

线上将产生比较大的拉应力, 整个圆孔周围都成为受拉区, 这对混凝土材料的构件十分不利, 必须在

圆孔周围采取适当的措施, 以保障混凝土三角垫构件的正常使用 (图 5)。

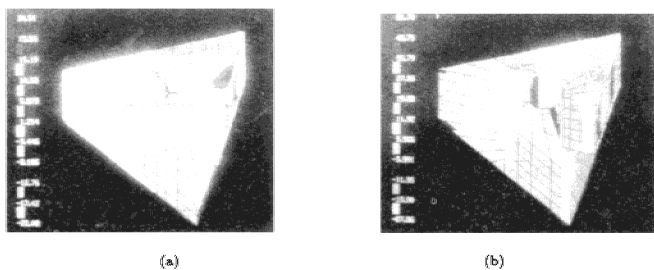


图 5 两种模型的最大主应力等值线图

#### 4 结 论

从本文的计算结果中可以看出, 从混凝土三角垫的中心部位挖去一个圆柱体后, 三角垫的重量虽然有所减少, 但在圆孔周围所产生的拉应力数值却成倍地增加, 这对混凝土这类耐压而不耐拉的脆性材料非常不利, 因此, 三角垫的中心如若开孔的话, 必须在孔的周围预埋钢筋以提高构件的抗拉强度. 减轻混凝土三角垫的重量且充分利用材料强度的另一途径是改变三角垫结构的外形尺寸, 这将是作者下一步要进行的工作.

#### 参 考 文 献

- 1 袁春航, 纪峰等编. 钱令希, 钟万勰审定. ADSOCS 原理与使用. 大连工学院工程力学研究所, 1987
- 2 潘军平. 计算结构力学中的子结构方法. 土木工程计算机应用文集. 北京: 人民交通出版社, 1993: 257-263
- 3 大连理工大学工程力学研究所. 工程结构分析前后处理图形软件 GRAPH 使用说明书, 第三版. 1989

(本文于 1994 年 12 月 5 日收到)

## 薄板小挠度弯曲问题中的 全息干涉-差分混合解法

哈 奇 生

(中国人民解放军工程兵工程学院, 南京 210007)

**摘 要** 本文把全息干涉-差分混合解法用于薄板小挠度弯曲问题. 试验实例表明, 所得结果精确度较高, 且计算简单, 使用方便.

**关键词** 薄板, 小挠度弯曲, 全息干涉, 差分

#### 1 原 理

薄板的小挠度弯曲问题可以用差分法求出其近似解<sup>[1]</sup>. 设薄板划分成等间距网格, 间距为  $h$ , 如

图 1 所示. 对于结点 0, 其差分方程为

$$20w_0 - 8 \sum_{i=1}^4 w_i + 2 \sum_{j=5}^8 w_j + \sum_{k=9}^{12} w_k = h^4 \left( \frac{q}{D} \right) \quad (1)$$

对于每一个未知挠度的结点, 均可建立起这样的差分方程, 再考虑边界条件, 就可联立解差分方程. 求出这些结点的挠度. 从而再用有关的差分公式求出各结点的内力值和边界上各结点的反力值.

例如, 结点 0 处的弯矩可表达为

$$(M_x)_0 = \frac{D}{h^2} [(2 + 2\mu)w_0 - (w_1 + w_3) - \mu(w_2 + w_4)] \quad (2)$$

$$(M_y)_0 = \frac{D}{h^2} [(2 + 2\mu)w_0 - (w_2 + w_4) - \mu(w_1 + w_3)] \quad (3)$$

式中

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (4)$$

是薄板的弯曲刚度.  $E, \mu$  分别为薄板的拉伸弹性模量和泊松比,  $t$  为薄板的厚度.

全息干涉法是用两次曝光法得到物体表面受载前后的全息干涉条纹图, 并由此条纹图提取出物体表面的位移或斜率变化值. 全息干涉法的主要优点是全场测量, 对被测量物体无损害, 且灵敏度和测量精度很高等. 文献 [2] 介绍了一种用于测量离面位移 (在板的弯曲问题中即是挠度  $w$ ) 的全息记录光路, 并给出了挠度的表达式

$$w = \frac{\lambda N_i}{1 + \cos \alpha} \quad (5)$$

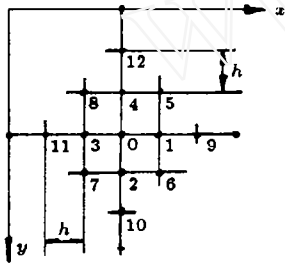


图 1

式中,  $\lambda$  为照明光束的波长, 对 He-Ne 激光光源,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ,  $N_i$  为全息干涉图的条纹级数, 对于亮条纹为整数级, 暗条纹为半级.  $\alpha$  为照明光矢量与观察记录方向的夹角. 实践证明, 由此测得的挠度值具有很高的精确度.

