

# 考虑几何非线性的杆单元应变公式

范志良

(同济大学桥梁系, 上海 200092)

有限单元法在结构几何非线性分析中应用已十分广泛. 在目前的本科与研究生教学中已将一般杆、梁及板单元的几何非线性列式予以介绍<sup>[1]</sup>. 但对有些问题阐述不够清晰. 譬如对一般的平面杆单元, 其应变公式直接采用了  $\epsilon_x$  等于  $[\partial u/\partial x + \frac{1}{2}(\partial v/\partial x)^2]$  的形式, 而略去了一般 Green 应变中的另一非线性项  $\frac{1}{2}(\partial u/\partial x)^2$ . 在平面梁单元等公式推导中也有类似情况. 那么, 应变表达式中略去  $\frac{1}{2}(\partial u/\partial x)^2$  这一项的先决条件是什么呢?

杆系结构的几何非线性主要是由杆件大转动引起的. 所采用应变公式合理与否关键在于它能否有效地排除刚体转动的影响, 即保证杆件发生刚体转动时杆件中不存在虚假应变. 据此本文考察了以下 3 个应变公式各自的适用范围.

线性公式

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

简化的非线性公式

$$\epsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

Green 应变公式

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

设杆件  $\bar{ij}$  刚性转动  $\theta$  角, 如图 1 所示, 则杆中任一点 A 的位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= x(\cos \theta - 1) \\ v &= x \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

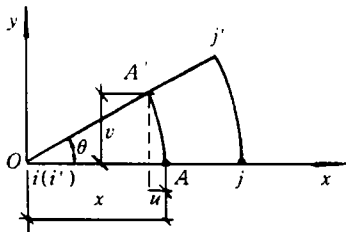


图 1 杆件刚性转动

将 (4) 代入 (1)、(2)、(3) 式中, 可得

$$\epsilon_1 = \cos \theta - 1 \quad (5)$$

$$\epsilon_2 = -\frac{1}{2}(\cos \theta - 1)^2 \quad (6)$$

$$\epsilon_3 = 0 \quad (7)$$

可见当杆件刚性转动时除完整的 Green 应变公式不产生虚假应变外, 其余 2 种应变公式均产生了虚假应变. 对不同的刚性转动角,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  值列于表 1 中.

表 1 对应于  $\theta$  的虚假应变  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  值

$\theta$ (°)	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
0.01	$-1.52 \times 10^{-5}$	$-1.16 \times 10^{-16}$
0.05	$-3.81 \times 10^{-7}$	$-7.25 \times 10^{-14}$
0.10	$-1.52 \times 10^{-6}$	$-1.16 \times 10^{-12}$
0.20	$-6.09 \times 10^{-6}$	$-1.86 \times 10^{-11}$
0.30	$-1.37 \times 10^{-5}$	$-9.40 \times 10^{-11}$
0.40	$-2.44 \times 10^{-5}$	$-2.97 \times 10^{-10}$
0.50	$-3.81 \times 10^{-5}$	$-7.25 \times 10^{-10}$
1.0	$-1.52 \times 10^{-4}$	$-1.16 \times 10^{-8}$
2.0	$-6.09 \times 10^{-4}$	$-1.86 \times 10^{-7}$
3.0	$-1.37 \times 10^{-3}$	$-9.39 \times 10^{-7}$
3.5	$-1.87 \times 10^{-3}$	$-1.74 \times 10^{-6}$
4.0	$-2.44 \times 10^{-3}$	$-2.97 \times 10^{-6}$
5.0	$-3.80 \times 10^{-3}$	$-7.24 \times 10^{-6}$
6.0	$-5.48 \times 10^{-3}$	$-1.50 \times 10^{-5}$
10.	$-1.52 \times 10^{-2}$	$-1.15 \times 10^{-4}$
15.	$-3.19 \times 10^{-2}$	$-5.07 \times 10^{-4}$
20.	$-6.03 \times 10^{-2}$	$-1.82 \times 10^{-3}$

注意到混凝土的开裂应变通常为  $1.5 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-4}$ , 钢的屈服应变通常为  $10^{-3} - 5 \times 10^{-3}$ . 当杆的刚性转动角达到  $0.1^\circ$  时, 虚假应变  $\epsilon_1$  比混凝土开裂应变小 2 个数量级, 而当  $\theta$  达  $0.3^\circ$  时, 虚假应变  $\epsilon_1$  仅比混凝土开裂应变小 1 个数量级, 比钢的屈服应变小 2 个数量级, 因此可以认为线性应变公式仅适用于杆件转动角小于  $0.1^\circ$  的情况.

