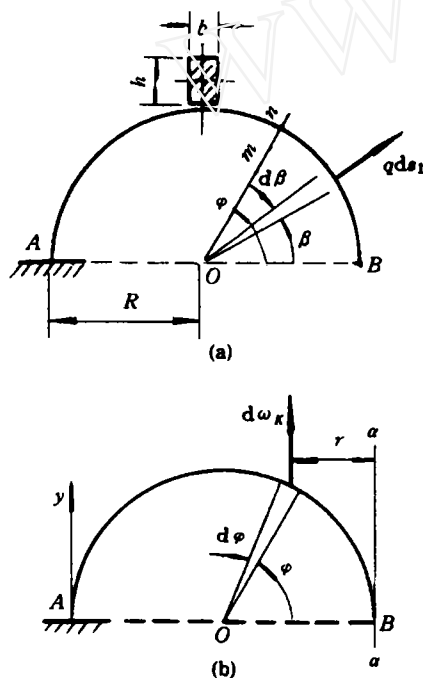


图 4

图 4(a) 示一半圆环. 平均半径为 R , 横截面为矩形, 宽度为 b , 高度为 h , 其材料的应力 - 应变关系为 $\sigma = B\sqrt{\varepsilon}$ (B 为常数), 此式对于拉伸和压缩都

相同. 整个半圆环受到径向均匀分布力 q 作用, 求 B 点的铅垂位移.

设 mn 截面的弯矩为 $M(\varphi)$, 由前面的 (b) 式可得在 mn 截面处杆轴的曲率增量为

$$K = \frac{50M^2(\varphi)}{b^2 B^2 h^5}$$

按图 4(b), mn 截面的弯矩为

$$M(\varphi) = \int_0^\varphi [R \sin(\varphi - \beta)] q ds_1$$

$$= qR^2 \int_0^\varphi \sin(\varphi - \beta) d\beta = qR^2(1 - \cos \varphi)$$

故

$$K = \frac{50q^2 R^4 (1 - \cos \varphi)^2}{b^2 B^2 h^5}$$

为了计算 B 点沿 α - α 方向的位移, 将微分段 ds 的曲率图微分面积 $d\omega_k$ 指向 α - α 方向, 然后对 B 点取矩最后积分起来, 也就是按 (17) 式计算位移. 计算时取 A 点为坐标原点, 其 $f_{0\alpha} = 0, \theta_0 = 0$, 故得

$$y_B = \int_s r K ds$$

由图 4(b) 可得 $r = R(1 - \cos \varphi), ds = R d\varphi$, 所以

$$y_B = \frac{50q^2 R^6}{b^2 B^2 h^5} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{125\pi q^2 R^6}{b^2 B^2 h^5}$$

若上述曲杆的材料为线性弹性的, 曲率增量与弯矩的关系为 $K = M/EI$, EI 为截面的抗弯刚度. 则计算位移时图 4(b) 中的 $d\omega_k$ 可用弯矩图的微分面积 $d\omega = M(\varphi) ds$ 代替, 而位移 y_B 的计算公式为

$$y_B = \int_s \frac{d\omega \cdot \bar{r}}{EI} = \int_s \frac{r M(\varphi) ds}{EI}$$

$$= \frac{qR^4}{EI} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi q R^4}{2EI}$$

参 考 文 献

- 1 铁木辛柯 S, 盖尔 J 著. 韩跃新译. 材料力学. 科学出版社, 1990
- 2 胡国华. 面积向量法计算梁及刚架的位移. 重庆大学学报, 1990(5)
- 3 胡国华主编. 材料力学. 重庆大学出版社, 1991

(本文于 1993 年 1 月 1 日收到)