本文认为可以运用全息干涉法精确地直接测量出薄板的挠度变化, 再利用差分公式, 计算出板内的内力和边界反力, 避免建立大量的差分方程和联立求解方程组.

## 2 试验验证

本文以周边简支, 中心受集中载荷  $P$  作用的长方板作为实例. 板用硬铝合金板制成, 边长分别为  $2b = 150\text{mm}$ ,  $2a = 100\text{mm}$ , 如图 2 所示. 板厚为  $t = 0.94\text{mm}$ , 材料的泊松比  $\mu = 0.3$ , 由于此问题

是对称问题, 故取坐标如图 2. 板中心 0 点处, 钻  $\varphi = 0.5\text{mm}$  的小孔, 用细线穿过后再用环氧树脂固定, 线的另一端则绕过滑轮后悬挂砝码盘, 滑轮位置可以调节, 以保证荷载方向与板平面相垂直, 通过增减砝码盘中的砝码, 来改变荷载的大小.

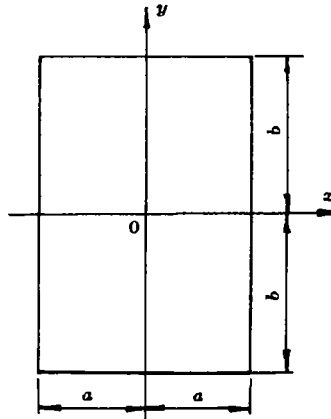


图 2

图 3 即为此薄板荷载变化前后的全息干涉条纹图. 由于对称, 仅显示了第一象限部分. 试验时, 照明光束与板面的垂直方向 (即观察方向) 的夹角  $\alpha = 45^\circ$ , 两次曝光间的荷载增量  $\Delta P = 0.65\text{N}$ . 对于四边简支板, 显然周边的挠度  $w = 0$ , 即在  $x = \pm a$  和  $y = \pm b$  时, 条纹级  $N = 0$ ; 而中心集中荷载作用处 0 点, 挠度达最大值, 即  $w|_{x=0, y=0} = w_{\max}$ , 因此 0 点的条纹是最高级条纹. 由图 3 可知, 中心 0 点的条纹级  $N_{\max} = 18$ . 由式 (5) 可得最大挠度的实验值为

$$w_{\max} = 6.67 \times 10^{-3} \text{mm}$$

已知此板的理论值的最大挠度为 [3]

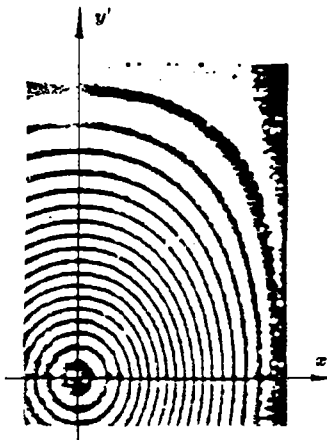


图 3

$$w_{\max}^T = C \frac{Pa^2}{D} = 6.75 \times 10^{-3} \text{mm}$$

式中,  $C$  为常数, 此处  $C = 0.1527$ . 理论值和实验值的最大挠度的相对误差仅为 1.3%, 可见用全息干涉法测量薄板的挠度, 具有很高的精度.

为了用差分法求出板的内力, 把图 3 第 1 象限部分划分为  $20 \times 30$  的网格, 即网格间距  $h = 2.5 \text{mm}$ . 先确定整数级条纹和半级条纹与网线交点的位置, 再用拉格朗日插值公式确定出网格结点的条纹级数. 按公式 (5), 即可得到各结点的挠度值, 表 1 为沿坐标轴  $y$  轴附近各结点的挠度值. 单位为  $10^{-3} \text{mm}$ , 坐标单位为  $\text{mm}$ .