当  $\theta$  达到  $3.5^\circ$  时, 虚假应变  $\epsilon_2$  比混凝土开裂应变小 2 个数量级, 当  $\theta$  达到  $6^\circ$  时,  $\epsilon_2$  仅比混凝土开裂应变小 1 个数量级, 比钢筋屈服应变小 2 个

数量级, 因此可以认为简化的非线性应变公式仅适用于转动角小于  $3.5^\circ$  的情况。

应该指出, 在非线性有限元增量列式中可选取不同的参考构形. 对上述简化的非线性应变公式 (2), 如采用 Total Lagrangian 描述法建立有限元增量公式, 则此类公式只可以分析杆件转动角不大于  $3.5^\circ$  左右的问题; 但若采用 Updated Lagrangian 描述法建立相应的增量公式, 那么只要每级增量中杆件转

动角增量小于  $3.5^\circ$ , 这样的公式可用于分析杆件转动角十分大的情况。

### 参 考 文 献

- 1 谢贻权, 何福保. 弹性和塑性力学中的有限元法. 机械工业出版社
- 2 蒋友谅. 非线性有限元法, 北京工业学院出版社, 1988

(本文于 1993 年 6 月 22 日收到)

## 关于第三、四强度理论的教学探讨

吴 坤 坤

(太钢钢铁学院, 太原 030003)

材料力学是机械、土木、水利……等工科专业中一门非常重要的专业基础课. 其要解决的基本问题之一, 就是建立构件发生破坏的条件, 并进而确保构件具有足够的强度. 所以, 强度理论是材料力学课中的一个重点内容。

由于工程材料的破坏可以归纳为两种基本形式——塑性屈服和脆性断裂. 它们的破坏形式不同, 物理实质不同, 产生破坏的原因也不同, 因而相应的强度理论也不同。

目前, 高校材力教材中, 主要介绍的强度理论为第一强度理论 (最大拉应力理论)、第二强度理论 (最大伸长应变理论)、第三强度理论 (最大剪应力理论)、第四强度理论 (最大形状改变比能理论)。

这 4 种理论, 工程和教学上常写成统一的形式

$$\sigma_{xd} \leq [\sigma] \quad (1)$$

式中  $\sigma_{xd}$  称为相当应力, 它是复杂应力状态下, 根据某一强度理论将 3 个主应力按一定形式的组合. 按照从第一到第四理论的顺序, 相当应力分别是

$$\begin{aligned} \sigma_{xd1} &= \sigma_1 \\ \sigma_{xd2} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{xd3} &= \sigma_1 - \sigma_3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{xd4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3)$$

(1) 式中  $[\sigma]$  为材料的许用应力,  $[\sigma] = \frac{\sigma_{fail}}{n}$ ,  $\sigma_{fail}$  为单向应力状态下的破坏应力,  $n$  为安全系数。

一般说, 各强度理论都有其一定的适用范围, 而学员在选用时, 往往会产生困惑, 为了解决这个问题, 下面仅就第三、四强度理论做一分析比较, 说明要讲清第三强度理论比第四强度理论更偏于安全, 而第四强度理论对塑性材料的符合程度比第三强度理论要好的方法:

**方法 1** 公式证明. 这是通过公式推导、论证, 说明问题的方法。

由 (1) 式显见, 相当应力愈大, 强度设计愈偏于安全. 所以, 要证明第三强度理论比第四强度理论更偏于安全, 只要证明  $\sigma_{xd3}$  总大于  $\sigma_{xd4}$  即可. 因

$$\begin{aligned} \sigma_{xd4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \\ &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} \end{aligned}$$

又因  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (主应力按代数值大小排列)  $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)$  必定不小于零. 所以

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ &\geq \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} \end{aligned}$$

这就是说,  $\sigma_{xd3}$  总是大于或等于  $\sigma_{xd4}$ . 可见, 在复杂应力状态下, 采用第三强度理论总是比第四强度