

(3) 当 $U_m^2 - 4V_m < 0$ 时

$$\left. \begin{aligned} X_m &= A_m \cos(\epsilon x) \operatorname{ch}(fx) + B_m \sin(\epsilon x) \operatorname{sh}(fx) + \frac{4q}{m\pi DV_m} \\ A_m &= -\frac{f \sin\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{fa}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{fa}{2}\right)}{f \sin\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \cos\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) + \operatorname{esh}\left(\frac{fa}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{fa}{2}\right)} \times \frac{4q}{m\pi DV_m} \\ B_m &= \frac{f \cos\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{fa}{2}\right) - e \sin\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{fa}{2}\right)}{f \sin\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) \cos\left(\frac{\epsilon a}{2}\right) + \operatorname{esh}\left(\frac{fa}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{fa}{2}\right)} \times \frac{4q}{m\pi DV_m} \\ s &= \frac{U_m}{2}, t = \frac{\sqrt{4V_m - U_m^2}}{2}, \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{t}{s}, f = \sqrt[4]{s^2 + t^2} \cos \frac{\theta}{2}, e = \sqrt[4]{s^2 + t^2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将以上各种条件下 X_m 代入式 (4) 即可得平板单元位移 $w(x, y)$. 应指出, 从形式上看式 (4) 为无穷级数, 但计算表明, 当 $V_m \neq 0$ 时级数收敛很快. 若 $w(x, y)$ 不正常增大, 则是系数 A_m 和 B_m 分母接近为零. 这是平板失稳的另一条件.

4 平板的应力计算

变压器耐压试验一般是控制其塑性变形, 在求得平板单元变形 $w(x, y)$ 后, 尚须计算强度. 按薄板理论, 各点相应于 $w(x, y)$ 的最大应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= -\frac{6D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{y1} &= -\frac{6D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy1} &= -\frac{6D}{h^2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

箱壁各点除有按式 (19) 求的应力外, 尚有与平面内力 N_x 和 N_y 对应的拉(压)应力

$$\sigma_{x2} = \frac{N_x}{h} \quad \sigma_{y2} = \frac{N_y}{h} \quad (20)$$

而最大应力(接应力或压应力)为

$$\sigma_x = |\sigma_{x1}| + |\sigma_{x2}| \quad \sigma_y = |\sigma_{y1}| + |\sigma_{y2}| \quad \tau_{xy} = \tau_{xy1} \quad (21)$$

在求得箱壁平板各点应力后, 可按平面应力理论求各点主应力, 从而按强度理论对低碳钢箱壁进行强度校核.

5 计算举例

某产品根据箱壁结构尺寸和材料性能按式 (2) 求得内压试验时(外压试验计算略)的平面内力为 $N_x = 6.73 \times 10^4 \text{N/m}$, $N_y = 8.39 \times 10^4 \text{N/m}$, 平板弯曲刚度 $D = 1.923 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{m}$.

为简单起见, 此处仅计算了平板中心 ($x = 0, y = 1.37 \text{m}$) 处的变形 $w(\text{mm})$ 和式 (19) 决定的应力 $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_{xy1} = 0 (\text{N/m}^2)$, 结果列于下表 ($q = 9.8 \times 10^4 \text{Pa}$):

m	U_m	V_m	$U_m^2 - 4V_m$	$U_m - \sqrt{U_m^2 - 4V_m}$	$U_m + \sqrt{U_m^2 - 4V_m}$	$w(0, 1.37)$	$\sigma_{x1}(0, 1.37)$	$\sigma_{y1}(0, 1.37)$
1	6.13	7.5	7.7082	3.3525	8.9053	3.838 ⁽¹³⁾	1.428×10^8	4.77×10^7
3	27.16	191.6	-28.590	21.8158*	32.51*	-0.968 ⁽¹⁸⁾	-0.38×10^8	-2.31×10^7
5	69.23	1223.5	-101.218	59.1698*	79.291*	0.338 ⁽¹⁸⁾	0.15×10^8	1.58×10^7
7	132.33	4430.5	-210.20	117.834*	146.83*	-0.122 ⁽¹⁸⁾	-0.06×10^8	-0.99×10^7
9	216.47	11803.4	-355.60	197.61*	233.324*	0.047 ⁽¹⁸⁾	0.028×10^8	0.60×10^7
11	321.64	25993.7	-534.51	298.52*	344.76*	-0.020 ⁽¹⁸⁾	-0.014×10^8	-0.34×10^7
13	447.48	50328.8	-1078.85	414.66*	480.30*	0.009 ⁽¹⁸⁾	0.008×10^8	0.24×10^7

