临界压力下压杆挠度的分析讨论

张 仲 毅

(华中理工大学汉口分校，汉口 430012)

在文 [1] 发表时，本刊编者曾加后记，希望能引起材料力学教学上的讨论，解决文中提出的由于压杆微分方程线性化而导致的挠度不确定的矛盾．讨论还是很有必要、很有意义的．这里谈谈自己的看法并提出解决的建议．为了讨论方便，我们仍以两端铰支的细长压杆为例来分析．如图 1 所示，两端铰支的压杆在临界压力 P_c 作用下处于微弯平衡状态，为求 P_c, 可先列出近似的线性化微分方程

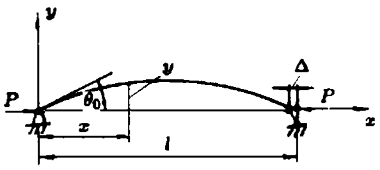

图 1

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{1}$$

其中 $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, EI 为抗弯刚度．然后求出形如

$$y = a\sin kx + b\cos kx \tag{2}$$

的通解．最后利用压杆两端的边界条件

$$\left.\begin{array}{ll} \text{当}\ x=0\ \text{时，} & y=0 \\ \text{当}\ x=l\ \text{时，} & y=0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

可求出

$$b = 0$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{4}$$

$$y = a\sin kx \tag{5}$$

式中 a 不能确定．

在以上的分析过程中，我们注意到边界条件 (3) 式中的第 2 个 "当 $x = l$ 时， $y = 0$" 似乎是粗糙了些．因为我们用线性化微分方程求临界压力的前提是压杆处于微弯平衡状态，既然有弯曲就有弯曲变形能；若认为压杆端点无位移，那么临界压力就没有作功，压杆弯曲变形能就成了无源之水．实际上用能量法求临界压力时就考虑了压杆端点的纵向位移，或者说能量法相当于利用了边界条件 "当 $x = l - \Delta$ 时， $y = 0$", 其中 Δ 为压杆端点的纵向位移，因此我们也应用较精确的边界条件 "当 $x = l - \Delta$ 时， $y = 0$" 来代替较粗略的边界条件 "当 $x = l$ 时， $y = 0$". 为此先计算两端铰支压杆端点的纵向位移 Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}\int_0^{l-\Delta} y'^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{l-\Delta} a^2k^2\cos^2 kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}a^2k^2\left[\frac{l-\Delta}{2} + \frac{1}{4k}\sin 2k(l-\Delta)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $2k(l-\Delta)$ 是个接近 2π 的值，因此可以近似认为

$$\sin 2k(l-\Delta) = 2\pi - 2k(l-\Delta)$$

所以

$$\Delta = \frac{\pi a^2 k}{4} \tag{7}$$

这样第 2 个边界条件就成为

$$\text{当}\ x = l - \frac{\pi a^2 k}{4}\ \text{时}\quad y = 0$$

即

$$a\sin k\Big(l - \frac{\pi a^2 k}{4}\Big) = 0$$

又 $a \neq 0$, $k \neq 0$, 所以得到

$$k\Big(l - \frac{\pi a^2 k}{4}\Big) = \pi$$

由此解出

$$a = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{kl-\pi}{\pi}} \tag{8}$$

这里应强调指出，(4) 式或 $kl = \pi$ 是欧拉利用精确挠曲线微分方程在直线平衡状态得到的结果，近似的线性化微分方程在用了前述较粗略的边界条件之后，凑巧也得到同样的结果，这倒有点歪打正着的意味，其实对微弯平衡状态 (4) 式反倒不是精确值．因为如果将 (4) 式的结果或者是 $kl = \pi$ 代入 (8) 式会得出 $a = 0$, 又与前提 "微弯平衡状态" 矛盾．而 (8) 式是用线性化微分方程和较精确的边界条件得到的，因此 (8) 式中的 $kl \neq \pi$！然而 k, a 两个未知数仅用 (8) 式也是无法解出来的．

通过以上的讨论我们知道，用线性化微分方程，一种是用较粗糙的边界条件，可求出不太精确

的 P_c, 且 a 不定，一种是用较精确的边界条件，但只有一个方程 (8) 无法求出两个未知数 P_c(或 k), a, 线性化方程确实遇到了困难.