利用公式 (2)、(3) 和表 1 中的  $w$  值, 即可计算出沿  $y$  轴上各结点的内力值. 作为实例, 表 2 给出了沿  $y$  轴上各结点的弯矩  $M_x$  值, 其单位为  $N$ . 表 2 中同时给出了按网格间距  $h = 5 \text{mm}$  计算得到的  $M_x$  值. 比较表 2 中由两种网格间距得到的  $M_x$  值, 可见两者仅在荷载作用点  $0$  点附近差别较大, 而当  $y > 10 \text{mm}$ , 两者开始趋于一致. 这说明了用间距  $h = 2.5 \text{mm}$  或  $h = 5.0 \text{mm}$ , 所得的结果, 除在荷载作用区域附近外, 差别均不大. 但试算证明, 若再加大网格间距, 误差将迅速增大. 计算出此薄板弯曲问题中心点  $0$  处  $M_x$  的理论值 [3].

$$M_x \Big|_{y=0}^{z=0} = \frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \mu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi \zeta}{a}}{\pi c} + 1 + \gamma_1 \right]$$

$$= 0.326(N)$$

表 1

$x$	$y$							
	0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5
0	6.670	6.537	6.403	6.136	6.081	5.873	5.603	5.334
2.5	6.403	6.318	6.218	6.103	5.968	5.736	5.502	5.270
5.0	5.983	5.951	5.769	5.736	5.581	5.502	5.220	4.999
$x$	$y$							
	20.0	22.5	25.0	27.5	30.0	32.5	35.0	37.5
0	5.040	4.776	4.480	4.173	3.861	3.563	3.250	2.942
2.5	4.957	4.710	4.420	4.120	3.819	3.524	3.228	2.926
5.0	4.730	4.481	4.241	3.967	3.701	3.445	3.160	2.851
$x$	$y$							
	40.0	42.5	45.0	47.5	50.0	52.5	55.0	57.5
0	2.651	2.339	2.031	1.734	1.450	1.201	0.955	0.747
2.5	2.630	2.325	2.014	1.724	1.429	1.193	0.942	0.741
5.0	2.502	2.261	1.963	1.657	1.378	1.126	0.891	0.683
$x$	$y$							
	60.0	62.5	65.0	67.5	70.0	72.5	75.0	
0	0.601	0.409	0.302	0.189	0.107	0.032	0	
2.5	0.599	0.404	0.297	0.186	0.105	0.030	0	
5.0	0.557	0.371	0.260	0.178	0.089	0.028	0	

式中,  $\gamma_1 = -0.168$ .  $c$  为集中荷载分布半径.

表 2

$M_x(N)$	$y$							
	0	5	10	15	20	25	30	35
$h = 2.5$	0.515	0.344	0.228	0.169	0.132	0.104	0.067	0.040
$h = 5.0$	0.322	0.269	0.220	0.166	0.130	0.105	0.067	0.039
$M_x(N)$	$y$							
	40	45	50	55	60	65	70	75
$h = 2.5$	0.036	0.026	0.026	0.017	0.015	0.010	0.002	0.0
$h = 5.0$	0.037	0.027	0.025	0.016	0.015	0.011	0.001	0.0

表 3

$h$	2.5	5.0	7.5	10	12.5
$M_x(N)$	0.515	0.322	0.239	0.191	0.164
$\eta(\%)$	62.4	1.23	24.6	39.7	48.2

表 3 列出了中心点  $0$  处用不同网格间距得到的  $M_x$  及与理论值的相对误差  $\eta$ . 由表 3 可见, 当网格间距大于  $5 \text{mm}$  后, 相对误差迅速增加, 这是符合差分法的一般规律的. 但是, 表 3 表明, 相对误差最小的是  $h = 5 \text{mm}$  时的结果, 而  $h = 2.5 \text{mm}$  时, 相对误差反而增大了很多. 这是由于实验板与理论板之间在中心部分存在差异的结果. 实验板中心部分开了一个小孔, 而理论板是不应有孔的. 按圣维南原理, 这种差异只影响到荷载作用点的邻近区域. 从表 2 可见, 其影响范围仅在  $10 \text{mm}$  左右.

图 4 为按网格间距  $h = 5 \text{mm}$  所得的结果绘出的  $M_x$  沿  $y$  轴的分布曲线.