表中带 * 值为 $U_m - \sqrt{4V_m - U_m^2}$ 及 $U_m + \sqrt{4V_m - U_m^2}$, (13) 与 (18) 为计算 X_m 所用公式号. 由表可见级数收敛较快, 取前 7 项的计算结果为

$$w = 3.122 \text{mm}, \sigma_{x1} = 1.152 \times 10^8 \text{N/m}^2,$$

$$\sigma_{y1} = 3.55 \times 10^7 \text{N/m}^2$$

6 讨论

(1) 关于薄板理论的适用性

上述箱壁平板强度计算以薄板弹性理论模型为基础, 该理论要求板厚 h 与板面最小尺寸 a 的比值满足关系 $(\frac{1}{80} \sim \frac{1}{100}) < \frac{h}{a} < (\frac{1}{5} \sim \frac{1}{8})$, 且板位移 w 较其厚度为小, 这对一般结构油箱在其计算应力小于许用应力时是可以满足的。

(2) 忽略加强铁变形对强度计算影响

若考虑加强铁变形, 平板计算将非常复杂, 因而在产品设计中多取加强铁刚度较大, 而实际生产

中要控制的是耐压试验平板应力 (主要受平板相对加强铁变形的影响), 因而忽略加强铁微小变形不会对结构安全有太大影响。

参 考 文 献

1 王龙甫. 弹性理论, 科学出版社, 1984

(本文于 1993 年 9 月 8 日收到)

简支圆板塑性极限统一解

马国伟 何丽南

(西安交通大学, 西安 710049)

摘要 本文采用双剪统一屈服准则, 给出简支圆板在均布荷载作用下塑性极限的统一解, 已有解答均是它的特例或线性逼近, 说明采用双剪统一屈服准则求解塑性极限具有普遍性和适用性。

关键词 圆板, 方板, 塑性极限

本文则研究塑性极限分析中的一个重要问题: 屈服准则的选取问题. 在塑性极限分析教材中, 已经有许多有关圆板、方板等塑性极限的解答^[1]. 最大主应力准则, Tresca 准则只考虑了一个或两个主应力的影响而有明显缺陷, Mises 准则由于其表达式的非线性给计算带来不便。

1 基本方程

图 1 为半径为 a 受均载 q 的简支圆板, 平衡方程为

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta = -\frac{q}{2} r^2 \quad (1)$$

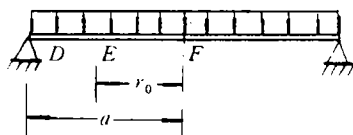


图 1

采用双剪统一屈服准则^[3](图 2), 极限条件为

$$\max \left(\left| M_r - \frac{b}{1+b} M_\theta \right|, \left| M_r - \frac{1}{1+b} M_\theta \right|, \frac{1}{1+b} \left| b M_r + M_\theta \right|, \left| \frac{1}{1+b} M_r - M_\theta \right| \right) = M_p$$

$$\left(\frac{1}{1+b} \left| M_r + b M_\theta \right|, \left| \frac{b}{1+b} M_r - M_\theta \right| \right) = M_p \quad (2)$$

$$0 \leq b \leq 1$$

式中 b 为材料常数. 圆板中心 F 和简支边界 D 满足 $M_r|_{r=0} = M_\theta|_{r=0}$ (图 2 中 A 点), $M_r|_{r=a} = 0$ (图 2 中 C 点), 全板应力状态处于 AB 、 BC 两线段上, 且

$$AB: \frac{b}{1+b} M_r + \frac{1}{1+b} M_\theta = M_p \quad (3)$$

$$CB: M_\theta - \frac{b}{1+b} M_r = M_p \quad (4)$$

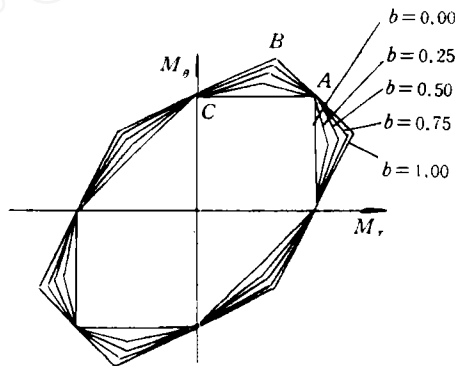


图 2

2 内力场

设 E 点弯矩处于图 2 中 B 点, 联立 (3)、(4) 式得

$$M_\theta|_{r=r_0} = 2M_r|_{r=r_0} \quad (5)$$

利用 (3)、(4) 式, (1) 式变为

$$EF: r \frac{dM_r}{dr} = (1+b)(M_p - M_r) - \frac{q}{2}r^2 \quad (6)$$

$$DE: r \frac{dM_r}{dr} = M_p + \frac{1}{1+b}M_r - \frac{q}{2}r^2 \quad (7)$$

(6)、(7) 式满足: 1) $M_r|_{r=a} = 0$; 2) $M_r|_{r=0}$ 为有限值; 3) M_r 在 E 点连续. 解 (5)、(6)、(7), 并利用上述条件得