为了克服上述的困难，提出两点建议：

(1) 在用线性化微分方程求临界压力和挠度时，"微弯" 不能只是一个含糊的定性的概念，而应该是一个精确的定量的定义. 比如说在小变形的限制下规定 $m = \sin\dfrac{\theta_0}{2}$ 的值，即第 1 类完全椭圆积分参数 [2], 或者根据压杆稳定实验结果给出 "微弯" 时的 θ_0 的具体值. 这样就可利用欧拉的结果求出精确的比 (4) 式稍大的 P_c 值和较 π 稍大的 kl 值，再利用 (8) 式即可求出临界压力下的挠度值. 若要避开椭圆积分，不用欧拉的结果，也可近似地取 $kl = \pi$, 再利用 $y'\big|_{x=0} = ak = \theta_0$, 从而方便地近似求出 $a = \dfrac{\theta_0}{k} = \dfrac{l\theta_0}{\pi}$.

(2) 将 (8) 式改写为

$$a = \frac{2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1 - k_0}{k_0}} = \frac{2}{k}\delta^{1/2} \tag{9}$$

式中，$\delta = \dfrac{k_1 - k_0}{k_1}$ 是微弯范围内，临界压力取上下限时的 k 值的相对误差，k_1 为临界压力取上限时的 k 值，k_0 为临界压力取下限时的 k 值. 与第 1 条建议不同，这里不是将临界压力定义在一点，而是通过给定 δ 值，比如说取 $\delta = 0.004$, 将临界压力定义在一个较窄的范围内，即给出微弯的一个范围，然后利用 (9) 式即可求出微弯状态下的挠度值.

以上两点建议的实质是一样的，即在利用线性化微分方程求临界压力和挠度的前提下，如何准确定义 "失稳".

参 考 文 献

1 张仲毅. 细长压杆临界挠度确定性的简单解释. 力学与实践，1992(5)

2 杜庆华等. 应用固体力学基础. 北京：高等教育出版社，1987: 481–487

(本文于 1994 年 2 月 2 日收到)

身边力学的趣话

郡亭枕上看潮头
——漫谈潮汐及其开发利用

王 振 东

(天津大学力学系，天津 300072)

江南好，风景旧曾谙. 日出江花红胜火，
春来江水绿如蓝. 能不忆江南？
江南忆，最忆是杭州. 山寺月中寻桂子，
郡亭枕上看潮头. 何日更重游？
江南忆，其次忆吴宫. 吴酒一杯春竹叶，
吴娃双舞醉芙蓉. 早晚复相逢？

这篇脍炙人口的 "忆江南"[1] 是诗人白居易 (772—846 年) 抒发对江南忆恋之情的名作. 早在青年时期，白居易就曾漫游江南，行旅苏抗；中年又曾先后于 822 年任杭州刺史，825 年任苏州刺史，江南及苏杭的秀丽风景给他留下了美好的回忆. 回洛阳后曾作多首诗词叙苏杭胜事，此首系开成三年 (838 年) 他 67 岁时所写.

我们着重来看此词中段，偌大一个杭州，可忆的美景当然很多，而按此词牌结构，只能纳入两句，这就要选择最有代表性、感受最深的景物. 月中桂子和浙江涌潮便是诗人所选最有代表性、最美的回忆. 钱塘江 (又名浙江、之江、罗刹江) 流至海门入海. 钱塘江大潮汹涌澎湃，犹如直立的水墙，排山倒海而来，怒潮滚滚，势不可挡. 所以诗人任杭州刺史时，躺在郡衙建造的亭子上，就能看见那卷云拥雪的壮丽景色. "郡亭枕上看潮头", 其形体当然是静的，但其内心世界是否也是静的呢？白居易另有一首 "观潮" 诗 [2] 可以说明其观潮时的内心活动：

早潮才落晚潮来，一月周流六十回.
不独光阴朝复暮，杭州老去被潮催.

这里显然已蕴含着人生有限而宇宙无穷的哲理，很值得人们深思.

实际上众多唐宋诗人墨客都曾用精彩的诗句