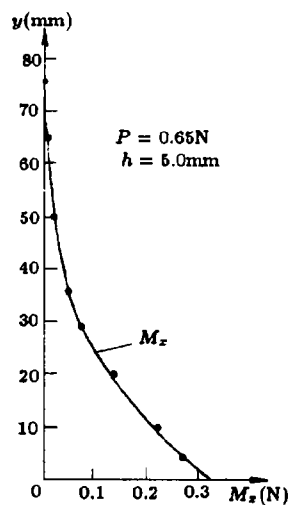


图 4

### 3 讨论与结论

用差分法求解薄板的弯曲问题时,由于板内和自由边上各结点的挠度未知,必须利用边界条件和联立求解与未知挠度结点个数相同的差分方程组,以决定出各结点的挠度近似值.这使得计算工作量大大增加,同时也降低了计算结果的精度.而全息干涉法和差分法的混合解法,由于不必建立各未知挠度结点的差分方程和联立求解它们,只要把由全息干涉法确定的各结点的挠度,直接代入内力和边界反力的差分公式,即可求得.这样,不仅大大地简化了计算,同时也提高了各结点内力或边界反力的精度.对于薄板小挠度弯曲问题的全息干涉法,在实验室内是比较容易实现的,对被测物体的表面无特殊要求,干涉条纹图条纹清晰,易于获得比较密集的干涉条纹图,便于条纹分析.这些特点都有利于全息干涉法的应用.

在全息干涉法和差分法的混合解法中,挠度是由全息干涉法实测得到的.因此在应用差分法求内力时,不必顾及荷载的形式,也不存在不同荷载的具体处理方法.无论何种形式的荷载,如集中载、均布载或变集度荷载等,只要在进行全息干涉测量中模拟了实际荷载,就可以得到相应的各结点的挠度值,并直接用差分法求出所需要的内力或边界反力.不必将集中荷载作为 $h^2$ 面积上的均布载,或将连续变集度荷载进行加权处理等<sup>[1]</sup>.

全息干涉法获得的干涉条纹图条纹清晰,易于加密,且对挠度的测量精度很高,因此,可以适当加密网格,或者采用三次或更高次数的差分公式,以提高内力或边界反力的精确度.同时,由于从全息干涉图得到的是全场挠度信息,易于确定出板上任一点的挠度值,所以可以根据需要直接用差分公式计算板上某些局部的结点或某一结点的内力.这是差分法无法实现的.在同一块薄板上,还可以方便地采用不同间距的网格,甚至可采用变间距网格,以适应不同的内力变化梯度.如局部内力变化梯度大的应力集中区,可以加密网格;而对变化较平缓的区域,则可适当加大网格.这样做要比单独用差分法计算且采用不同间距的网格时简单得多.

综上所述,把全息干涉法和差分法的混合解法用于薄板的小挠度弯曲问题,在计算上大大简化,所得到的挠度和内力及边界反力,具有较高的准确度.

#### 参 考 文 献

- 1 徐芝纶. 弹性力学(下册). 北京:人民教育出版社, 1982:62-67, 76-77
- 2 陆渝生. 汽车桥壳开口薄壁截面侧向变形的全息干涉测量. 工程兵工程学院学报, 1990(3)
- 3 铁摩辛柯 S 等. 板壳理论. 北京:科学出版社, 1977: 150,157

(本文于 1993 年 5 月 9 日收到)

## 测定裂纹尖端形状和张开位移的实验研究<sup>1)</sup>

段自力 周文华 匡健

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

**摘要** 本文提出了用焦散线法、伪焦散线法和计算机技术相结合测定裂纹尖端形状和张开位移的方法,推导出张开型裂纹尖端形状方程,为确定原始裂纹尖端的张开位移,提供了一种全新的光学测量方法.

**关键词** 裂纹, 张开位移, 焦散线法, 伪焦散线法, 计算机

构件裂纹尖端的形状对其断裂问题的理论分析至关重要.用焦散线法和伪焦散线法,通过计算机绘图,即可十分直观地绘出裂纹尖端的形状,从而确定 COD(裂纹尖端张开位移).该法测量项目简单;放大倍数可调,最大可达 100 倍.

### 1 焦散线法和伪焦散线法原理简述

设带裂纹薄板试样表面方程  $z = f(x, y)$ , 处于激光点光源照射条件下,则有反射场的焦散变换方

<sup>1)</sup> 国家科委资助项目.