用能量法求细长压杆临界荷载

薛福林

(哈尔滨工业大学，哈尔滨 150001)

文 [1] 第 2.9 节在对图 1 压杆用能量法求临界荷载近似解时，得出两个变形能 ΔU 的算式：

$$\Delta U=\int_0^l \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x=\int_0^l \frac{P^2(\delta-y)^2}{2EI}\mathrm{d}x \qquad (1)$$

$$\Delta U=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x \qquad (2)$$

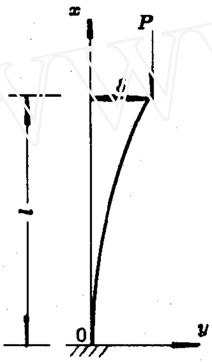

图 1

并有如下两个论述：

I. 如果我们是以真实的挠度曲线进行计算，则 (1) 与 (2) 两式都是精确的. 但当我们运用假设的曲线时，则式 (1) 较好，因为用式 (1), 近似解的准确性与 y 的准确性有关；若用式 (2), 则解的准确性与 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的准确性有关. 在选择挠度曲线时，y 的准确度通常要比 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 为好.

II. 除非所设的挠度曲线恰为真实的曲线，否则所得的临界荷重值总比真正的值偏高. 这是由于只有真实的挠曲形式才意味着杆的第一微段都处于平衡. 对不正确的屈曲形状而要使这杆平衡，就需要引入附加的约束来维持这形状. 附加的约束只会使杆的刚度增大，因而临界荷重就比真实的值要大.

这两个论述一直在力学界流行.

文 [2] 认为文 [1] 的这两个论述的论据不尽合理.

对论述 I, 文 [2] 认为更合理的解释应该是由于在近似计算中采用式 (1) 已使得近似挠曲函数的静力平衡条件自然满足，故此精度要高. 而采用式 (2) 时，由于所设近似挠曲函数往往很难保证能够满足静力平衡条件，因此精度较低.

对论述 II, 文 [2] 认为文 [1] 的解释对于由采用式 (2) 所得计算结果还行得通. 而当采用式 (1) 计算时，由于平衡条件已自然满足，上述解释就难以成立了. 这时可解释为近似挠度曲线没有满足小挠度条件所致 ……. 由此所得结果应属于大挠度理论范围，而根据大挠度理论所得出的压杆临界荷载值要比小挠度理论结果高一些.

这里，对论述 I 的论据，笔者提出一种不同于 [1] 、[2] 的商榷性意见. 的确，近似挠曲函数 y 的准确度通常要比 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 为好，但由能量法 [1] 知，采用式 (1) 可得

$$P_{\mathrm{cr}}=EI\frac{\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l(\delta-y)^2\mathrm{d}x} \qquad (3)$$

而采用式 (2) 可得

$$P_{\mathrm{cr}}=EI\frac{\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x} \qquad (4)$$

虽然式 (3) 分母比式 (4) 分子的准确度好，但这不是确定分式准确度哪个好的充分条件，分式的准确度决定于分子和分母的比值；另外，采用式 (1) 并不能使近似挠曲函数的静力平衡条件自然满足. 杆的弯曲静力平衡条件实际就是文 [2] 所说的“小挠度条件”

$$EIy''=M \qquad (5)$$

这个条件只对精确的挠曲函数才会满足. 将 P_{cr} 代入 M 后可验证文 [2] 的近似挠曲函数 $y_1=\frac{\delta^2}{l^2}x^2$ 和 $y_2=\frac{3\delta}{2l^2}x^2-\frac{\delta}{2l^3}x^3$ 都不满足式 (5).

对论述 II, 文 [2] 的论据似也值得商榷. 因为采用了近似挠曲函数，式 (5) 不满足，即静力平衡条件不满足. 而由于式 (1) 和 (2) 都是用小挠度理

论建立的 [1], 所得结果不会属于大挠度理论的解. 况且，未见到文 [1] 或其他文献说根据大挠度理论所得出的压杆临界荷载值要比小挠度理论结果高一些.