$$q = \frac{6+2b}{2+b} \frac{M_p}{r_0^2} \quad (8)$$

$$EF: \begin{cases} M_r = M_p \left[1 - \frac{1}{2+b} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \\ M_\theta = M_p \left[1 + \frac{b}{2+b} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \end{cases}, 0 \leq r \leq r_0 \quad (9)$$

$$DE: \begin{cases} M_r = (1+b)M_p \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right] \\ - \frac{1+b}{2+b} M_p \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right] \\ M_\theta = M_p \left[(1+b) - b \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right] \\ - \frac{b}{2+b} M_p \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right] \\ r_0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (10)$$

其中 q 为塑性极限荷载, r_0 满足

$$\frac{3+b}{3+2b} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{\frac{3+2b}{1+b}} - (2+b) \left(\frac{a}{r_0} \right)^{\frac{1}{1+b}} + [(1+b) - \frac{3+b}{3+2b}] = 0 \quad (11)$$

上式可用迭代法求解, 表 1 列出取不同 b 值时 r_0/a 、 qa^2/M_p 的值.

表 1

	b										
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
r_0/a	0.7071	0.6950	0.6840	0.6742	0.6651	0.6570	0.6493	0.6424	0.6359	0.6300	0.6244
qa^2/M_p	6.0000	6.1127	6.2185	6.3140	6.4043	6.4887	6.5677	6.6418	6.7115	6.7772	6.8392

3 速度场

根据相关联流动法则, 有

$$\dot{k}_r = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial m_r}, \quad \dot{k}_\theta = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial m_\theta}$$

曲率速率与挠曲速率 \dot{w} 有如下关系

$$\dot{k}_r = -\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}, \quad \dot{k}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d \dot{w}}{dr} \quad (12)$$

AB 段: $\dot{k}_r = \frac{b}{1+b} \dot{\lambda}$, $\dot{k}_\theta = \frac{1}{1+b} \dot{\lambda}$, 代入 (12) 式得微分方程

$$\frac{1}{1+b} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} = \frac{b}{1+b} \frac{1}{r} \frac{d \dot{w}}{dr}$$

得

$$\dot{w}_1 = C_1 \frac{r^{1+b}}{1+b} + C_2, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (13)$$

CB 段: $\dot{k}_r = -\frac{b}{1+b} \dot{\lambda}$, $\dot{k}_\theta = \dot{\lambda}$, 代入 (12) 式得微分方程

$$\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} = -\frac{b}{1+b} \frac{1}{r} \frac{d \dot{w}}{dr}$$

得

$$\dot{w}_2 = C_3(1+b)r^{\frac{1}{1+b}} + C_4, \quad r_0 \leq r \leq a \quad (14)$$

由边界条件和连续条件

$$\dot{w}_1|_{r=0} = \dot{w}_0, \quad \dot{w}_2|_{r=r_0} = \frac{d \dot{w}_2}{dr}|_{r=r_0}, \quad \dot{w}_2|_{r=a} = 0$$

力学与实践

可确定 4 个参数

$$C_1 = \frac{(1+b)\dot{w}_0}{(2b+b^2)r_0^{1+b} - (1+b)^2 a^{\frac{1}{1+b}} r_0^{\frac{2b+b^2}{1+b}}}$$

$$C_2 = \dot{w}_0$$

$$C_3 = \frac{(1+b)\dot{w}_0}{(2b+b^2)r_0^{\frac{1}{1+b}} - (1+b)^2 a^{\frac{1}{1+b}}}$$

$$C_4 = -\frac{(1+b)^2 a^{\frac{1}{1+b}} \dot{w}_0}{(2b+b^2)r_0^{\frac{1}{1+b}} - (1+b)^2 a^{\frac{1}{1+b}}}$$

将这些常数代入 (13)、(14) 得圆板的挠曲速度方程为

$$\dot{w} = \begin{cases} \dot{w}_0 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{1+b} \right] / \left[(1+b)^2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^{\frac{2b+b^2}{1+b}} - (2b+b^2) \left(\frac{r_0}{a} \right)^{1+b} \right] \right\}, & 0 \leq r \leq r_0 \\ \dot{w}_0 \left[(1+b)^2 \right] / \left[(1+b)^2 - (2b+b^2) \left(\frac{r_0}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{1+b}} \right], & r_0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (15)$$