教育研究

矩形截面杆的翘曲正应力

申向东　康德基

(内蒙古农牧学院水利系，呼和浩特　010018)

杆在平面弯曲时，因剪切使横截面翘曲而产生的正应力，这里称为翘曲正应力，在材料力学教材中一般未给出计算表达式．本文用材料力学的一般方法求得了矩形截面杆在任意分布荷载作用下发生平面弯曲时横截面上的翘曲正应力．

1　翘曲引起的线应变

图 1 所示为一矩形截面杆，沿轴线受任意分布荷载 $q(x)$ 作用，设截面是狭长的，为了讨论简便，取 $b=1$，高为 $2c$，求 m-n 截面上因翘曲而引起的纵向线应变．

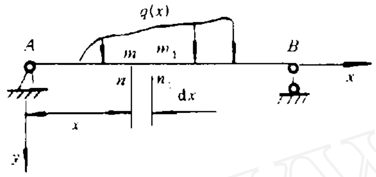

图 1

截面的翘曲一般不是自由的，把翘曲引起的纵向线应变看成是由自由翘曲引起的线应变和约束翘曲引起的线应变两部分组成的．

取长为 dx 的杆梁来讨论，如图 2，在横截面内翘曲正应力是一个自相平衡力系，因而在横截面内必有一些纵向水平纤维层不因翘曲而产生线应变，

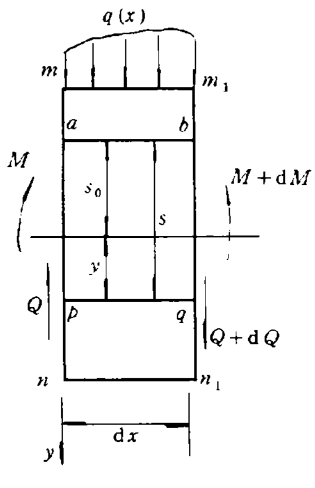

图 2

即该层纤维上的翘曲正应力等于零，设 ab 为此种纤维层之一，用 s_0 示其到弯曲中性层的距离．取图示 s 坐标，从 ab 算起，向下为正．先计算任一纵纤维 pq 因自由翘曲引起的线应变．

横截面 m-n 和 m_1-n_1 上坐标 y_1 处 (图 3) 的剪应变分别为

$$r=\frac{Qs_z}{GI}=\frac{Q}{2GI}(c^2-y_1^2)$$

$$r+dr=\frac{Q+dQ}{2GI}(c^2-y_1^2)$$

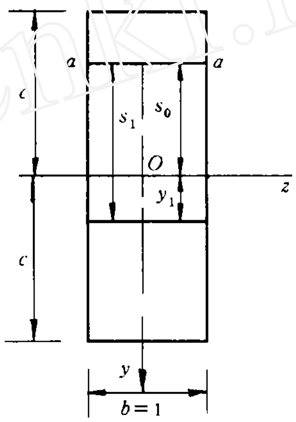

图 3

由图 3 知 $y_1=s_1-s_0$，代入上式得纵纤维 pq 自由翘曲引起的伸长量是

$$du=\int_0^s(r+dr)ds_1-\int_0^s r\,ds_1=\frac{dQ}{2GI}\left[(c^2-s_0^2)s+s_0s^2-\frac{1}{3}s^3\right]$$

相应的线应变是

$$\varepsilon_1=\frac{du}{dx}=-\frac{q(x)}{2GI}\left[(c^2-s_0^2)s+s_0s^2-\frac{1}{3}s^3\right]\quad(1)$$

设 $q(x)$ 向下为正，以下同．

把约束翘曲引起的线应变分成两部分：一是翘曲引起杆件弯曲而产生的线应变，仍采用平面假设，设 ab 纤维层的曲率半径为 ρ，此项线应变是 s/ρ；

及现在还不知其表达式的与约束边界条件有关的线应变，是坐标 x, s 的函数，用 $\varepsilon(x,s)$ 示之，后面会看到，它与 σ_x 无关．

$$\varepsilon_2 = \frac{s}{\rho} + \varepsilon(x,s) \tag{2}$$

pq 纤维总翘曲线应变是

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &= -\frac{q(x)}{2GI}\left[(c^2 - s_0^2)s + s_0 s^2 - \frac{1}{3}s^3\right] + \frac{s}{\rho} \\ &\quad + \varepsilon(x,s)\end{aligned} \tag{3}$$

