

以 $\eta = \frac{\delta}{2l^3}(3l\xi^2 - \xi^3)$ 代入 (1) 式积分得

$$M = \frac{\delta q}{2l^3} \left(\frac{3l^4}{4} - 3l^2x^2 + 3lx^3 - \frac{3x^4}{4} \right) \quad (2)$$

将试函数和式 (2) 代入控制方程得残值方程

$$R = EI \frac{6\delta}{2l^3}(l-x) - \frac{\delta q}{2l^3} \left(\frac{3l^4}{4} - 3l^2x^2 + 3lx^3 - \frac{3x^4}{4} \right)$$

用配点法确定待定参数

配点 $x = \frac{l}{4}$, 将 $x = \frac{l}{4}$ 代入残值方程 $R = 0$,

得

$$q_{cr}l = \frac{7.42EI}{l^2}$$

与精确解 $q_{cr}l = \frac{7.83EI}{l^2}$ 比较, 误差为 5.2%.

参 考 文 献

- 1 徐次达. 固体力学加权残值法. 同济大学出版社, 1989年6月
- 2 邱吉宝. 加权残值法的理论与应用. 宇航出版社, 1985年2月
- 3 徐文焕, 陈虬. 加权余量法在结构分析中的应用. 中国铁道出版社, 1991年5月

(本文于 1993 年 9 月 23 日收到)

用弯剪矩阵法确定压杆 临界力的教学研究

李宥兴 肖芳淳

(西南石油学院, 南充 637001)

确定压杆临界力的方法很多, 有静力法、能量法等. 但就其推导过程而言, 至今无一个统一算式. 在目前的教材中, 大多从压杆的挠曲线近似微分方程出发, 先求出两端铰支压杆的临界力, 然后用类比法求其余支承压杆的临界力; 或者再仿照两端铰支压杆的情况, 重新建立微分方程求解, 结果是费时费事, 要得到欧拉公式的统一形式, 难以一目了然. 本文针对这一缺陷, 采取另一途径, 从压杆的挠曲线微分方程, 导出弯矩微分方程, 结合矩阵运算, 得到一种新的讲授方法, 称其为弯剪矩阵法. 本法只需一个算式, 便能得出各种支承压杆的欧拉公式, 使统一公式得来非常自然, 也使学生容易理解与掌握.

为了便于分析, 我们仍取两端铰支的细长压杆进行研究, 选取图 1 所示的坐标系, 则任意截面的弯矩为

$$M = -Py$$

将上式两边对 x 求导两次得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

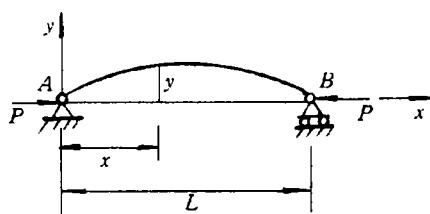


图 1

由材料力学^[1]得知, 压杆的弹性曲线近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2)$$

将 (2) 代入 (1), 并令 $K^2 = P/EI$, 整理得

$$\frac{d^2M}{dx^2} + K^2M = 0 \quad (3)$$

这是用弯矩 M 表示的弹性曲线近似微分方程. 上式的通解为

$$M = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx \quad (4)$$

求导得

$$Q = KC_1 \cos Kx - KC_2 \sin Kx \quad (5)$$

将 (4)、(5) 式写成矩阵形式^[2], 则有

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin Kx & \cos Kx \\ K \cos Kx & -K \sin Kx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 C_1 、 C_2 为积分常数, 可由杆端 A 的边界条件确定. 当 $x=0$ 时, $M=M_a$, $Q=Q_a$, 据上式有

$$\begin{bmatrix} M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ KC_1 \end{bmatrix}$$

由此可得 $C_2=M_a$, $C_1=Q_a/K$, 于是 (6) 式变为

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin Kx & \cos Kx \\ K \cos Kx & -K \sin Kx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_a/K \\ M_a \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, M_a 、 Q_a 为坐标原点处横截面上的内力, M 、 Q 为距原点为 x 的任意横截面上的内力.

上式虽为由两端铰支压杆导出的弯剪矩阵式, 但只要代入与支承形式相对应的力的边界条件, 便能确定各种支承压杆的临界力.

必须指出, 由于 (4) 式中的 C_1 、 C_2 不能同时为零, 因此 (7) 式中的 M_a 、 Q_a 亦不能同时为零, 否则失去意义. 此外, (7) 式是由弯矩微分方程导出的结果, 因此用矩阵运算后的弯矩表达式, 容易确定压杆的临界力, 否则难以得出正确的结果, 现针对几种常见约束形式的压杆, 分析计算如下:

(1) 两端铰支的压杆

当 $x=L$ 时, $M=M_b=0$, 并注意到 $M_a=0$, 于是由 (7) 式有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_a}{K} \sin KL \\ Q_a \cos KL \end{bmatrix}$$

从而得

$$\frac{Q_a}{K} \sin KL = 0$$

因 $\frac{Q_a}{K} \neq 0$, 则有 $\sin KL = 0 = \sin n\pi$

$$KL = \sqrt{P/EI} \cdot L = n\pi, \quad p = n^2 \pi^2 EI/L^2$$

取最小解得

$$P_{cr} = \pi^2 EI/L^2 \quad (8)$$

(2) 两端固定的压杆

由于载荷、支承对称, 且无横力作用, 因此 $M_b=M_a$, $Q_b=Q_a=0$, 当 $x=L$ 时, $M=M_b$,

由 (7) 式有

$$\begin{bmatrix} M_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a \cos KL \\ -M_a K \sin KL \end{bmatrix}$$