对论述 I, 笔者认为，如果将由式 (3) 得到的 $P_{\rm cr}$ 表为 $(P_{\rm cr})_3$, 由式 (4) 得到的 $P_{\rm cr}$ 表为 $(P_{\rm cr})_4$, 就有

$$\frac{(P_{\rm cr})_4}{(P_{\rm cr})_3}=\frac{\left[\int_0^l\left(\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}\right)^2{\rm d}x\right]\left[\int_0^l(\delta-y)^2{\rm d}x\right]}{\left[\int_0^l\left(\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x}\right)^2{\rm d}x\right]^2}$$

对分子应用布涅可夫斯基不等式 [3]

$$\left[\int_a^b f(x)g(x){\rm d}x\right]^2\leq\left[\int_a^b f^2(x){\rm d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x){\rm d}x\right]$$

令 $f(x)=\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}, g(x)=\delta-y, a=0, b=l$ 可得

$$\left[\int_0^l\left(\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}\right)^2{\rm d}x\right]\left[\int_0^l(\delta-y)^2{\rm d}x\right]\geq$$
$$\left[\int_0^l\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}(\delta-y){\rm d}x\right]^2=$$
$$\left[\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x}(\delta-y)\Big|_0^l+\int_0^l\left(\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x}\right)^2{\rm d}x\right]^2$$

由图 1 知， $\frac{{\rm d}y}{{\rm d}x}\Big|_{x=0}=0, y\Big|_{x=l}=\delta$, 因此方括号内第 1 项等于零，这样就得到

$$\frac{(P_{\rm cr})_4}{(P_{\rm cr})_3}\geq 1 \tag{6}$$

再结合论述 II, 便知 $(P_{cr})_4$ 不会比 $(P_{cr})_3$ 更准确. 这里的推导没有利用 y 和 $\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}$ 的准确度，而布涅可夫斯基不等式对可积函数都成立，因此所得结果具有普遍性. 也就是说对任何满足图 1 压杆边界条件的连续可微函数式 (6) 都成立，即使 $\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}$ 的准确度比 y 好也不例外.

这样就可断言：采用式 (1) 比采用式 (2) 能得到更准确的临界荷载的原因只在于算法本身，它与 y 和 $\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}x^2}$ 的准确度无关.

以图 1 的问题为基础，不难用类比法将论述 I 、 II 的结论推广到杆端为其他约束的情况.

参 考 文 献

1 铁摩辛柯 S P 等著. 张福范译. 弹性稳定理论. 北京：科学出版社， 1965
2 吴亚平. 用能量法分析压杆稳定性时的边界条件. 力学与实践， 1992(2):49–51
3 那汤松 И П 著. 徐瑞云译. 实变函数论. 北京：人民教育出版社， 1955

(本文于 1995 年 3 月 18 日收到)

21 世 纪 的 实 验 力 学

贾有权
(天津大学力学系，天津 300072)

看了 “力学 —— 迎接 21 世纪新的挑战” 后，很受启发和鼓舞，心里有许多话要说，想来，还是先谈谈实验力学吧.

“力学 —— 迎接 21 世纪新的挑战” 一文中，只提到实验是新现象的启示和理论的验证，这是不够的，也许是受到双重性限制的缘故. 其实，实验力学是典型的技术科学，它根本不是什么基础学科，它跨学科的特点十分明显，并具备学科间的互相渗透和快速发展的特点. 它不仅为理论服务，还直接为生产服务. 比如实测、无损检测、监测、监控、失效分析、故障诊断、预警预报、安全评估、材料力学行为的测量、特殊条件下各种力学参数的测量等等. 如果把它看成为理论的学科服务那就太局限性了. 美国、日本、英国等国均把力学放在其他学会之中，但美国有实验力学学会 (SEM), 日本有光弹性协会. 欧洲有 IUTAM, 另外有 EMEKO.

力学人才的培养也受到双重性的影响，强调基础的一面，加强理论的学习是重要的，但绝不能忽视应用的一面. 我国办了那么多力学专业，理论人才倍出，解决实际生产问题的人有多少呢？如田昌霖