2 挤压应力 σ_y

考虑 pq 线以下部份 (图 2) 的平衡，隔离体如图 4，图中未示与求 σ_y 无关的应力

$$\sigma_y \cdot \mathrm{d}x + \int_{A'} \tau \mathrm{d}A - \int_{A'} (\tau + \mathrm{d}\tau)\mathrm{d}A = 0$$

A' 为前后两侧面的面积．其中

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{2I}(c^2 - y^2)$$

$$y = s - s_0$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = -\frac{q(x)}{2I}&\left[\frac{1}{3}(2c^3 + 3c^2 s_0 - s_0^3)\right. \\ &\left. -(c^2 - s_0^2)s - s_0 s^2 + \frac{1}{3}s^3\right]\end{aligned} \tag{4}$$

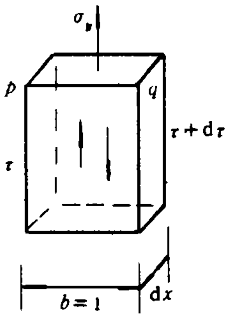

图 4

3 翘曲正应力和附加挠度

翘曲正应力用 σ_x 表示

$$\begin{aligned}\nabla_x &= E\varepsilon + \mu\sigma_y \\ &= \frac{Es}{\rho} - \frac{q(x)}{I}\left[(c^2 - s_0^2)s + s_0 s^2 - \frac{1}{3}s^3\right] \\ &\quad + E\varepsilon(x,s) - \frac{\mu q(x)}{2I}\left[\frac{1}{3}(2c^3 + 3c^2 s_0 - s_0^3)\right. \\ &\quad \left. + (c^2 - s_0^2)s + s_0 s^2 - \frac{1}{3}s^3\right]\end{aligned}$$

σ_x 与材料无关，所以上式后两项的和应为零，第 1 项中的 E 当求得 ρ 后可消去，故保留．

$$\sigma_x = \frac{Es}{\rho} - \frac{q(x)}{I}\left[(c^2 - s_0^2)s + s_0 s^2 - \frac{1}{3}s^3\right] \tag{5}$$

翘曲正应力是个平衡力系，应满足条件

$$\int_A \sigma_x \mathrm{d}A = 0, \ \int_A \sigma_x \cdot s\mathrm{d}A = 0, \ \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A = 0$$

将 (5) 式代入第 1 个条件，得

$$\frac{2Ecs_0}{\rho} - \frac{q(x)}{I}(2c^3 s_0 - \frac{2}{3}cs_0^3) = 0$$

s_0 有 3 个有意义的实根，为了便于计算，取 $s_0 = 0$，代入 (5) 式，得

$$\sigma_x = \frac{Es}{\rho} - \frac{q(x)}{I}(c^2 s - \frac{1}{3}s^3) \tag{6}$$

将其代入第 2 个条件式，得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4c^2 q(x)}{5EI} \tag{7}$$

第 3 个条件自然满足．

$E = 2(1+\mu)G, I = \dfrac{2c^3}{3}$，将它们代入上式，得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6q(x)}{5(1+\mu)GA} \tag{8}$$

在小变形条件下，用 v 表示杆的附加挠度，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \pm\frac{6q(x)}{5(1+\mu)GA} \tag{9}$$

上式即为所求由剪切引起的附加挠度的微分方程式．

将 (7) 式代入 (6) 式，因 $s_0 = 0$，所以 $s = y$，将 s 坐标换成 y 坐标，得翘曲正应力

$$\sigma_x = \frac{q(x)}{I}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}c^2 y\right) \tag{10}$$

式中的 $q(x)$ 向下为正，应力分布与中性轴反对称．若 $q(x) = 0$，则 $\sigma_x = 0$，剪力为常量，此时截面的翘曲不引起正应力．若 $q(x)$ 为常量，且沿杆长均匀分布，式 (10) 与弹性力学的解相同．

参 考 文 献

1 孙训方等编．材料力学 (上册)．高等教育出版社，1987

2 徐芝纶著．弹性力学 (上册)．高等教育出版社，1982

(本文于 1993 年 12 月 9 日收到)