从而得

$$M_a = M_a \cos KL, \quad \cos KL = 1 = \cos 2n\pi$$

所以

$$KL = \sqrt{P/EI} \cdot L = 2n\pi, \quad P = 4n^2 \pi^2 EI/L^2$$

取最小解得

$$P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2 = \pi^2 EI/(0.5L)^2 \quad (9)$$

(3) 一端固定、另一端自由的压杆

当 $x=L$ 时, $M_b=0$, $Q_b=0$; 由于压杆中无横力作用, 所以 $Q_a=0$. 由 (7) 式有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a \cos KL \\ -M_a K \sin KL \end{bmatrix}$$

从而得

$$M_a \cos KL = 0$$

因 $M_a \neq 0$, 所以 $\cos KL = 0 = \cos \frac{n\pi}{2}$ (n 为奇数), 于是有

$$KL = \sqrt{P/EI} \cdot L = \frac{n\pi}{2}, \quad P = n^2 \pi^2 EI/(2L)^2$$

取最小解得

$$P_{cr} = \pi^2 EI/(2L)^2 \quad (10)$$

(4) 一端固定、另一端铰支的压杆

当 $x=L$ 时, $M_b=0$, 另由静力条件有 $Q_b=Q_a$, $M_a=-Q_b \cdot L$, 由 (7) 式有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_a}{K} \sin KL - Q_a L \cos KL \\ Q_a \cos KL + Q_a KL \sin KL \end{bmatrix}$$

由此得

$$\frac{Q_a}{K} (\sin KL - KL \cos KL) = 0$$

因 $\frac{Q_a}{K} \neq 0$, 只有 $\sin KL - KL \cos KL = 0$, 所以

$$\tan KL = KL$$

由图解法求得, 上式的最小非零解为

$$KL = 4.493$$

所以

$$K^2 L^2 = 20.16 = \frac{P_{cr}}{EI} \cdot L^2$$

$$P_{cr} = \frac{20.16EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \quad (11)$$

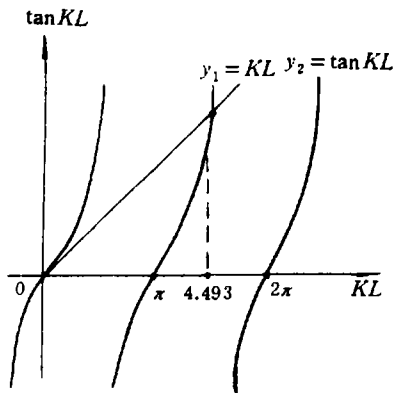


图 2

以上计算结果, 与现有文献完全一致, 从而可

将各种杆端约束情况下的欧拉公式写成统一公式为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad (12)$$

式中, μ 为与约束性质有关的长度系数, 对于两端铰支的压杆 $\mu = 1$; 两端固定的压杆, $\mu = 0.5$; 一端固定、一端自由的压杆, $\mu = 2$; 一端固定, 另端铰支的压杆, $\mu = 0.7$.

以上分析、计算表明, 用弯剪矩阵法确定压杆的临界力的最大优越性在于只需一个算式便能确定各种支承压杆的临界力, 同时, 本法物理概念清晰, 计算简便, 既符合少而精的教学原则, 又便于学生理解与掌握, 值得一试.

参 考 文 献

- 1 刘鸿文. 材料力学 (第二版). 高等教育出版社, 1983
- 2 李有兴, 肖芳淳. 管柱变形矩阵分析. 钻采工艺, 1993(2)

(本文于 1993 年 8 月 4 日收到)

离散承载体系的材料力学方法

汪 进

(安徽工学院机械系, 合肥 230069)

材料力学研究的是构件受载后的应力和变形, 这里的构件是指连续、均质、弹性的“杆件”, 其截面通常为单连通的几何图形, 如圆、圆环、矩形、工字型等 (图 1).

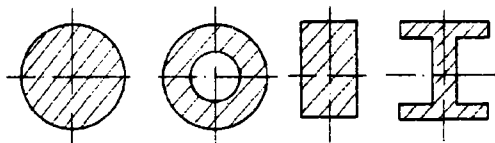


图 1

在工程上, 有些受载对象不是连续构件, 而是由多个离散分布的构件组成的承载体系, 其“截面”不再是单连通域, 而是离散图形的集合 (图 2). 工程上对这种离散承载体系的应力、变形的分析与材料力学对连续构件的分析方法是一致的.

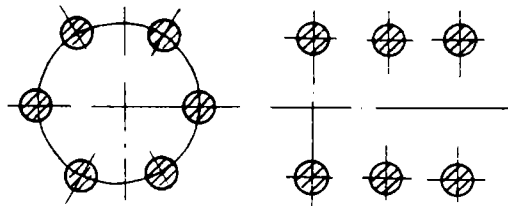


图 2

螺纹联接在工程上应用广泛. 多数螺纹联接不是用单根而是用一组螺栓来联接被联接件. 显然, 每一根螺栓就是材料力学中的“杆件”, 但一组协同工作的螺栓就不再是“杆件”了, 而是一个由离散构件组成的承载体系. 这正是离散承载体系的典型工程实例, 也是本文要讨论的力学模型.

现以螺栓组联接为例, 对离散承载体系的基本假设、载荷分类、应力分析等方面进行分析, 并逐